MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ex tempore tehtävät ja kotitehtävät 10
Ratkaisuehdotuksia (Joni Luhtalampi ja Lauri Sankari)
21.11.2011 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa käsitellään funktion derivoituvuuteen liittyviä kysymyksiä. Näissä harjoituksissa saa käyttää kaikkia koulusta tuttujen funktioiden kuten trigonometristen funktioiden jne. koulusta tuttuja ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja derivointisääntöä.

KOTITEHTÄVÄT

K1. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x|x|$. Millä x on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

Ratkaisu: Ensimmäisen derivaatan kohdalle on kolme eri tapausta, $x < 0$, $x < 0$ ja $x = 0$.

Kun $x < 0$, niin $f(x) = x|x| = x(-x) = -x^2$, joten $f'(x) = -2x = 2|x|$.

Kun $x > 0$, niin $f(x) = x|x| = xx = x^2$, joten $f'(x) = 2x = 2|x|$.

Kun $x = 0$, tutkitaan erotusosamäärän raja-arvoa. Tarkastelemalla funktion f erotusosamäärää kohdassa $x = 0$ saadaan:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{x|x| - 0|0|}{x - 0} \\ &= \frac{\cancel{x}|x|}{\cancel{x}} \\ &= |x|. \end{aligned}$$

Tämän havainnon perusteella

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = |x| \to 0, \text{ kun } x \to 0,$$

tai siis $f'(0) = 0 = 2|0|$.

Siis $f'(x) = 2|x|$.

Tutkitaan seuraavaksi toista derivaattaa, samoissa kolmessa eri tapauksessa.

Kun $x < 0$, niin $f'(x) = -2x$, jolloin $f''(x) = -2$.

Kun $x > 0$, niin $f'(x) = 2x$, jolloin $f''(x) = 2$.

Kun $x = 0$, tutkitaan taas erotusosamäärän raja-arvoa. Tällä kertaa erotusosamäärä voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\begin{aligned}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \frac{2|x| - 2|0|}{x} \\ &= \frac{2|x|}{x}.\end{aligned}$$

Nyt jos x lähestyy nollaa vasemmalta, on $|x| = -x$, jolloin erotusosamäärä lähenee lukua -2, mutta jos x lähenee nollaa oikealta, on $|x| = x$, jolloin erotusosamäärä lähenee lukua 2. Eli:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}} &= \lim_{x\to 0-} -2 \\ &= -2 \\ &< 2 = \lim_{x\to 0+} 2 \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}\end{aligned}$$

Toisin sanoen $f''(0)$ ei ole olemassa.

Kolmatta derivaattaa $f'''(x) = f^{(3)}(x)$ voidaan tutkia ainoastaan, kun $x \neq 0$, sillä kuvausta f'' ei ole määritelty nollassa.

Kun $x < 0$, on $f''(x) = -2$, jolloin $f'''(x) = 0$.

Kun $x > 0$, on $f''(x) = 2$, jolloin $f'''(x) = 0$.

Kolmas derivaatta on siis vakiofunktio nolla *aina, kun se on määritelty*, eli kun $x > 0$ tai $x < 0$.

K2. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = \sqrt{x}$ kun $x \geq 0$ ja $f(x) = -\sqrt{-x}$ kun $x < 0$. Missä f on derivoituva?

Ratkaisu. Tutkitaan kolmea eri tapausta $x > 0$, $x < 0$ ja $x = 0$.

Kun $x > 0$, käänteisfunktion derivointisäännöillä saadaan $f'(x) = D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Kun $x < 0$, kyseessä on yhdistetty funktio, jossa ulkofunktiona on $-\sqrt{x}$ ja sisäfunktiona $-x$. Derivaataksi saadaan tällöin $f'(x) = D(-\sqrt{-x}) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}(-1) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$.

Tutkitaan erotusosamäärän raja-arvoa, kun $x \to 0^+$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$$

Koska oikeanpuoleista raja-arvoa ei ole olemassa, ei erotusosamäärän raja-arvoakaan ole. Siis funktio f ei ole derivoituva nollassa.

Näin ollen funktio f on derivoituva, kun $x \neq 0$.

K3. Derivoi
(a) $\sin^3 x^4$;
(b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;
(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4)+1}$.

Ratkaisu. Tämä tehtävä on lähinnä ketjusäännön hyödyntämistä ja mekaanista laskua, jossa tulee helposti huolimattomuusvirheitä. Laskemiseen kannattaa siis kiinnittää paljon huomiota. Lisäksi kannattaa huomata, että edellisiä kohtia esiintyy sisäfunktioina sekä (b)- että (c)-kohdissa.

(a) $\sin^3 x^4 = (\sin x^4)^3$:

$$\begin{aligned} D\left(\sin x^4\right)^3 &= 3\left(\sin x^4\right)^2\left(D\sin x^4\right) \\ &= 3\left(\sin x^4\right)^2\left((\cos x^4)(Dx^4)\right) \\ &= 3\left(\sin x^4\right)^2\left((\cos x^4)(4x^3)\right) \\ &= 12\left(\left(\sin^2 x^4\right)(\cos x^4)x^3\right). \end{aligned}$$

(b) $\sin^2(\sin^3 x^4) = \left(\sin(\sin^3 x^4)\right)^2$:

$$\begin{aligned} D\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)^2 &= 2\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(D\sin(\sin^3 x^4)\right) \\ &= 2\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(\cos(\sin^3 x^4)\right)\overbrace{\left(D\sin^3 x^4\right)}^{(a)-\text{kohta}} \\ &= 24\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(\cos(\sin^3 x^4)\right)\left(\sin^2 x^4\right)(\cos x^4)x^3 \end{aligned}$$

(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4)+1}$:

$$\begin{aligned} D\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4)+1} &= \frac{1}{2}\left(\left(\sin^2(\sin^3 x^4)+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\overbrace{\left(D\sin^2(\sin^3 x^4)\right)}^{(b)-\text{kohta}} \\ &= 12\frac{\left(\sin(\sin^3 x^4)\right)\left(\cos(\sin^3 x^4)\right)\left(\sin^2 x^4\right)(\cos x^4)x^3}{\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4)+1}} \end{aligned}$$

K4. Oletetaan, että $f'(1) = 4$. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Vihje: täydennä tutkittava lauseke muotoon, missä esiintyvät erotusosamäärän muodot

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{ja} \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} &= \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{h} \\
&= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \frac{f(1) - f(1-2h)}{h} \\
&= \frac{(f(1+h) - f(1))}{h} - \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} \\
&= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + 2\frac{f(1-2h) - f(1)}{2-h}
\end{aligned}$$

Nyt oletuksen nojalla $f'(1) = 4$, joten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 4,$$

ja

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} = 4,$$

joten luentomonisteen lauseen 5.4 perusteella

$$\lim_{h\to 0} 2\frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} = \left(\lim_{h\to 0} 2\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}\right) = 8.$$

Lopulta saadaan siis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h} + 2\frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \left(2\frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}\right) \\
&= 4 + 8 = 12.
\end{aligned}$$

K5. Tarkastellaan funktiota $f :]0,64[\to]0,12[$, jolle pätee $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ kaikilla $x \in]0,64[$. Miksi sillä on aidosti kasvava (jatkuva) ja derivoituva käänteisfunktio $g :]0,12[\to]0,64[$? Määritä $g'(2)$.

Ratkaisu: Luentojen lauseen nojalla tiedetään, että aidosti kasvavilla, jatkuvilla, välillä määritellyillä funktioilla on aidosti kasvava, jatkuva käänteisfunktio. Lisäksi lauseen 7.4 perusteella käänteiskuvaus on derivoituva, jos alkuperäinen funktio on derivoituva ja derivaatta eroaa kaikkialla nollasta.

Kuvaus f on helpointa nähdä jatkuvaksi, aidosti kasvavaksi funktioksi kahden juurifunktion summana, sillä juurifunktiot ovat (ainakin välillä $[0,\infty)$) muotoa $x \mapsto x^n$ olevien funktioiden käänteisfunktioita. Kyseiset potenssifunktiot tiedetään aikaisemman perusteella aidosti kasvaviksi ja jatkuviksi.

Siis, funktiot $x \mapsto x^2$ ja $x \mapsto x^3$ ovat aidosti kasvavia välillä $[0,\infty)$. Tällöin kummallekin funktiolle löytyy aidosti kasvava käänteisfunktio, ja näiden käänteisfunktioden summa ($\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$) on aidosti kasvava, jatkuva välillä $[0,\infty)$. Siten erityisesti $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ on jatkuva, aidosti kasvava välillä $(0,64)$, joten f on jatkuva, aidosti kasvava. Siten sillä on jatkuva, aidosti kasvava käänteisfunktio $g : f(0,64) \to (0,64)$.

Tarkistetaan vielä, että funktion f arvojoukko todella on $(0,12)$. Tämä osoitetaan helpoiten Bolzanon lauseen avulla. Huomataan, että $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ ja $\lim_{x\to 64-} f(x) = 12$. Koska f on aidosti kasvava, funktio ei saa missään arvoja suurempia kuin 12 tai pienempiä kuin 0. Olkoon sitten $y \in (0,12)$; tarkoituksena on osoittaa, että löytyy $x \in (0,64)$, jolle $f(x) = y$.

Valitaan $\varepsilon = \min\{y, 64 - y\}$. Nyt löytyy luvut $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, joille $|f(x) - 0| < \varepsilon$, kun $0 < x < 2\delta_1$, ja $|f(x) - 12| < \varepsilon$, kun $64 - 2\delta_2 < x < 64$. Erityisesti siis $f(\delta_1) < y$ ja $f(64 - \delta_2) > y$, joten Bolzanon lauseen nojalla löytyy $x \in (\delta_1, 64 - \delta_2)$, jolle $f(x) = y$.

Siis käänteiskuvaus on määritelty tasan välillä $(0,12)$.

Derivoituvuuden tarkastelu aloitetaan samaan tapaan potenssifunktioista. Funktioiden

$$
\begin{aligned}
&h_1\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad h_1(x) = x^2 \text{ ja} \\
&h_2\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad h_2(x) = x^3
\end{aligned}
$$

derivaattafunktiot ovat $h_1'(x) = 2x$ ja $h_2'(x) = 3x^2$ ja kummatkin siis erityisesti aidosti positiivisia määrittelyjoukossaan $(0,\infty)$. Siten niiden käänteisfunktiot h_1^{-1} ja h_2^{-1} ovat derivoituvia, kuten myöskin käänteisfunktioiden summa ja siten myös funktio f. Lisäksi kaikkien derivaatat ovat annetulla välillä aidosti positiivisia. Siis $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]0, 64[$, joten lauseen 7.4 nojalla funktio g on derivoituva, ja koska $f(1) = \sqrt{1} + \sqrt[3]{1} = 2$, niin

$$g'(2) = g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}.$$

Täytyy siis vain laskea funktion f derivaatta kohdassa 1. Tätä varten riittää laskea edellä mainittujen potenssifunktioiden derivaatat kohdassa 1, sillä edelleen lauseen 7.4 avulla saadaan

$$\left(h_1^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{h_1'(h_1^{-1}(1))} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

ja

$$\left(h_2^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{h_2'(h_2^{-1}(1))} = \frac{1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}.$$

Siis

$$f'(1) = \left(h_1^{-1}\right)'(1) + \left(h_2^{-1}\right)'(1) = \frac{5}{6},$$

jolloin saadaan

$$g'(2) = g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{6}{5}.$$

K6. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^2$. Tulkitse yhtälö

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

karakterisaatiolauseen avulla. Mikä on tässä $f(a)$, mikä $f'(a)h$ ja mikä $h\,\varepsilon(h)$? Voidaanko funktion derivaatta kohdassa $x = a$ nähdä suoraan kyseisestä yhtälöstä?

Ratkaisu. Karakterisaatiolauseen mukaan funktio f on derivoituva pisteessä x aina ja vain kun funktion f lisäys voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \varepsilon(h)h,$$

missä $\varepsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$.

Etsitään tehtävän yhtälöstä karakterisaatiolauseen vastaavuudet. Huomataan, että $h \to 0$, kun $h \to 0$, joten $\varepsilon(h)h = h^2$.Koska $f(x) = x^2$, niin $f(a+h) = (a+h)^2$ ja $f(a) = a^2$. Lisäksi $f'(x) = 2x$, joten $f'(a)h = 2ah$. Lausekkeesta nähdään siis suoraan, että $f'(a) = 2a$.

K7. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^5$. Tulkitse yhtälö

$$(a+h)^5 = a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$$

karakterisaatiolauseen avulla. Mikä on tässä $f(a)$, mikä $f'(a)h$ ja mikä $h\,\varepsilon(h)$? Voidaanko funktion derivaatta kohdassa $x = a$ nähdä suoraan kyseisestä yhtälöstä?

Ratkaisu. Etsitään annetusta yhtälöstä karakterisaatiolauseen yhtälöä vastaavat kohdat. Huomataan, että termissä $f(x+h)$ ei pitäisi esiintyä lukua h kertoimena ja termissä $f(x)$ ei pitäisi olla lukua h laisinkaan. Termiksi $f'(x)h$ kelpaa jokin, jossa on kertoimena pelkkä h ja viimein termiksi $\varepsilon(h)h$ kelpaa jotain, jossa on luku h kertoimena, mieluiten korkeammassa potenssissa.

$$\underbrace{(a+h)^5}_{f(a+h)} = \underbrace{a^5}_{f(a)} + \underbrace{5a^4h}_{f'(a)h} + \underbrace{10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5}_{\varepsilon(h)h}$$

Karakterisaatiolauseen perusteella siis $f'(a) = 5a^4$.

K8. Oletetaan, että $p > 0$. Osoita, että yhtälöllä $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta. Vihje: Merkitse yhtälön vasen puoli $= f(x)$. Osoita ensin toisen derivaatan avulla, että f' on aidosti kasvava. Sovella sitten Rollen lausetta yhtälön peräkkäisten juurten välissä.

Ratkaisu. Toimitaan vihjeen mukaisesti. Olkoon siis:

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

Tutkitaan nyt funktion ensimmäistä ja toista derivaattaa:

$$f'(x) = 4x^3 + 2px + q$$

$$f''(x) = 12\underbrace{x^2}_{\geq 0} + p \geq 0 + p = p > 0$$

Nyt siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee, että $f''(x) > 0$, joten lauseen 8.6. perusteella kuvaus f' on aidosti kasvava. Koska f' on aidosti kasvava, on sillä enintään yksi nollakohta. Soveltamalla Rollen lausetta huomaamme, että mikäli luvut a ja b ovat kuvauksen f nollakohtia, eli $f(a) = f(b) = 0$, niin Rollen lauseen mukaan löytyy piste $y \in]a, b[$ siten, että $f'(y) = 0$.

Juuria voi siis olla kuvauksella f enintään kaksi, sillä mikäli löytyisivät juuret $a < b < c$, niin derivaatalle löytyisi nollakohta sekä väliltä $]a, b[$ että väliltä $]b, c[$. Tämä taas olisi ristiriidassa derivaattafunktion aidon kasvamisen kanssa.