Mitta ja Integraali
Kesä 2013
1. tehtävät
palautus 22.05.2013 klo.18.00

Näissä harjoituksissa, kuten tulevissakin, on jaossa yhteensä 36 pistettä. Näiden tekemiseen on vain kolme päivää aikaa (ensimmäisestä luennosta laskien), mutta tämä on intensiivikurssi. Käykää kiinni; monet pystyy varmasti tekemään suoraan kurssin esitiedoilla.

1. Mittateoriassa tutkitaan minkälaisille joukoille voidaan määrätä mitta. Tämän vuoksi on välttämätöntä hallita joukko-operaatiota ja pientä manipulointia.
Sievennä seuraavat joukot käyttäen täsmällisiä argumentteja.

A (1p) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(n,\infty)$. (Tämä osoittaa, että joukkojen ääretön leikkaus voi olla tyhjä, vaikka jokainen äärellinen osaleikkaus olisi jopa "äärettömän suuri".)

B (1p) $\bigcup\{[q,p] : q,p\in\mathbb{Q}, a<q<p<b\}$, missä $a<b$ ovat annettuja reaalilukuja.

C (1p) $\bigcup\{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}, (a,b)\subset U\}$, missä $U\subset\mathbb{R}$ on annettu avoin osajoukko.

D (1p) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(n-\frac{1}{m}, n+\frac{1}{m})$.

2. Olkoon $U\subset\mathbb{R}$ ja $x\in R$. Luodaan erittäin kätevät määritelmät $U+x := \{y+x : y\in U\}$ ja $U+V := \bigcup_{x\in V}(U+x)$. Harjoittele tämän niin sanotun translaation käyttöä sieventämällä

A (1p) $[0,1]+(0,1)$

B (1p) $\mathbb{N}-\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}-n)$

C (1p) $\mathbb{Q}+\mathbb{Q} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}+x)$

D (2p) $\bigcup_{x\in[0,1]}(\mathbb{Q}+x)$

3. Tämä tehtävä esittelee eräät äärimmäisen tärkeät operaatiot joukko-jonoille. Tämä ja seuraava jatko-tehtävä ovat epäilemättä harjoitusten tärkeimmät.
Olkoon A_n avaruuden X osajoukko kaikilla $n=1,2,3\ldots$. Tällöin muodostamme joukot

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k, \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k. \tag{1}$$

Näillä joukoilla on yksinkertainen tulkinta, joka auttaa ymmärtämään, miksi ne voisivat olla käyttökelpoisia (katso seuraava tehtävä). Harjoittele kuitenkin ensin niiden käyttöä etsimällä $\limsup$ ja $\liminf$ erikoitapauksissa

A (1p) $A_n=(a,b)$ kun n on parillinen ja $A_n=(c,d)$ kun n on pariton ja $a<b<c<d$.

B (2p) $A_n=(-1/n,1]$ kun n on parillinen ja $A_n=[-1,1/n)$ kun n on pariton.

Osoita myös seuraavat perusominaisuudet.

C (1p) $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$. (Vihje: De Morgan.)

D (2p) $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

4. Osoita nyt, jo mainitut, hyödylliset tulkinnat:

A (2p) $x \in \limsup_n A_n$ jos ja vain jos "$x \in A_n$ äärettömän monella indeksillä n".

B (2p) $x \in \liminf_n A_n$ jos ja vain jos "$x \in A_n$ jostakin $n = N$ lähtien (eli kun $n \geq N$)".

Vilkaise nyt edellisen tehtävän esimerkkejä tämän uuden tulkinnan valossa.
Osoita viimeiseksi (2p), että jos joukko-jono on joko kasvava ($A_n \subset A_{n+1}$) tai vähenevä $A_n \supset A_{n+1}$, niin silloin pätee

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n. \tag{2}$$

(Tämä riittää tehdä jommassa kummassa tapauksessa, koska toinen seuraa silloin edellisen tehtävän C-kohdasta.)

5 (4p)**.** Tämä tehtävä osoittaa, että kuvaus ei yleisesti "kunnioita" leikkaus-operaatiota. Alkukuva sen sijaan kunnioittaa, mikä tekee siitä mukavamman operaation mitta-teorian näkökulmasta, koska se säilyttää tiettyjen joukkoperheiden (sigma-algebrojen) rakenteen. Tästä lisää kurssin kuluessa...
Olkoot X ja Y joukkoja, $f : X \to Y$ kuvaus niiden välillä ja $V_i \subset X,\ i \in I$, X:n osajoukkoja. Osoita, että

$$f\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(V_i).$$

Osoita nyt, että inkluusio voi olla aito. (Tähän on kaksi lähestymistapaa. Joko lähteä etsimään yleistä, yksinkertaista ja murskaavaa vastaesimerkkiä, tai sitten valita äärimmäisen alkeellinen asetelma, kuten $X = Y = \{x, y\}$...)
Osoita myös, että jos f on injektio niin silloin pätee yhtäsuuruus

$$f\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(V_i). \tag{3}$$

Sitten siirrytään numeroituvuuden harjoitteluun.

6 (7p)**.** Todista:

A (1p) Jos A on numeroituva ja $B \subset A$, niin B on numeroituva.

B (1p) Potenssijoukko $P(\mathbb{R})$ on ylinumeroituva.

C (1p) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, eli funktioiden $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joukko, on ylinumeroituva.

D (1p) $\mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$ on numeroituva. (Induktio, tai vaihtoehtoisesti valitsemalla n kpl alkulukuja ja muodostamalla niillä injektio $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$.)

D (1p) $\mathbb{N}$:n äärellisten osajoukkojen perhe on numeroituva.

E (2p) $\{(q, p) \subset \mathbb{R} : q, p \in \mathbb{Q}, q < p\}$on numeroituva. Tämä on hyvin tärkeä esimerkki koska kyseinen perhe muodostaa $\mathbb{R}$:n topologian kannan.

7 (4p)**.** Tämä tehtävä kertoo jotakin tärkeää "summien luonteesta". Se myös selittää, miksi yleensä tutkitaan vain numeroituvia summia, eli indeksi joukoksi valitaan $\mathbb{N}$.
Olkoon I indeksijoukko (mahd. ylinumeroituva) ja $a_i \geq 0$ reaalilukuja. Osoita, että jos pätee

$$\sum_{i\in I} a_i < \infty, \tag{4}$$

niin silloin $\{i \in I : a_i > 0\}$ on numeroituva. Vihje: tutki joukkoja $\{i \in I : a_i > 1/n\}$.