Mitta ja Integraali
Kesä 2013
3. tehtävät
palautus ke 29.5.2013 klo 18.00

Tehtävä 1 *Osoita, että seuraavien joukkojen ulkomitta on nolla.*

A (2p) Kiekko $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 < R^2\}$

B (2p) Litteä taso $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\}$.

C (2p) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{R}\}$

Tehtävä 2 (6p) *Todista tämä käytännön arvioissa kätevä tulos.*
Osoita, että jos A ja B ovat Lebesgue mitallisia, $m(A) < \infty$ ja $A \supset B$, niin $A \setminus B$ on Lebesgue mitallinen ja pätee

$$m(A \setminus B) = m(A) - m(B) \tag{1}$$

Tehtävä 3 (6p) *Soveltamalla samoja menetelmiä kuin viime tehtävien tehtävissä 1 ja 2, osoita, että mikä tahansa $\mathbb{R}^n$:n avoin joukko A voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia n-välejä. Toisin sanoen on numeroituva joukkoperhe avoimia n-välejä $\mathcal{Q}$ siten, että*

$$\bigcup_{I \in \mathcal{Q}} I = A.$$

Näin ollen n-välien mitallisuudesta seuraa, että avoimet joukot ovat mitallisia. (Tämä on niin tärkeä ja mielenkiintoinen ominaisuus, että sitä kannattaa vähän toistaa. Lisäksi se tarjoaa todistusteknisesti mainiota harjoitusta.)

Tehtävä 4 (6p) *Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia joukkoja, missä $m(B) = 0$. Olkoon E sellainen joukko, että $A \setminus B \subset E \subset A \cup B$. Osoita, että $E = C \cup D$ missä C on mitallinen ja $m^*(D) = 0$ ja täten, että E on mitallinen.*
Tästä seuraa, monotonisuuteen ja subadditiivisuuteen vedoten, että $m(E) = m(C)$.
(Vihje. Tehtävän oletukset yrittävät sanoa, että joukko E on "vain vähän suurempi kuin $A \setminus B$". Tästä voi arvata, että kannattaa lähteä liikkeelle valitsemalla $C = A \setminus B$.)

Tehtävä 5 (6p) *Olkoot $E_1, E_2, \ldots$ kokoelma mitallisia joukkoja $\mathbb{R}^n$:ssä jolla $m(E_i \cap E_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Osoita, että on olemassa nollamittainen joukko $G = \bigcup_{i \neq j} E_i \cap E_j$ (eli $m(G) = 0$) ja mitalliset erilliset joukot $F_1, F_2, \ldots$ (eli $F_i \cap F_j = \varnothing$ aina kun $i \neq j$) siten, että*

$$F_i = E_i \setminus G \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = G \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Osoita tämän avulla, että

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i). \tag{2}$$

Näin ollen nollamittaiset päällekkäisyydet eivät "häiritse" täysadditiivisuutta.

Tehtävä 6 (3p) *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Lipschitz, eli on olemassa* $M \in \mathbb{R}$ *siten, että*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

Osoita, että "f ei pysty venyttämään joukon ulkomittaa äärettömästi". Eli täsmällisemmin, osoita $m(f(A)) \leq Mm(A)$ *kaikilla* $A \subset \mathbb{R}$.
(Muista kaava (0.10). Huomaa myös: Jos I *on väli, niin* $m(f(I)) \leq Mm(I)$.*)*
Tästä seuraa erikoistapauksena, että f *kuvaa nollamittaiset nollamittaisiksi.*

Tehtävä 7 (3p) *Osoita, että jos* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva (muttei enää Lipschitz), niin graafi* $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$ *on nollamittainen* $\mathbb{R}^2$*:n osajoukko.*
(Käytä huomautusta 1.38 ja huomiota
$\{(y, f(y)) : y \in [x - \epsilon, x + \epsilon]\} \subset [x - \epsilon, x + \epsilon] \times f[x - \epsilon, x + \epsilon]$ *missä jälkimmäisen mitta menee nollaan kun* $\epsilon \to 0$.*)*