INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 8
Veckan som börjar 7.11.2011

I dessa uppgifter behandlar vi ännu frågor som berör olika typer av gränsvärden för funktioner.

K1. Bestäm

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 + x^2 + x}{x^2 + 7}$$

med hjälp av Sats 5.4 (algebraiska räkneregler för gränsvärdet).

K2. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 1}{7x^3 + 1} = \frac{1}{7}.$$

K3. Visa med hjälp av definitionen att

$$\lim_{x\to 3+} \frac{5 + x}{3 - x} = -\infty.$$

K4. Anta att funktionen $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ satisfierar för varje $n = 0, 1, 2, \ldots$ villkoren $f(x) = x - 2n$ då $2n \le x \le 2n + 1$ och $f(x) = 2n + 2 - x$ då $2n + 1 < x < 2n + 2$. Rita grafen av funktionen. Undersök om gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

existerar.

K5. Anta att $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ är växande och att $a < c < b$. Visa att

$$\lim_{x\to c-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c+} f(x).$$

K6. Anta att $f(x) \to a$ och $g(x) \to b$ då $x \to \infty$. Visa att $f(x)+g(x) \to a+b$ då $x \to \infty$. [Detta är en algebraisk räkneregel för gränsvärdet i ∞.]

K7. Anta att $f :]-4, 6[\to \mathbb{R}$ satisfierar villkoren $f(5) = 2$ och $f'(5) = 3$. Visa att det finns ett sådant $\delta > 0$ att för varje x gäller: om $5 < x < 5 + \delta$, så är

$$(3 - \frac{1}{7})(x - 5) < f(x) - 2 < (3 + \frac{1}{7})(x - 5).$$

(Det lönar sig att tillämpa definitionen av gränsvärdet på differenskvoten $E(x) = \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$. Då $|x|$ är tillräckligt liten (och $x \neq 0$), så gäller $|E(x) - 3| < \frac{1}{7}$ ... Det lönar sig att rita en bild!)

K8. I föregående uppgift betraktade vi värdena $x > 5$. Formulera och bevisa ett motsvarande påstående som gäller för $x < 5$. (I denna uppgift och i uppgiften K7 har talet $\frac{1}{7}$ en speciell ställning. Finns det något faktum om positiva tal som ligger bakom detta?)