MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 12
5.12.2011 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia, Esko Heinonen ja Asko Linnakoski

Näissä harjoituksissa käsitellään monisteen lopussa tarkasteltuja alkeisfunktiota. Samalla tehtävissä tulee esille suuri osa syksyn mittaan opiskeltua.

Tuttuja ex tempore tehtäviä ei tällä kertaa ole mukana. Ex temnpore tehtävät ovat olleet kakkosperiodin ajan viime syksyn ohjaustehtäviä ja nyt halusin sisällyttää näitä kotitehtäviin.

K1. Osoita juuren määritelmän ja potenssin (eksponenttina kokonaisluku) laskusääntöjen avulla, että kun $x > 0$, pätee

(a)
$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;$$

(b)
$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}.$$

Ratkaisu: Ratkaisussa tarvitaan juuren määritelmää. Jos $x \geq 0$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin luku y on luvun x n:s juuri eli $\sqrt[n]{x} = y$ jos ja vain jos $y \geq 0$ ja $y^n = x$.

a) Merkitään $a = (\sqrt[n]{x})^m$. Oletuksen mukaan $x > 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}$, joten luku $\sqrt[n]{x}$ on olemassa ja se on yksikäsitteinen. Koska $\sqrt[n]{x} \geq 0$ myös $(\sqrt[n]{x})^m \geq 0$. Näin ollen juuren määritelmän mukaan $\sqrt[n]{x^m} = a \Leftrightarrow a^n = x^m$. Siispä väite $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ on yhtäpitävä väitteen $((\sqrt[n]{x})^m)^n = x^m$ kanssa. Potenssin laskusääntöjen, kertolaskun vaihdannaisuuden ja juuren määritelmän perusteella

$$((\sqrt[n]{x})^m)^n = (\sqrt[n]{x})^{mn} = (\sqrt[n]{x})^{nm} = ((\sqrt[n]{x})^n)^m = x^m,$$

joten $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.

b) *Tapa 1.* Merkitään $a = \sqrt[np]{x^{mp}}$. Oletuksista $x > 0$ ja $m, n, p \in \mathbb{N}$ seuraa juuren olemassaolo ja luvun $\sqrt[np]{x^{mp}}$ ei-negatiivisuus. Näin ollen juuren määritelmän mukaan $\sqrt[n]{x^m} = a \Leftrightarrow a^n = x^m$. Siispä väite $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$

on yhtäpitävä väitteen $(\sqrt[np]{x^{mp}})^n = x^m$ kanssa. Potenssin laskusääntöjen, a) -kohdan tuloksen, kertolaskun vaihdannaisuuden ja juuren määritelmän perusteella

$$\begin{aligned}(\sqrt[np]{x^{mp}})^n &= (\sqrt[np]{(x^m)^p})^n \overset{\text{a)}}{=} ((\sqrt[np]{(x^m)})^p)^n = (\sqrt[np]{(x^m)})^{pn} \\ &= (\sqrt[np]{(x^m)})^{np} = x^m,\end{aligned}$$

joten $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$.

Tapa 2. Merkitään $b = \sqrt[n]{x^m}$. Jälleen oletuksista $x > 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}$ seuraa juuren olemassaolo ja luvun $\sqrt[n]{x^m}$ ei-negatiivisuus. Näin ollen juuren määritelmän mukaan $\sqrt[np]{x^{mp}} = b \Leftrightarrow b^{np} = x^{mp}$. Näin ollen väite $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$ on yhtäpitävä väitteen $(\sqrt[n]{x^m})^{np} = x^{mp}$ kanssa. Potenssin laskusääntöjen ja juuren määritelmän perusteella

$$(\sqrt[n]{x^m})^{np} = ((\sqrt[n]{x^m})^n)^p = (x^m)^p = x^{mp},$$

joten $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$.

K2. Määritä

$$\lim_{t\to 1} \frac{\log(\frac{1}{t})}{1-t}.$$

Voit huomata, että kyseessä on erotusosamäärä. Voit myös käyttää l'Hospitalin säännön helpointa muotoa sivulta 62 (mikä on itse asiassa sama asia.)

Ratkaisu: *Tapa 1:* Olkoon $t > 0$ (muutoin tehtävän logaritmia ei ole määritelty). Muistamalla, että $\log(1/t) = \log(1) - \log(t)$ voidaan huomata, että tehtävänannossa oleva raja-arvo on funktion $\log(t) := f(t)$ erotusosamäärä pisteessä $t = 1$. Muokataan lauseke tähän muotoon:

$$\lim_{t\to 1} \frac{\log(\frac{1}{t})}{1-t} = \lim_{t\to 1} \frac{\log(1) - \log(t)}{1-t} = f'(1).$$

Muistamalla logaritmifunktion derivaatta, saadaan $f'(t) = 1/t$, ja edelleen $f'(1) = 1$. Saatiin siis

$$\lim_{t\to 1} \frac{\log(\frac{1}{t})}{1-t} = 1.$$

Tapa 2: Vihjeessä mainittiin myös l'Hospitalin säännön helppo muoto. Tämän säännön nojalla pätee seuraavaa: Olkoot funktiot f ja g ovat määriteltyjä pisteen x_0 ympäristössä ja derivoituvia pisteessä x_0. Jos $f(x_0) = 0 =$

$g(x_0)$ ja $g'(x_0) \neq 0$, niin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Tätä voidaan soveltaa tehtävän raja-arvoon valitsemalla $f(t) = \log(1/t)$ ja $g(t) = 1 - t$. Logaritmifunktion derivaatta saadaan soveltamalla ketjusääntöä (Lause 7.3.):

$$f'(t) = D\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{1}{1/t} \cdot D\left(\frac{1}{t}\right) = t \cdot (-t^{-2}) = -\frac{1}{t},$$

ja $g'(t) = -1$, joten $f'(1)/g'(1) = (-1)/(-1) = 1$. Saamme siis saman vastauksen myös tällä keinolla.

K3. Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla

$$f(x) = \log(x^2 + 1).$$

Missä funktio f on konveksi?

Ratkaisu: Muistutetaan aluksi, että välillä Δ derivoituvan funktion kuvaajaa sanotaan alaspäin kuperaksi eli konveksiksi, jos kuvaaja ei missään välin Δ pisteessä ole minkään tangenttinsa alapuolella. Väli Δ voi tietysti olla myös koko $\mathbb{R}$. Lauseen 8.13 nojalla tämä pätee jos ja vain jos funktion toinen derivaatta on ei-negatiivinen.

Ensimmäiseksi todetaan $x^2 + 1 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Näin ollen funktio f on määritelty $\forall x \in \mathbb{R}$. Käytetään luentomonisteen lausetta 8.13. Funktio f on selvästi kahdesti derivoituva $\forall x \in \mathbb{R}$. Lasketaan funktion f ensimmäinen ja toinen derivaatta. Nyt $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ ja edelleen $f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$. Tutkitaan milloin pätee $f''(x) \geq 0$. Eli $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, kun $2 - 2x^2 \geq 0$, sillä $(x^2+1)^2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Saadaan $2 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Siispä funktio f on konveksi $\forall x \in [-1, 1]$.

K4. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x$. Tutki erotusta. Väliarvolause auttaa. (Jos aikaa jää, niin voit jatkaa seuravalla väitteellä: Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.)

Ratkaisu: Olkoon $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$. Nyt on siis näytettävä, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, \infty[$. Funktio f on selvästi derivoituva koko määrittelyjoukossaan ja

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 1 \\ f''(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Huomataan, että $f''(x) = e^x > 0$ kaikilla $x \geq 0$, joten f' on aidosti kasvava. Lisäksi

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 - 0 - 1 = 0 \\ f'(0) &= e^0 - 1 = 0, \end{aligned}$$

joten pätee $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$, ja siten funktio f on kasvava. Edellä huomattiin myös, että $f(0) = 0$, joten $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$, mikä oli osoitettava.

Lisäväite: Olkoon $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$. Nyt g on selvästi derivoituva määrittelyjoukossaan ja

$$g'(x) = e^x - x - 1 = f(x).$$

Yllä todistettiin, että $g'(x) = f(x) \geq 0$, joten myös funktio g on kasvava. Nyt laskemalla huomataan, että $g(0) = e^0 - \frac{1}{2}0^2 - 0 - 1 = 0$. Siis myös $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$.

Huomautus! Yllä funktioiden f ja f' kasvavuus seuraavat kasvavuuslauseesta ja aidon kasvavuuden lauseesta, jotka löytyvät luentomonisteesta sivulta 57. Nämä ovat seurauksia väliarvolauseesta, johon vihjeessäkin viitattiin.

K5. Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ missä $f(x) = x + \sin x$ ja $g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$. Selvitä funktioiden lokaalit ääriarvot.

Ratkaisu: Funktio f on koko määrittelyjoukossaan derivoituva, joten sen mahdolliset lokaalit ääriarvot ovat luentomonisteen lauseen 8.7. nojalla derivaatan nollakohdissa.

$$f'(x) = 1 + \cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Koska $-1 \leq \cos x \leq 1 \, \forall \, x \in \mathbb{R}$, niin $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja yhtäsuuruus on voimassa vain yksittäisissä pisteissä $x = \pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$. Aidon kasvavuuden lauseen (lause 8.6. luentomonisteessa) nojalla funktio f on koko määrittelyjoukossaan aidosti kasvava eikä sillä siten ole lokaaleja ääriarvokohtia.

Funktio g on koko määrittelyjoukossaan derivoituva, joten sen mahdolliset lokaalit ääriarvot ovat luentomonisteen lauseen 8.7. nojalla derivaatan nollakohdissa.

$$\begin{aligned} g'(x) = 1/2 + \cos x = 0 \quad &\iff \quad \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\iff \quad x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi tutkitaan derivaatan nollakohtia eli lokaaleja ääriarvokohtaehdokkaita. Tämä voidaan tehdä joko (1) ääriarvokohtien f'-testillä (lause 8.8. luentomonisteessa) tutkimalla derivaattafunktion merkkiä nollakohtiensa välissä tai (2) ääriarvokohtien f''-testillä (lause 8.9. luentomonisteessa) tutkimalla funktion g toisen kertaluvun derivaattaa. Käytetään f''-testiä: Funktion g toinen derivaatta on funktio

$$g''(x) = -\sin x.$$

Koska jokaisella $n \in \mathbb{Z}$ on voimassa, että

$$g''(\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi) = -\sin(\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi) = -\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\sqrt{3}/2 < 0,$$

niin kohdat $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ovat f''-testin nojalla funktion g lokaaleja maksimikohtia. Koska jokaisella $n \in \mathbb{Z}$ on voimassa, että

$$g''(\frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi) = -\sin(\frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi) = -\sin(\frac{4\pi}{3}) = \sqrt{3}/2 > 0,$$

niin kohdat $x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ovat f''-testin nojalla funktion g lokaaleja minimikohtia. Lokaalit ääriarvot ovat siis

$$\begin{aligned} \text{maksimit: } g(\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi) &= \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi + \sin\left(\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\right) = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}/2 + n \cdot \pi \\ \text{minimit: } g(\frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi) &= \frac{2\pi}{3} + n \cdot \pi + \sin\left(\frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi\right) = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}/2 + n \cdot \pi. \end{aligned}$$

Seuraavissa tehtävissä käsitellään hyperbolisia funktioita. Palautetaan ensin mieleen hyperbolisen kosinin määritelmä: *Hyperbolinen kosini* on funktio $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}.$$

Se on koko määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva ja

$$D \cosh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Palautetaan mieleen, että derivaattafunktiota kutsutaan hyperboliseksi siniksi: *Hyperbolinen sini* on funktio $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}.$$

Myös se on koko määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva ja

$$D \sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$$

Tehdään vielä muutama havainto hyperbolisista funktioista. Havaitaan, että eksponenttifunktion ominaisuuksien nojalla pätee

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - \frac{1}{e^x}) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \geq 0 \quad \text{jokaisella } x > 0,$$

ja yhtäsuuruus on voimassa täsmälleen silloin, kun $x = 0$. (Eksponenttifunktio $x \mapsto e^x$ on aidosti kasvava ja siis $e^x > e^0 = 1$ jokaisella $x > 0$.) Aidon kasvavuuden lauseen (lause 8.6. luentomonisteessa) nojalla, funktio cosh on aidosti kasvava välillä $[0, \infty)$ ja siten

$$\cosh x > \cosh 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = 1 \quad \text{jokaisella } x > 0.$$

K6. Johda funktion $\sinh x$ käänteisfunktiolle logaritmilauseke ja derivointikaava. Tutki monistetta sivuilta 84 ja 85.

Ratkaisu: Seuraamalla luentomonisteen esimerkkiä sivulta 84 saadaan funktion $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ käänteisfuktiolle johdettua logaritmilauseke. Merkitään

$$y = \operatorname{ar} \sinh x,$$

jolloin

$$\begin{aligned}
& x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 2x = e^y - e^{-y} \\
\Leftrightarrow\ & e^y - 2x - e^{-y} = 0 \ \Big| \cdot e^y \\
\Leftrightarrow\ & (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \\
\Rightarrow\ & e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} \\
\Rightarrow\ & e^y = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} \\
\Rightarrow\ & e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Koska $e^y > 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$, niin ratkaisu, jossa juurilausekkeen edessä on miinusmerkki, ei kelpaa. Näin ollen

$$\begin{aligned}
& e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\
\Leftrightarrow\ & y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\
\Leftrightarrow\ & \operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).
\end{aligned}$$

Johdetaan nyt derivointikaava ketjusäännön avulla (Lause 7.3.):

$$\begin{aligned}
D(\operatorname{ar}\sinh x) &= D(\ln(x + \sqrt{x^2+1})) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot D(x + \sqrt{x^2+1}) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

K7. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla $x > 0$ pätee

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

(Tehtävä on ensimmäinen askel kohti jännittävämpää havaintoa. Mikäli mahdollista, kannattaa tarkastella graafisella laskimella piirrettyjä funktioiden $\cos x$ ja $2 - \cosh x$ kuvaajia välillä $[-1, 1]$. Näet jotain, mikä vaatii selitystä. Selitystä voi antaa tällä kurssilla väliarvolauseen avulla. Mutta luontevampi selvyys asiaan tulee kurssilla analyysi II Taylorin polynomien yhteydessä.)

Ratkaisu: Oletetaan, että $x > 0$. Määrittelemme funktion

$$f\colon [0, x] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \cos t - (2 - \cosh t) = \cos t + \cosh t - 2.$$

Sovelletaan väliarvolausetta: Sen nojalla on olemassa ainakin yksi sellainen piste $\xi \in]0, x[$, että

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0).$$

Osoitetaan, että derivaatta $f'(t)$ on positiivinen, kun $t > 0$. Tästä nimittäin seuraa välittömästi, yllä olevan nojalla, että

$$f'(x) > f(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x - (2 - \cosh x) > \cos 0 - (2 - \cosh 0) = 1 - (2 - 1) = 0,$$

mikä pitikin osoittaa.

Siispä tutkitaan funktion f derivaattaa. Funktio f on määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva ja

$$f'(t) = -\sin t + \sinh t, \quad t \in [0, x].$$

Nyt ei pysty päättelemään suoraan, että derivaatta olisi positiivinen, kun $t > 0$. Tutkimalla funktion f toista derivaattaa voidaan kuitenkin osoittaa, että f' on aidosti kasvava: f' on määrittelyjoukossaan jatkuva ja derivoituva ja

$$f''(t) = -\cos t + \cosh t, \quad t \in [0, x].$$

Havaitaan, että $f''(t) \geq 0$ jokaisella $t \in [0, x]$ ja yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun $t = 0$. Tämä seuraa siitä, että $-1 \leq \cos t \leq 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $\cosh t > 1$ jokaisella $t > 0$, kuten aiemmin osoitettiin. Aidon kasvavuuden lauseen nojalla, f' on aidosti kasvava välillä $[0, x]$. Siten $f'(t) > f'(0) = -\sin 0 + \sinh 0 = 0$ jokaisella $0 < t \leq x$. Väite seuraa nyt väliarvolauseesta, kuten yllä osoitettiin.

Huomautus: Voisimme väliarvolauseen sijasta soveltaa aidon kasvavuuden lausetta uudelleen ja todeta, että myös f on aidosti kasvava välillä $[0, x]$ ja siten $f(x) > f(0) = \cos 0 + \cosh 0 - 2 = 0$.

K8. Johda yhtälö

$$D\text{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

kun $x > 1$. Tutki monisteen sivuja 84 ja 85!

Ratkaisu: Huomataan, että monisteessa sivulla 84 on johdettu lauseke area hyperboliselle kosinille:
Kaikilla $x \geq 1$ pätee

$$\text{ar cosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Johdetaan kysytty yhtälö suoraan derivoimalla käänteisfunktioita soveltamalla derivoinnin ketjusääntöä (Lause 7.3.):

$$\begin{aligned}
D(\text{ar cosh}x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.
\end{aligned}$$