INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 4
Veckan som börjar 3.10.2011

Denna vecka övar vi egenskaper hos gränsvärdet av talföljder och bekantar oss med användningen av supremum och infimum.

K1. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n-2}$$

med hjälp av Sats 4.7. Kom ihåg att satsen har formen ”om, så”. I uppgiften får man känna till gränsvärdet av konstanta talföljder samt att $\frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$.

K2. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n^2-2n)}{(n+1)(n^2+2)}.$$

K3. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2-1)(n^2-2n)}{(n^2+2)(n^3+3)}.$$

K4. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+n} - 2n) = \frac{1}{4}.$$

(Obs: Man får i detta skede inte hänvisa till kontinuiteten av kvadratroten.)

K5. Anta att talföljden (x_n) konvergerar. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x_n = 0.$$

Tips: kom ihåg att en konvergerande talföljd alltid är begränsad.

K6. Anta att talföljden (x_n) är avtagande, följden (y_n) är växande, och att för alla n gäller $y_n \leq x_n$. Visa att båda följderna konvergerar samt att $\lim_n y_n \leq \lim_n x_n$.

K7. Visa att det reella talet $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$ existerar och att $a^2 = 5$.

K8. Modifiera exemplet från föreläsningarna och visa att gränsvärdet till följden (x_n) är $\sqrt{5}$, om $x_1 = 3$ och för alla n gäller att

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}).$$

Observera att du bör visa i uppgiften att ovanstående följd konvergerar. Extrafrågor (behövs inte för att kryssa uppgiften): (a) Kan du förklara varför följden förefaller att konvergera snabbt? (b) Kan du ge exempel på ett index n för vilken $|x_n - \sqrt{5}| < 10^{-100}$?