Mitta ja Integraali
Kesä 2013
7. tehtävät
palautus ke 24.6.2013 klo 18.00

Tehtävä 1 (6p) *Olkoon $0 < s < 1$. Osoita, että voit käyttää MKL:ää laskemaan seuraava raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}$$

ja laske se.

Tehtävä 2 (6p) *Harjoitusta integraalien monotonisuuteen ja nollamittaisiin joukkoihin liittyen.*

A *Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia ja $A \setminus B$ nollamittainen. Olkoon $f \geq 0$ mitallinen. Osoita, että $\int_A f \leq \int_B f$*
($A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \subset B \cup (A \setminus B)$.)

B *Olkoon nyt $f, g \geq 0$ mitallisia. Osoita alkuosan avulla, että jos $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$ on nollamittainen joukko, niin $\int f \leq \int g$. (Valitse edellisessä $A = \mathbb{R}, B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)\}$.)*

Seuraavaksi eräs Lebesgue-integrointiteorian mielenkiintoinen ilmiö:

Tehtävä 3 (6p) *Osoita monotonisen konvergenssin, Riemann-integraalin ja analyysin peruslauseen avulla, että funktion $\phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\phi(x) = |x|^{-1/2}\chi_{[-1,1]}$ Lebesgue-integraali on äärellinen. (Huom. Olemme määritelleet funktion ϕ vain m.k. x. Jos haluaa, sen voi määritellä vaikka äärettömäksi pisteessä $x = 0$, mutta sillä ei ole merkitystä integrointiin.)*

Olkoon nyt $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaalilukujen numerointi. Osoita, että myös seuraavan funktion Lebesgue-integraali on äärellinen:

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\phi(q_n - x)}{2^n} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Hullua! sillä "$f(x) = \infty$" jokaisella $x \in \mathbb{Q}$; täsmällisemmin, se on rajoittamaton jokaisella välillä (se ei siis ainakaan ole Riemann-integroituva).

Tehtävä 4 (6p) *Olkoon A_n, $n = 1, 2, \ldots$ jono mitallisia joukkoja. Käytä Fatoun Lemmaa osoittamaan*

$$m(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n m(A_n). \tag{2}$$

Tehtävä 5 (6p) *Laske raja-arvo*

A)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\pi \frac{x}{e^{x^2} + \sin^{2k}(x)}\, dx \tag{3}$$

B)

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{e^{x^2}+\sin^{2k}(x)}\ dx \tag{4}$$

Tehtävä 6 (6p) *Olkoon $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia integroituvia funktioita. Todista seuraavat laajennukset Fatoun Lemmalle:*

A) Oletetaan, että on olemassa integroituva funktio g siten, että $f_n \geq g$ kaikilla n. Tällöin pätee

$$\liminf_n \int_{\mathbb{R}^n} f_n \geq \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_n f_n. \tag{5}$$

(Sovella "normaalia" Fatouta jonoon $f_n - g$, mutta muista perustella miksi saat separoida integraalit. Osaatko myös perustella, miksi $f_n(x) - g(x)$ on hyvin määritelty m.k. x?)

B) Oletetaan, että on olemassa integroituva funktio g siten, että $f_n \leq g$ kaikilla n. Tällöin pätee

$$\limsup_n \int_{\mathbb{R}^n} f_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} \limsup_n f_n. \tag{6}$$

(Älä todista tätä "alusta asti" vaan johda se helposti A)-kohdasta.)