Mitta ja Integraali
Kesä 2013
8. tehtävät
palautus ma 17.6.2013 klo 12.00

Tehtävä 1 (6p) *Laske*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+e^{k(x-1)}}}\ dx. \tag{1}$$

(Hajoita integraali kahteen osaan $\int_0^1+\int_1^\infty$ *ja käytä sopivia konvergenssilauseita.)*

Tehtävä 2 (6p) *Todista, että funktio* $f:[\pi,\infty[\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^{-1}\cos(x)$ *ei ole integroituva. Osoita kuitenkin, että epäoleellinen integraali (Riemann tai Lebesgue, ihan sama)*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\pi^{n\pi} x^{-1}\cos(x)\ dx, \tag{2}$$

on olemassa. (Sitä ei tarvitse laskea.)

Tehtävä 3 (6p) *Käytä DKL:ää (sanomattakin selvää, että perustele miksi voit käyttää sitä) laskemaan raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\cos(x^n)-1}{x^{2n-2}}. \tag{3}$$

(Vinkkejä: Kannattaa taas jakaa integraali kahteen osaan niinkuin ensimmäisessä tehtävässä. Kaava $\cos(x)=1-2\sin^2(x/2)$*. Arvio* $\sin(x)\le x$ *kaikilla* $x\ge 0$*. Raja-arvo* $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x=1$*.)*

Tehtävä 4 (6p) *Olkoon* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *integroituva. Osoita, että funktio* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x):=\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(xt)\ dt, \tag{4}$$

on jatkuva.
Lisätieto: Tämä on f*:n Fourier-muunnoksen reaaliosa. Imaginääriosa on ylläoleva integraali sini cosinin paikalla, ja vastaava tulos on voimassa. Olet siis (toivottavasti) tämän jälkeen todistanut tärkeän tuloksen: integroituvan funktion Fourier muunnos* $\hat{f}$ *on jatkuva.*
(Muistutus: Esim. oikealta jatkuvuus pisteessä x*,* $\lim_{y\to x+}g(y)=g(x)$*, pätee jos ja vain jos* $\lim_{n\to\infty}g(y_n)=g(x)$ *mielivaltaisella laskevalla jonolla* $y_n\searrow x$*.)*

Rutiininomainen Fubininkäyttöharjoitus:

Tehtävä 5 (6p) *Laske integraali*

$$\int_{[0,\infty)\times[1,\infty)} e^{-xy^2}\ dm_2(x,y). \tag{5}$$

Perustele selvästi miksi saat käyttää Fubinia ja miten käytät. Esim. Tee täsmällisesti karakteristisen funktion "tekijöihin jako":
$\chi_{[0,\infty)\times[1,\infty)}(x,y)=\chi_{[0,\infty)}(x)\chi_{[1,\infty)}(y)$.

Tehtävä 6 (6p) *Lue monisteesta Fubinin ensimmäinen lause (4.3) ja*

A) *Todista fubini n-väleille eli todistuksen kohta (A).*

B) *Kerro sanallisesti (mutta ei hirveän pitkästi) miten yleinen tapaus redusoidaan n-väleihin. Idea riittää, mutta tee ainakin selväksi, missä tarvitaan Lemmaa 4.2 ja missä lausetta 3.14.*