INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 9
Veckan som börjar 14.11.2011

Uppgifterna behandlar frågor som berör kontinuitet av funktioner.

K1.Visa att
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$$
är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$.

K2. Definiera funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoret $f(x) = x^{77} + x^{33} + 22$. Visa med hjälp av Bolzanos sats att det finns $x \in \,]0, 1[$ för vilken gäller att $f(x) = 23$.

K3. Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ från föregående uppgift. Visa att $f(x) \to -\infty$ kun $x \to -\infty$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Visa på basen av dessa observationer att det finns $x \in \mathbb{R}$ för vilken $f(x) = 777$.

K4. Låt f vara funktionen från uppgift 2. Definiera
$$g(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1}.$$
Visa att det finns ett minsta tal bland de värden som funktionen g antar.

K5. Anta att funktionen $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $]0, \infty[$. Definiera $g(x) = f(x^2 + 1)$. Är denna funktion g kontinuerlig i hela mängden $\mathbb{R}$?

K6. Visa att den funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som defineras av ekvationen $f(x) = x+x^3$ har en invers funktion $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

K7. Vi betraktar den funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ som definieras av uttrycket i uppgift 2. Visa att f har en strängt växande kontinuerlig invers funktion.

K8. Anta att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Anta att $f(1) < f(3)$ och $f(2) > f(4)$. Visa att det finns två olika reella tal x och y, för vilka $f(x) = f(y)$. (Denna uppgift utgör ett specialfall från argumentet för resultatet, att en kontinuerlig injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är nödvändigtvis endera strängt växande eller avtagande i $\mathbb{R}$!)