INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
ExTempore uppgifter 4
För veckan som börjar 5.10.2011

Denna vecka övar vi på använding av egenskaperna som gränsvärden för talföljder har. Vi bekantar oss även med supremum och infinum.

E1. Använd sats 4.7 för att utreda:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+2n}$$

Kom ihåg satsens ”om A, så gäller B” -uppbyggnad! I uppgiften får konstanta följdens gränsvärde och faktumet att $\frac{1}{n} \to 0$ när $n \to \infty$ anses vara känt.

E2. Utred gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+7}{(n+2)(n+4)}$$

E3. Utred gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+7}{(n^2+2)(n+4)}$$

E4. Bestäm supremum och infimum för mängden

$$S = \{\frac{n-1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

Har mängden ett största eller ett misnta element?

E5. Vi antar att följden (x_n) kovergerar. Visa att det existerar ett $M > 0$ och ett K, så att för alla $n > K$ gäller $|x_n| \leq M$. (Det går även att bli av med K.)

E6. Vi antar att

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

och att $a \neq 0$. Visa att det existerar ett heltal K, så att för alla $n > K$ gäller $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$. Uppgiften är speciellt ”genomskinlig”, ifall fallen där $a < 0$ och $a > 0$ betraktas skillt. Rita en bild av båda fallen.

E7. Vi betraktar talföljden (x_n), där $x_1 = 1$ och $x_{n+1} = 2x_n + 1$. (a) Vi försöker forma ett ”potentiellt”gränsvärde för följden genom att sätta in x i rekursionsformeln. Forma denna ekvation, har den en lösning? (b) Konvergerar följden?

E8. Induktion... Vad vet ni? Vad vill ni veta? Visa att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$