Mitta ja Integraali
Kesä 2013
Bonustehtävät
palautus ke 19.6.2013 klo 15.00

Pyytäisin nyt näissä harjoituksissa harjoittelemaan selkeää ja täsmällistä esitystekniikkaa – samanlaista mitä toivon näkeväni tentissä. Annan mieluummin anteeksi rehellisesti tunnustetun puutteen jos vastaus on muuten kunnossa, kuin arvuuttelen johtuuko puute ”laiskuudesta” vai virheestä. (”Laiskuus” ei välttämättä ole pahe, mutta se vaikeuttaa tarkastajan työtä.)

Noudattakaa siis periaatteita: Jos osaan ratkaista tehtävän, osaan myös ratkaista sen täsmällisesti. Ja toisinpäin: Jos lähden ratkaisemaan tehtävää täsmällisesti, helpottaa se usein itse ratkaisun keksimistä. Ja viimeinen tärkeä vaihe joka usein unohtuu suorituskiireessä: kun saan tehtävän tehtyä, ihailen hetken lopputulosta!

Tehtävä 1 (6p) *Harjoitusta joukko-operaatioihin ja mitallisuuteen:*

A *Oletetaan, että E on nollamittainen ja A sellainen joukko, että yhdiste $A \cup E$ on mitallinen. Osoita, että A on mitallinen.*

B *Oletetaan, että joukon V reuna $\partial V := \overline{V} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus V}$ on nollamittainen. Osoita, että V on mitallinen.*

C *Anna esimerkki mitallisesta joukosta, jonka reuna ei ole nollamittainen. (B-kohdan ehto ei siis ole välttämätön mitallisuudelle.)*

Tehtävä 2 (4p) 1. *Olkoon $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $\Gamma = \mathcal{P}(X)$, ja $\mu(A) = \#A/k$ missä $\#A$ on A:n alkioiden lukumäärä. Osoita, että kolmikko (X, Γ, μ) on mitta avaruus.*

2. *Olkoot $a_j \geq 0$ kaikille $j \in \mathbb{N}$, ja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$. Olkoon $A \subset \mathbb{N}$. Määritellään $\mu(A) := \sum_{j \in A} a_j$. Osoita, että $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ on mitta avaruus.*

Tehtävä 3 (8p) *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mitallinen. Osoita, että tällöin*

A $m(E) = \inf\{m(G) : E \subset G, G \text{ on avoin}\}$

B $m(E) = \sup\{m(F) : F \subset E, F \text{ on kompakti}\}$

(Vihje A ja B kohtiin: harjoitus 4. tehtävä 3.)

C *Osoita, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos on olemassa mitalliset $C \subset A$ ja B siten, että $A = C \cup B$, missä C on numeroituva yhdiste kompakteista joukoista ($C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ eli C on Borel-joukko), ja B on nollamittainen (ei siis välttämättä Borel). Tämä siis osoittaa, että jokainen Lebesgue-mitallinen joukko on ”melkein” Borel-joukko!*

D *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva ja oletetaan, että se kuvaa nollamittaiset joukot nollamittaisiksi. Osoita, että kuva $f(E)$ on Lebesgue-mitallinen kaikilla Lebesgue-mitallisilla E! (Vinkki: Kohta C ja esimerkin 1.42 ”idea”.)*

Tehtävä 4 (6p) *Todista erittäin hyödyllinen Chebyshevin epäyhtälö: Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *mitallinen ja* $\epsilon > 0$ *ja* $0 < p < \infty$*. Tällöin pätee arvio*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_{\mathbb{R}^n} f^p. \tag{1}$$

Tämä epäyhtälö sanoo, että jos f:n integraali on "pieni", niin silloin se ei voi saada suhteellisen suuria arvoja ("$f > \epsilon$*") kovin suuri-mittaisessa joukossa. (Parametri p kannattaa aluksi laittaa ykköseksi, jotta saa ideasta kiinni. Todistus on lopuksi vain yhden rivin mittainen.)*

Seuraavat kaksi tehtävää kertovat milloin eräät analyysissä jatkuvasti vastaan tuleavat operaatiot saa suorittaa.

Tehtävä 5 (6p) *Olkoon* $f_1, f_2, \ldots$ *jono mitallisia (ei välttämättä positiivisia) funktioita siten, että*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_n| < \infty. \tag{2}$$

Osoita, että summa $\sum_n f_n(x)$ *suppenee äärelliseen arvoon m.k. x. Merkitään näin saatua, m.k. määriteltyä, summafunktiota* f*:llä. Perustele miksi* f *on mitallinen ja integroituva. Osoita vielä, että pätee*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n = \int_{\mathbb{R}^n} f. \tag{3}$$

Toisin sanoen, summan ja integroinnin järjestystä voi vaihtaa. Tämä on siis tavallaan Bebbo-Levin yleistys.

Tehtävä 6 (6p) *Olkoon* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mitallinen kahden muuttujan funktio. Oletetaan, että jokaisella kiinnitetyllä* x*, kuvaus* $y \mapsto f(x, y)$ *on mitallinen ja että on olemassa integroituva* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *siten, että* $|f(x, y)| \leq g(y)$ *kaikilla* x *ja* y*.*
Osoita, että jos raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x, y)$ *on olemassa kaikilla* y *(raja-arvo tietenkin riippuu* y*:stä), niin silloin pätee*

$$\lim_{x \to x_0} \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \to x_0} f(x, y)\ dy. \tag{4}$$

Toisin sanoen, rajankäynnin ja integroinnin voi vaihtaa keskenään.