Mitta ja Integraali
Kesä 2013
5. tehtävät
palautus ke 5.6.2013 klo 18.00

Tehtävä 1 (6p) *Määritellään kuvaus* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kaavalla* $f(x) = x^2$, *kun* $x \in \mathbb{Q}$, *ja* $f(x) = 1$, *kun* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Osoita, että* f *on mitallinen.*
(Älä turhaan rasita sormiasi pyörittelemällä määritelmiä, vaan sivaltele älylläsi nojaamalla lauseisiin.)

Tehtävä 2 (6p) *Olkoon* $f, g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallisia. Osoita, että* $f \cdot g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ *on mitallinen.*
(Imitoi monisteen Lausetta 2.11.)

Tehtävä 3 (6p) *Sanotaan että funktio* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on kasvava jos* $g(x) \leq g(y)$ *aina kun* $x \leq y$. *Osoita, että kasvava funktio on mitallinen.*
(Eräs monisteen mitallisen funktion karakterisaatio helpottaa huomattavasti elämää.)

Tehtävä 4 (6p) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $f : A \to \mathbb{R}$. *Oletetaan, että joukko* $\{x \in A : f(x) \leq q\}$ *on mitallinen kaikilla* $q \in \mathbb{Q}$. *Osoita, että* A *on mitallinen joukko ja* f *on mitallinen funktio.*

Tehtävä 5 (2+2+2p) *Laske* $\limsup_n a_n$ *ja* $\liminf_n a_n$ *kun*

A $a_n = (-1)^n$

B $a_n = \cos(a_n)$, *missä* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *on rationaalilukujen numerointi.*

Todista myös kaava

$$\liminf_n -a_n = -\limsup_n a_n. \tag{1}$$

Tehtävä 6 (6p) *Olkoon* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *ja* $(b_n)_{n=1}^\infty$ *reaalilukujonoja. Todista epäyhtälö*

$$\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n. \tag{2}$$

Anna esimerkki jonoista, joilla epäyhtälö on aito.