INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 7
Veckan som börjar 31.10.2011

Välkomna till andra perioden av kursen. Som en skillnad till första perioden har vi varje vecka 4 ex tempore -uppgifter, som det är avsikt att behandla parallellt med hemuppgifterna (ifall det finns tid). Hemuppgifterna är fortfarande 8 st, men nu är avsikten att dela dem 4 + 4 mellan början och slutet av veckan.

Denna vecka påminner vi oss gränsvärdesbegreppet för funktioner. Vi erinrar oss också att kontinuiteten och derivatan är kända exempel på gränsvärden från första perioden.

Obs. I princip är derivatan och dess mekaniska användning kanske kända från gymnasiets (långa) matematik. Avsikten är dock att under kursens andra period systematiskt behandla derivatans egenskaper och dess viktiga tillämpningar.

K1. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att påståendet

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

gäller.

K2. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att påståendet

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = 1$$

inte gäller.

K3. Definiera funktionen $f :]1,4[\to \mathbb{R}$ med villkoret

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}.$$

Visa med hjälp av definitionerna av gränsvärdet och derivatan för en funktion att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 3$ och att $f'(3) = -\frac{1}{49}$.

K4. Visa med hjälp av definitionerna av gränsvärdet och kontinuiteten för en funktion att funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är kontinuerlig i punkten $x = 16$.

K5. Visa med hjälp av definitionerna av gränsvärdet och derivatan för en funktion att funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är deriverbar i punkten $x = 16$ och att $f'(16) = 1/8$.

K6. Anta att $h > 0$ och att funktionen f är definierad för alla $x \in]x_0-h, x_0+h[$ och att $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, där $b \neq 0$. Visa att det finns ett sådant $\delta > 0$ att för alla $x \neq x_0$ gäller: om $|x - x_0| < \delta$, så är $\frac{1}{2}|b| < |f(x)| < \frac{3}{2}|b|$. Tips: det kan hjälpa att separat betrakta fallen $b < 0$ och $b > 0$. (Du kan också försöka använda ”den vänstra sidan i triangelolikheten”.)

K7. Anta att funktionen g satisfierar för varje $x \in]-1, 1[$ olikheten $|g(x)| < 7$. Visa att funktionen $f(x) = x^2 g(x)$ är deriverbar i punkten $x = 0$ och att $f'(0) = 0$. Tips: studera djärvt avståndet mellan differenskvoten $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ och talet 0.

(Notera att vi kan exempelvis ha $g(x) = 0$ då x är ett rationellt tal och $g(x) = 1$ då x är irrationellt. En funktion kan alltså enligt uppgiften vara deriverbar i en punkt och diskontinuerlig i alla övriga punkter.)

K8. Definiera

$$g(x) = \frac{7}{x^{66} + 3x^{44} + 5x^{22} + 7}$$

samt funktionen f med ekvationen $f(x) = xg(x)$.

(a) Är funktionen f kontinuerlig i punkten $x = 0$?

(b) Formulera resultatet i (a)-delen som en allmän sats samt bevisa denna. Tips: ta modell av uppgift K7.