INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 2
Veckan som börjar 19.9.2011

Obs: i några uppgifter har man nytta av formlerna $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ etc. (Dessa kan verifieras genom att multiplicera ut de högra sidorna.)

Denna vecka övar vi definitionen av absolutbelopp och dess användning i uppskattningar.

K1. Motivera med hjälp av den exakta definitionen av absolutbeloppet att
(a) $|x| \geq 0$;
(b) $|x| = |-x|$;
(c) $|xy| = |x||y|$. (Vardera av talen kan vara $< 0$, $= 0$ eller $> 0$ oberoende av det andra talet. Gå igenom alla 9 fallen.)

K2. Anta att $|x - \sqrt{2}| < 2^{-1000}$ och $|y - \sqrt[3]{3}| < 2^{-1000}$. Vilken slutsats kan du dra på basen av triangelolikheten om avståndet $|(x+y) - (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})|$ mellan summorna?

K3. Anta att $|x - 5| < 4^{-4444}$. Gäller det nödvändigtvis att $|x^2 - 25| < 4^{-4442}$? I uppgiften lönar det sig att uppskatta uttrycket $|x^2 - 9|$ uppåt på intervallet $]2, 4[$.

K4. Sök ett tal $K > 0$, så att för varje punkt $x$ i intervallet $]1, 3[$ gäller att

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| \leq K|x-2|.$$

Det lönar sig att beräkna skillnaden av talen innanför absolutbeloppet samt att uppskatta detta uppåt så att du kommer till formen ”konstant $\cdot|x-2|$”.

K5. Anta att $|x - 2| < 10^{-1000}$. Gäller det att

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| < 10^{-1001}?$$

Det lönar sig att tillämpa resultatet från uppgift K4!

K6. Sök ett sådant tal $h > 0$, att

$$\left| \frac{x+1}{2x+3} - \frac{3}{7} \right| < 7777^{-7777}$$

alltid då $|x-2| < h$. Det lönar sig att tillämpa resultatet från uppgift K4!

K7. Gäller för alla $x \geq 0$ att $|\sqrt{x} - 3| \leq \frac{1}{3}|x-9|$? Obs: $3 = \sqrt{9}$.

K8. Gäller för alla $x \geq 0$ att $|\sqrt[3]{x} - 2| \leq \frac{1}{4}|x-8|$? Obs: $2 = \sqrt[3]{8}$. Man har nytta av ovanstående allmänna formler för att behandla uttrycket $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{8}$.