Todennäköisyyslaskenta I (kevät 2017)
Kurssikoe 10.3.2017
Ratkaisut ja pisteytys (Mikko K)

---

1. Merkitään
A = "valittu kone tulee tyypin A alalta",
B = "valittu kone tulee tyypin B alalta",
C = "valittu kone tulee tyypin C alalta",

jolloin $\{A, B, C\}$ on ositus. (+1p)
Tällöin $P(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ ja
$P(C) = \frac{6}{18} = \frac{3}{9}$ (+1p) selvä kun merkitään

T = "valittu alalla toimii",

niin
$P(T|A) = \frac{7}{10}$, $P(T|B) = \frac{9}{10}$ ja $P(T|C) = \frac{4}{10}$.
(+1p)

(a) Kokonaistodennäköisyyden kaavan perusteella

$$P(T) = P(A)P(T|A) + P(B)P(T|B) + P(C)P(T|C)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}$$

$$= \frac{28 + 18 + 12}{90} = \frac{58}{90} = \underline{\underline{\frac{29}{45}}}. \qquad (+1p)$$

(b) Koska

$$P(T^c) = 1 - P(T) = \frac{90}{90} - \frac{58}{90} = \frac{32}{90}$$

ja

$$P(T^c|A) = 1 - P(T|A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}, \quad (+1p)$$

niin Bayesin kaavan mukaan

$$P(A|T^c) = \frac{P(A)\,P(T^c|A)}{P(T^c)}$$

$$= \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{32}{90}} = \frac{12}{32} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}. \qquad (+1p)$$

② Merkitään

X = "koneen korjaamiseen kuluva aika", (+1p)

jolloin $X \sim Exp(\frac{1}{2})$.

(a) $P(X>2) = 1-P(X\leq 2) = 1-F_X(2)$ (+1p)

$= 1-(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}) = e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$. (+1p)

tai tiheysfunktiolla

$P(X>2) = 1-P(X\leq 2) = 1-\int_0^2 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx$ (+1p)

$= 1+\int_0^2 -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx = 1+\Big/_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}$

$= 1+e^{-1}-e^{0} = 1+e^{-1}-1 = \underline{\underline{e^{-1}}} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$. (+1p)

(b) Eksponenttijakauman muistinmenetys ominaisuuden perusteella (+1p)

$P(X>10 \mid X>9) = P(X>1) = 1-P(X\leq 1)$

$= 1-F_X(1) = 1-(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}) = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}}$. (+1p) (+1p)

Voi laskea myös tiheysfunktion avulla kuten kohdassa (a).

3. (a) Merkitään

$X =$ "kruunien lukumäärä n heitossa",

jolloin $X \sim Bin(n, p)$. Koska

$EX = np = 10$ ja $D^2X = np(1-p) = 6$ (+1p)

niin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} np = 10 \\ np(1-p) = 6 \end{cases} \begin{aligned} &\Rightarrow p = \frac{10}{n} \\ &\Rightarrow n\frac{10}{n}\left(1 - \frac{10}{n}\right) = 6 \\ &\Rightarrow 10 - \frac{100}{n} = 6 \\ &\Rightarrow \frac{100}{n} = 4 \Rightarrow \underline{\underline{n = 25}} \end{aligned}$$

(+1p)

ja $p = \frac{10}{n} = \frac{10}{25} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$. (+1p)

(b) $P(5 < X < 15) \underset{\uparrow}{=} P(5{,}5 \le X \le 14{,}5)$ (+1p)

jatk. korjaus

standardointi

$$\overset{\downarrow}{=} P\left(\frac{5{,}5-10}{\sqrt{6}} \le \frac{X-10}{\sqrt{6}} \le \frac{14{,}5-10}{\sqrt{6}}\right)$$

norm. appr.

$$\overset{\downarrow}{\approx} \Phi\left(\frac{4{,}5}{\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(-\frac{4{,}5}{\sqrt{6}}\right) \quad (+1p)$$

$$= \Phi(1{,}84) - (1 - \Phi(1{,}84)) = 2\Phi(1{,}84) - 1$$

$$= 2 \cdot 0{,}967116 - 1 \approx \underline{\underline{0{,}93}}. \quad (+1p)$$

4. $P(B^c | A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)}$ (+1p)

$\overset{\text{de Morgan}}{=} \frac{P((A \cup B)^c)}{P(A^c)}$ (+1p)

$= \frac{1 - P(A \cup B)}{P(A^c)}$

$= \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{P(A^c)}$ (+1p)

$= \frac{1 - P(A)}{P(A^c)}$ (+1p)

$= \frac{P(A^c)}{P(A^c)} = 1,$ (+1p)

Sillä $P(B) = P(A \cap B)$, koska

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1.$ (+1p)