Mitta ja Integraali
Kesä 2013
4. tehtävät
palautus ma 3.6.2013 klo 12.00

Kolmen ensimmäisen tehtävän tarkoituksena on opettaa miten sekä mitallisia, että ei-mitallisia joukkoja voidaan approksimoida avoimilla, suljetuilla tai mitallisilla joukoilla.

**Tehtävä 1 (6p)** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$. *Osoita, että kaikilla* $m \in \mathbb{N}$ *on olemassa avoin joukko* $B_m \subset \mathbb{R}^n$ *siten, että* $A \subset B_m$ *ja*

$$m(B_m) \leq m^*(A) + \frac{1}{m}.$$

*Osoita nyt äskeistä tietoa apuna käyttäen, että on olemassa mitallinen joukko* $B \subset \mathbb{R}^n$ *siten, että*

$$A \subset B \quad \text{ja} \quad m(B) = m^*(A)$$

*(Alkuosassa riittää tutkia ulkomitan ja Lebesguen peitteen määritelmää. Jälkiosassa otetaan numeroituva leikkaus...)*

**Tehtävä 2 (6p)** *Olkoon* $A$ *nyt mitallinen joukko ja lisäksi* $m(A) < \infty$. *Osoita tehtävää yksi apuna käyttäen, että kaikille* $\epsilon > 0$ *on olemassa avoin joukko* $B$ *siten, että* $A \subset B$ *ja*

$$m(B \setminus A) < \epsilon.$$

**Tehtävä 3 (6p)** *Pudotetaan edellisen tehtävän oletus* $m(A) < \infty$. *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *vain mitallinen. Merkataan* $A_m = A \cap B(0, m)$. *Olkoon* $B_m$ *avoin siten että* $A_m \subset B_m$ *ja olkoon* $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. *Osoita, että*

$$B \setminus A \subset \bigcup_{m=1} (B_m \setminus A_m).$$

*Valitsemalla* $B_m$ *sopivasti osoita että kaikille* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $B$ *siten, että* $m(B \setminus A) < \epsilon$. *Päättele tästä komplementeilla, että on olemassa myös suljettu joukko* $C \subset A$ *siten, että* $m(A \setminus C) < \epsilon$.

**Tehtävä 4 (6p)** *Harjoitusta sigma-algebran käsitteeseen:*
*Olkoon* $X$ *ylinumeroituva joukko. Määritellään*
$\Gamma := \{E \subset X : E \text{ on numeroituva, tai } E^c \text{ on numeroituva}\}$. *Määritellään myös* $\mu(E) := 0$ *jos* $E$ *on numeroituva ja* $\mu(E) := \infty$ *jos* $E^c$ *on numeroituva. Osoita, että* $\Gamma$ *on sigma-algebra ja* $\mu$ *on mitta.*

**Tehtävä 5 (6p)** *Todista monisteen Borel-Cantelli lemma (Huomautus 1.62): Olkoon* $(X, \Gamma, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $A_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$. *Jos pätee*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty, \tag{1}$$

*niin silloin*

$$\mu(\limsup_n A_n) = 0. \tag{2}$$

*Viimeinen tarkoittaa, että melkein kaikki pisteet* $x \in X$ *kuuluvat vain äärellisen moneen joukoista* $A_n$. *Tämä tulos on elintärkeä todennäköisyysteoriassa.*

**Tehtävä 6 (6p)** *Lukutehtävä: Lue mitallisista kuvauksia Lauseeseen 2.12 asti ja vastaa kysymyksiin:*

*Lause 2.11* *Perustele lyhyesti: Jos funktiot* $f_1, \ldots f_n : A \to \mathbb{R}$ *ovat mitallisia, niin myös* $a_1 f_1^{k_1} + a_2 f_2^{k_2} + \ldots a_n f_n^{k_n}$, $a_i \in \mathbb{R}$ *on mitallinen?*

*Lause 2.12* *Tarkista todistuksessa tarvittavat identiteetit* $E_a''' = A \setminus E_a$ *ja* $E_a'' = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_{a+1/j}$.