INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Hemupppgifter 10
Veckan som börjar 21.11.2011

I dessa övningar behandlas uppgifter som berör deriverbarhet av funktioner. I övningarna får du använda kända egenskaper från skolan som berör kontinuitet och derivering av exempelvis de trigonometriska funktionerna.

K1. Definiera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med ekvationen $f(x) = x|x|$. För vilka x finns derivatan $f'(x)$? För vilka x finns andra derivatan $f''(x)$? Vad kan man säga om tredje derivatan $f'''(x)$?

K2. Definiera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoret $f(x) = \sqrt{x}$ då $x \geq 0$ och $f(x) = -\sqrt{-x}$ då $x < 0$. Var är f deriverbar?

K3. Derivera
(a) $\sin^3 x^4$;
(b) $\sin^2(\sin^3 x^4)$;
(c) $\sqrt{\sin^2(\sin^3 x^4) + 1}$.

K4. Anta att $f'(1) = 4$. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}.$$

Tips: komplettera det uttryck som studeras till en form, där differenskvoterna

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{och} \quad \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}$$

förekommer.

K5. Betrakta funktionen $f :]0, 64[\to]0, 12[$, för vilken gäller att $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ för alla $x \in]0, 64[$. Varför har f en strängt växande (kontinuerlig) och deriverbar invers funktion $g :]0, 12[\to]0, 64[$? Bestäm $g'(2)$.

K6. Betrakta funktionen$f(x) = x^2$. Tolka ekvationen

$$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

med hjälp av karakteriseringssatsen 7.1 (numrering som i kompendiet) för derivatan. Vad är här $f(a)$, vad är $f'(a)h$ och $h\,\varepsilon(h)$? Kan du identifiera derivatan i punkten $x = a$ direkt från ovanstående ekvation?

K7. Betrakta funktionen $f(x) = x^5$. Tolka ekvationen

$$(a+h)^5 = a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$$

med hjälp av karakteriseringssatsen. Vad är här $f(a)$, $f'(a)h$ samt $h\,\varepsilon(h)$? Kan du identifiera derivatan i punkten $x = a$ direkt från ovanstående ekvation?

K8. Anta att $p > 0$. Visa att ekvationen

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

har högst två olika reella rötter. Tips: Beteckna vänstra sidan i ekvationen med $= f(x)$. Visa först med hjälp av derivatan att f' är strängt växande. Tillämpa därefter Rolles sats mellan bredvidliggande rötter till ekvationen. (Alternativ: om ekvationen har tre olika rötter, tillämpa Rolles sats successivt på f och f' samt jämför med vad du vet om andra derivatan f''.)