INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 11
Veckan som börjar 28.11.2011

I dessa övningar behandlas frågor som hör till kapitel 8 i kompendiet: medelvärdessatsen och tillämpningar. I dessa uppgifter får du använda kända egenskaper från skolan som berör kontinuitet och derivering av exempelvis de trigonometriska funktionerna. Några av uppgifterna påminner om skoluppgifter: motivera dock dina lösningar med hjälp av satser från denna kurs.

K1. Anta att funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$ och deriverbar i intervallet $]0, 1[$. Anta att $f(0) = 3$ samt att för varje $x \in \,]0, 1[$ gäller att $-1 < f'(x) < 2$. Vad vet man på basen av detta om $f(1)$?

K2. Anta att funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$ och deriverbar i intervallet $]0, 1[$. Anta att $f(1) = 3$ samt att för varje $x \in \,]0, 1[$ gäller att $-1 < f'(x) < 2$. Vad vet man på basen av detta om $f(0)$?

K3. Anta att funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$ och deriverbar i intervallet $]0, 1[$. Anta att $f(0) = 3$ samt att för varje $x \in \,]0, 1[$ gäller att $f'(x) < x$. Vad vet man på basen av detta om $f(1)$? Tips: hjälpfunktionen $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$ är användbar: det lönar sig att visa att för varje $x \in]0, 1[$ gäller $g'(x) > 0$.

K4. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $]x_0 - h, x_0 + h[$ och deriverbar i intervallen $]x_0 - h, x_0[$ och $]x_0, x_0 + h[$. Anta dessutom att $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Visa att f är deriverbar i punkten x_0 och att $f'(x_0) = A$. Tips: tillämpa medelvärdessatsen på differenskvoten.

K5. Anta att $a_1, \ldots, a_n$ är givna reella tal. För vilket x antar motsvarande s.k. kvadratiska summa $(x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ sitt minsta möjliga värde?

K6. Anta att funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0, 1]$ och deriverbar i intervallet $]0, 1[$. Anta att $f(0) = 3$ joch att för varje $x \in \,]0, 1[$ gäller $f'(x) > x^2$. Vad vet man på basen av detta om $f(1)$? Tips: hjälpfunktionen $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$ är användbar: det lönar sig att visa att för varje $x \in]0,1[$ gäller $g'(x) > 0$.

K7. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för varje x gäller $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Kom ihåg att $\cos 0 = 1$.)

K8. Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ och deriverbar i intervallet $]a,b[$ samt att $\mathrm{C} > 0$.

(a) Anta att för varje $x \in]a,b[$ gäller att $|f'(x)| \leq C$. Visa att för varje $x, t \in [a,b]$ gäller att $|f(x) - f(t)| \leq C|x-t|$.

(b) Anta att för varje $x, t \in [a,b]$ gäller att $|f(x) - f(t)| \leq C|x-t|$. Är f nödvändigtvis deriverbar i intervallet $]a,b[$?

(c) Anta att för varje $x, t \in [a,b]$ gäller att

$$|f(x) - f(t)| \leq C|x-t| \sqrt[42]{|x-t|} \ (= C|x-t|^{\frac{43}{42}}).$$

Visa att f är en konstant funktion. Det lönar sig att studera differenskvoten. (Vad är det väsentliga hos exponenten $\frac{43}{42}$? Bråktalspotenserna kommer snart att definieras som en sammansatt funktion av heltals- och rotfunktionerna. Detta som en liten tjuvstart.)

EXTRA UPPVÄRMINGSUPPGIFTER (för fri övning)

L1. Betrakta funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som defineras av ekvationen $f(x) = x^2$. Bestäm den punkt ξ som ges av medelvärdessatsen.

L2. Betrakta funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som defineras av ekvationen $f(x) = x^4$. Bestäm den punkt ξ som ges av medelvärdessatsen.

L3. Anta att derivatan till funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är positiv överallt. Förklara varför det följer från medelvärdessatsen att f är strängt växande

L4. Betrakta den kontinuerliga funktionen $f : [0,7] \to \mathbb{R}$ och anta att för alla $x \in]0,7[$ gäller att $|f'(x)| \leq 10^{-3}$. Gäller det för alla punkter x och t från intervallet $[0,7]$ att $|f(x) - f(t)| \leq 10^{-2}$? ("Medelvärdessatsen plus absolutbelopp"!)