Mitta ja Integraali
Kesä 2013
2. tehtävät
palautus ma 27.5.2013 klo 12.00

Viimeisen tehtävän on tarkoitus tutustuttaa etukäteen tulevan viikon aiheeseen. Siksi nämä tehtävät pitää palauttaa ennen maanantain luentoa klo 12.00.

Tehtävä 1 (6p) *Osoita että* $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ *on numeroituva ja, että* $\mathfrak{X} := \{B(x,r) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+, r > 0\}$ *on numeroituva kokoelma kuulia.*

Tehtävä 2 (6p) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *avoin. Olkoon* $\mathfrak{X}$ *kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että*

$$\mathfrak{B}_A := \{B \in \mathfrak{X} : B \subset A\},$$

on numeroituva kokoelma kuulia ja, että

$$A = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}_A} B;$$

siispä, mikä tahansa avoin joukko $\mathbb{R}^n$*:ssä voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia kuulia.*

Tehtävä 3 (6p) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$*, ja* $\mathcal{F}$ *joukon* A*:n Lebesguen peite. Osoita, että* n*-välien kokoelma*

$$\mathcal{F}_{+y} := \{I + y; I \in \mathcal{F}\}$$

on $A + y$*:n Lebesgue:n peite*
Käyttämällä edellistä tietoa osoita, että $m_n^*(A + y) = m_n^*(A)$*. (Tämä osoittaa, että tuleva Lebesguen mitta on translaatio-invariantti.)*

Tehtävä 4 (6p) *Olkoon* $B \subset \mathbb{R}^n$ *mikä tahansa joukko* $\mathbb{R}^n$*:ssä, ja* $k \geq 0, k \in \mathbb{R}$*. Määritellään joukko* kB *olemaan*

$$kB := \{kx : x \in B\}.$$

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$*, ja* $\mathcal{F}$ *joukon* A*:n Lebesguen peite. Osoita, että* n*-välien kokoelma*

$$\mathcal{F}_{k\cdot} := \{kI; I \in \mathcal{F}\}$$

on kA*:n Lebesgue:n peite.*
Käyttämällä edellistä tietoa osoita, että $m_n^*(kA) = k^n m_n^*(A)$*. (Tämäkin on tärkeä ominaisuus tulevalle Lebesguen mitalle.)*

Tehtävä 5 (6p) *Osoita, että jos joukko* $A \subset \mathbb{R}$ *on numeroituva, niin jokaisella* $\epsilon > 0$ *on olemassa Lebesguen peite* $\mathcal{F}$ *siten, että* $\sum_{I \in \mathcal{F}} m^*(I) < \epsilon$*. Tämä siis osoittaa, että numeroituvan joukon ulkomitta (ja siten myös mitta, kuten myöhemmin nähdään) on* 0*.*

Tulevan viikon tehtävä.

Tehtävä 6 (6p) *Lueksi luentomonistetta Lauseeseen 1.29 asti (Lebesgue-mitallisten joukkojen peruslause). Selitä sitten lyhyesti omin SANOIN (ei saa käyttää symboleita) mikä on Lemman 1.25, Lemman 1.28 ja Lauseen 1.29 sanoma.)*