INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemuppgifter 12
Veckan som börjar 5.12.2011

I dessa övningar behandlar vi de elementära funktionerna från kapitel 9. Samtidigt kommer mycket av det vi lärt oss under hösten till användning. (Derivatan av logaritmfunktionen finns på sidan 80.)

K1. Visa på basen av definitionen av roten samt räknereglerna för potenser (med heltal som exponenter) att om $x > 0$ så gäller

(a)
$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m;$$

(b)
$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}.$$

K2. Bestäm
$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(\frac{1}{t})}{1-t}.$$
Du kan notera att ovanstående uttryck är en differenskvot. Du kan också använda den enklaste formen av l'Hospitals regel från sidan 62 (som i själva verket är samma sak).

K3. Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoret

$$f(x) = \log(x^2 + 1).$$

Var är funktionen f konvex?

K4. Visa att för varje $x \geq 0$ gäller att $e^x \geq 1 + x$. Tips: undersök skillnaden. Medelvärdessatsen hjälper. (Om det finns tid kan du fortsätta med följande påstående: för alla $x \geq 0$ gäller $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.)

K5. Betrakta funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x + \sin x$ och $g(x) = \frac{x}{2} + \sin x$. Bestäm de lokala extremvärdena till dessa funktioner.

K6. Härled logaritmuttrycket för den inversa funktionen till $\sinh x$ och motsvarande deriveringsformeln. (Undersök sidorna 84 och 85 i kompendiet.)

K7. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för varje $x > 0$ gäller att

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

(Uppgiften utgör första steget mot en mera spännande observation. Ifall möjligt, betrakta graferna till funktionerna $\cos x$ och $2 - \cosh x$ med en grafisk kalkylator på intervallet $[-1, 1]$. Du ser något som kräver förklaring. Detta kan förklaras på Analys I på basen av medelvärdessatsen, men en naturligare förklaring kommer i samband med Taylor polynom på Analys II.)

K8. Härled ekvationen

$$D\text{ar cosh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

då $x > 1$. (Studera sidorna 84 och 85 i kompendiet!)

EXTRA UPPVÄRMINGSUPPGIFTER (för fria övningar)

L1. Derivera $x^{\frac{2}{3}}$

(a) genom att tolka funktionen som en sammansatt funktion samt använda deriveringsreglerna för en heltalspotens och dess inversa funktion.

(b) genom att tillämpa potensens deriveringsregel på bråktalspotenser.

L2. Var är funktionen $\sin x$ konvex?

L3. Skissera i samma bild graferna till uttryckena e^x, e^{-x} och $-e^{-x}$. Observera ”speglingar”. Skissera på basen av detta graferna till de hyperboliska funktionerna sinh och cosh.

L4. Beräkna $f'(2)$ då $f(x) = \text{arsinh}\, x$ för alla x.