INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 5
Veckan som börjar 10.10.2011

Denna vecka övar vi talföljder som växer eller avtar obegränsat (dvs. divergerar mot ∞ eller $-\infty$) samt börjar studera gränsvärdesbegreppet för en funktion.

K1. Visa att
$$\lim_{n\to\infty}(2n+3)=\infty.$$

K2. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$. Kan du tolka detta som ett faktum som kontinuiteten av en viss funktion? I så fall för vilken funktion och i vilken punkt?

K3. Visa att $5^n \geq 1+4n$ då $n = 1, 2, 3, \ldots$.

K4. Visa att
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{3n+4}=\infty.$$

K5. Bestäm
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{7n})^n$$
med hjälp av definitionen av talet e. I uppgiften får du använda följande faktum: om $x_n \to a$ då $n \to \infty$, så gäller att $\sqrt[7]{x_n} \to \sqrt[7]{a}$.

K6. Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet för en funktion att
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}.$$
Kan resultatet tolkas som deriverbarhet av en viss funktion? I så fall för vilken funktion och i vilken punkt?

K7. Visa att
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=\infty.$$

K8. Anta att $x_n \to \infty$ och $y_n \to a \in \mathbb{R}$ då $n \to \infty$.

(a) Anta att $a > 0$. Visa att $x_n y_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Tips: $y_n > \frac{a}{2}$ alltid då n är tillräckligt stort. (Resultatet formuleras ofta som regeln $a \cdot \infty = \infty$ då $a > 0$.)

(b) Anta att $a < 0$. Visa att $x_n y_n \to -\infty$ då $n \to \infty$. (Resultatet formuleras ofta som regeln $a \cdot \infty = -\infty$ då $a < 0$.)

(c) Finns det någon (gränsvärdes)regel $0 \cdot \infty = \ldots$?