Mitta ja Integraali
Kesä 2013
6. tehtävät
palautus ma 10.6.2013 klo 12.00

Ensimmäiset pari tehtävää havainnollistavat, miten hyvin mitallisuus säilyy ja toimii raja-arvojen kanssa. Tämä ilmiö – kuten luennoilla olen painottanut – on pohjimmiltaan seurausta Lebesgue joukkojen numeroituvasta additiivisuudesta.

Tehtävä 1 (6p) *Olkoot $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia funktioita $A \to \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että joukko $B = \{x \in A : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ on olemassa}\}$ on mitallinen.*
(Käytä Lausetta 2.21 sekä lausetta 2.23. Todistus on noin kaksi riviä, jos sen lyhyesti kirjoittaa.)

Tehtävä 2 (6p) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, mitallinen ja $f_j : A \to \mathbb{R}$ $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia funktioita. Osoita, että joukot*

$$A_j = \{x \in A : f_{j+1}(x) \geq f_j(x)\}$$

ovat mitallisia.
Osoita edellisen avulla, että joukko

$$\{x \in A : \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^{\infty} \text{ on kasvava}\}$$

on mitallinen.
(Jono $f_j(x)$ on kasvava pisteessä x jos $f_{j+1}(x) \geq f_j(x)$ kaikilla j. Käännä tämä "joukkojen kielelle".)

Tehtävä 3 (6p) *Harjoitusta yksinkertaisten funktioiden käyttöön:*

A (1p) Laske $I(f)$, kun $f = \chi_{\mathbb{Q}}$.

B (1p) Laske $I(f)$, kun $f = 1\chi_{[0,1]} + 2\chi_{(1,\sqrt{2}]} + 4\chi_{(\sqrt{2},2]}$.

C (1p) Osoita: $(\cos x)^n \to 0$, kun $n \to \infty$ m.k. x.

D (3p) Osoita: Jos f ja g ovat yksinkertaisia ja $f = g$ m.k. x, niin $I(f) = I(g)$.

Seuraavilla kahdella tehtävällä on kaksi tarkoitusta: osoittaa, että integrointi on abstrakti prosessi joka tarvitsee vain mitta-avaruuden aksioomat. Toinen tarkoitus on saada opiskelija opiskelemaan nämä todistukset huolella.

Tehtävä 4 (6p) *Lue lisätieto sivun 47 alaosassa. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $f : X \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen. Osoita, että kuvaus $\Gamma \ni E \mapsto I(f, E)$ on mitta (t.s. todista lauseen 3.7 analogia). Kerro nyt (muistamalla eräs konvergenssilause), miksi tästä seuraa, että*

$$I(f, \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, E_n), \tag{1}$$

missä $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ on kasvava jono mitallisia joukkoja $E_n \in \Gamma$.

Tehtävä 5 (6p) *Sama asetelma kuin edellisessä tehtävässä. Todista huolellisesti Lause 3.10 yleisessä mitta-avaruudessa* (X, Γ, μ).

Tehtävä 6 (6p) *Lukutehtävä: Lue lisätieto sivun 55 alaosassa. Todista sitten monotonisen konvergenssin lause abstraktissa muodossa:*
Olkoon (X, Γ, μ) *mitta-avaruus ja* $f_n : X \to [0, \infty]$ *jono* Γ*-mitallisia funktioita siten, että*

1) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots \leq \infty$ *kaikilla* $x \in X$.

2) $f_n(x) \to f(x)$, *kun* $n \to \infty$ *kaikilla* $x \in X$.

Tällöin f *on* Γ*-mitallinen (ei tarvitse todistaa) ja pätee*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\,\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\,\mu \tag{2}$$

(Todistus on oleellisesti identtinen luentomonisteen version kanssa, joten sinun ei tarvitse muuta kuin lukea se huolella ja käyttää samoja menetelmiä. Tämä tehtävä osoittaa jälleen, että integrointiteoria on abstrakti ja axiomaattinen rakennelma.)