TILASTOLLINEN TESTAAMINEN

1. MUUTAMA JOHDATTELEVA ESIMERKKI
2. PERUSKÄSITTEET
   - HYPOTEESIT (NOLLAHYPOTEESI / VASTA —"—) } YKS. / YHD.
   - TESTISUUREET
   - KRIITTINEN ALUE
   - MERKITSEVYYSTASO
3. HAVAITTU MERKITSEVYYSTASO ELI P-ARVO
4. T-TESTI
5. Z-TESTI
6. TULKINTA JA TAVALLISET VÄÄRINKÄSITYKSET

ESIM 1 LANTIN HEITTO, 100 heittoa, 58 kruunaa

VOIDAANKO SELV. LANTTIA HEITTÄMÄLLÄ, ONKO SE "REILU"?

ESIM 2 NESTEEN ANNOSTELU, OLETUS MÄÄRÄ $\sim N(\mu, \sigma^2)$

TAVOITE KESKIM. $\mu = 10$ (l)
KESKIHAJ. $\sigma \leq 0{,}2$ (l)

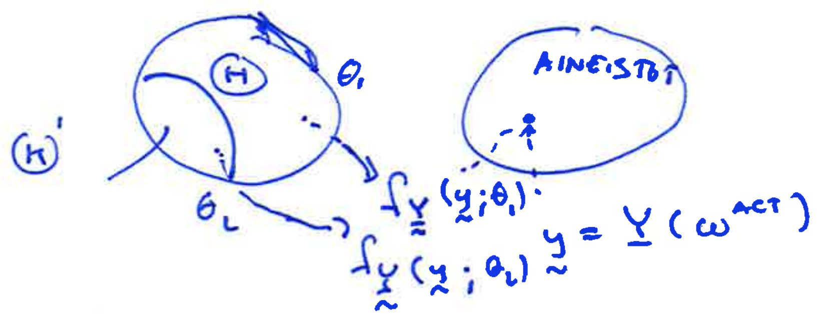
TESTI 20 kanisteria $(y_1, \dots, y_{20})$
$\bar{y} = 9{,}9$, $s = 0{,}22$

KYSYMYS PITÄISIKÖ KONETTA SÄÄTÄÄ.

ESIM 3 KÄYTTÄYTYYKÖ KIMBLE-PELIN NOPPA KUTEN "TAVALLINEN NOPPA"

2. PERUSKÄSITTEET

LÄHTÖKOHTA: PARAM. TILASTOLLINEN MALLI JOKA SELITTÄÄ AINEISTON



HYPOTEESI ON VÄITTÄMÄ $\theta \in \Theta' \subset \Theta$

ESIM 1 TIL. MALLI K = "kruunujen lkm 100:ssa heit." $\sim \mathrm{Bin}(100, \theta)$

$\Theta = [0,1]$

tn saada kruuna 1:llä heit.

HYPOTEESI:

kolikko "REILU"

$H_0: \theta = 1/2 \quad (\theta \in \{1/2\})$

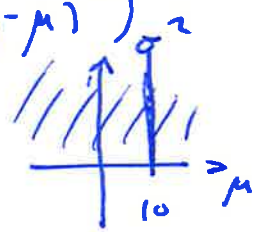
YKSINK. HYPOT.

HYPOTEESI ON YKSINKERTAINEN, JOS SE ON MUOTOA $\theta \in \{\theta_0\}$, MUUTEN SE ON YHDISTETTY

ESIM 2 NYT TIL. MALLI ON $(n=25)$ $\tilde{y}=(y_1,\dots,y_{25})$

$$f(\tilde{y};\mu,\sigma^2)=(2\pi)^{-25/2}(\sigma^2)^{-25/2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(y_i-\mu)^2\right)$$

JA PARAM. AV. ON $\mathbb{R}\times(0,\infty)$



HYPOTEESI ~~[illegible]~~ $H_0: \mu=10$

ON YHDISTETTY (SUORAN PÄTKÄ $\{\sigma^2>0, \mu=10\}$)

ESIM 3 PALATAAN MYÖHEMMIN :)

NOLLAHYPOTEESI $H_0: \theta\in\Theta_0$ JOSSAIN MIELESSÄ NEUTRAALI TAI OLETUS-ARVOINEN TILA, (VAKIINTUNUT) ~~HYPOTEESI~~ JOSTA LUOVUTAAN (JOKA HYLÄTÄÄN) VAIN RIITTÄVIEN TODISTEIDEN VALOSSA

TESTAUKSEN TAVOITE ARVIOIDA AINEISTON $\tilde{y}$ AVULLA NOLLAHYPOT. PAIKKANSAPITÄVYYTTÄ

VASTAHYPOTEESI $H_1: \theta\in\Theta_1$

- EI AINA ASETETA
- USEIN $\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$
- VALITT. $\Theta_0\cap\Theta_1=\emptyset$

ESIM 1 H_0: "kolikko reilu" eli $H_0: \theta=1/2$

H_1: "kolikko harhainen" $H_1: \theta\neq 1/2$

voisi: ~~[illegible]~~ valita

ESIM 2 $H_0: \mu=10$ mutta myös $H_1: \mu>10$

$H_1: \mu\neq 10$

(SKIPATAAN KESKIHAJONTAKYSYMYS → TP2)

KYS KUINKA TESTAAMINEN SITTEN TOIMII?

TESTISUURE ON TUNNUSLUKU $t(\tilde{y})$ JOKA ← EI RIIPU PARAMETREISTA

ON VALITTU SEURAAVALLA PERIAATTEELLA

PIENET SOPOS. SUURET ARVOT KRIITTISIÄ H_0:lle (RISTIRIIDASSA, RIITEREET)

1. ..

2. ..

3. " "

t_0

4. $t(\tilde{Y})$:n jakauma on "hallussa" ainakin kun $\theta\in\Theta_0$ (eli H_0 on voimassa) (SAKANASUUREET HYÖDYKSI)

ESIM 3 HENKKA (MON. KAAVA (5.15)) JA NOUD.

$$T=\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{25}}$$

n

ON SAKANASUURE (ELI 4. ") t-jakaum vap. asteilla $n=20-1=19$ (MÄÄR 5.5)

TÄMÄ ei ole tunnusluku muttа jos

$H_0: \mu = 10$ on voimassa, niin

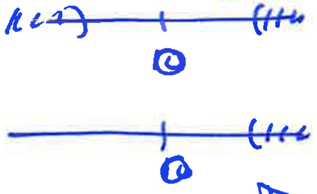
$$t(\underset{\sim}{Y}) = \frac{\bar{Y} - 10}{S/\sqrt{25}} \quad \left(\text{eli } t(\underset{\sim}{y}) = \frac{\bar{y} - 10}{s/\sqrt{25}} \right\} \text{ on} \Big)$$

$$\sim t_{24}$$

käy hyvin testisuureeksi.

Jos $H_1: \mu \neq 10$, niin (kaksisuunt.)

$H_1: \mu > 10$ (yksisuunt.)



niin päätä pahkaa t-testisuureeseen

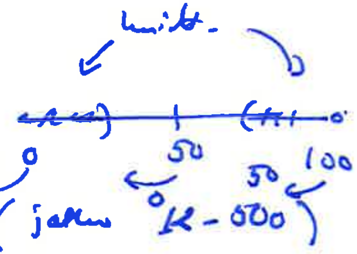
ESIM 1 $H_0: \theta = 1/2$, $H_1: \theta \neq 1/2$ (kaksisuunt. testi)

AJATUS Jos kolikko reilu, niin

$$E_\theta K = n/2 = \frac{100}{2} = 50$$

TESTISUURE $t(k) = k - 50$

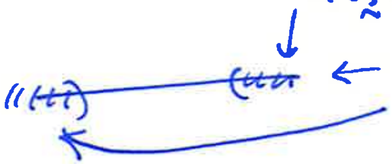
JA JAKAUMA $t(K) = K - 50$ (jakau $K - 500$)



ESIM 3 PALAAN :)

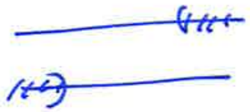
NOLLAHYPOTEESIN OIKEUDENKÄYNTI

AJATUS Jos $t(\underset{\sim}{y})$ todistaa nollahyp. vastaan, niin H_0 voidaan hylätä



← KRIITTINEN ALUE

TODISTAMINEN VASTAAN $= t(\underset{\sim}{y})$ on kriit. alueella



KYSYMYS

MITEN KRIITT. ALUE TULISI VALITA?

TK. PÄÄTÖS vrt OIKEUDENKÄYNTI

	H_0 hyv.	H_0 hyl.
H_0 tosi	OK	HYLK. VIRHE
H_1 tosi	HYV. VIRHE	OK

TP 2

	H_0 vap.	H_0 tuomitaan
H_0 syytön	OK	syytön tuomitaan!
H_0 syyll.	syyll. vap.	OK

MERKITSEVYYSTASO (MÄÄR 6.1)

C kriit. alue, t testisuure

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(t(\underset{\sim}{Y}) \in C) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(H_0 \text{ hylätään})$$

Ns: "pieni yläraja hylkäysvirheen todennäköisyydelle?"

PERINTEISET MERKITSEVYYSTASOT

$\alpha = 0{,}05$ (aineisto tod. lievästi nollaa vastaan) melkein merkitsevä

$\alpha = 0{,}01$ merkitsevä

$\alpha = 0{,}001$ erittäin merkitsevä

TÄMÄN VALITSEMME ITSE!

KUINKA LÖYDÄMME SOPIVAN KRIITTISEN ALUEEN VALITULLA MERKITSEVYYSTASOLLA?

PALAAN TÄHÄN

3. HAVAITTU MERKITSEVYYSTASO ELI p-ARVO

NYKYÄÄN KUN TESTIN TULOS RAPORTOIDAAN KERROTAAN
- MERKK. TASO α
- PÄÄTÖS
- p-ARVO

MÄÄR kun $\overline{\qquad\quad}\,t(H_1)$

$$p = p(\underset{\sim}{y}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta \left(t(\underset{\sim}{Y}) \geq t(\underset{\sim}{y}) \right)$$

kun $t(H_1)\overline{\qquad\quad}\cdots$

$$p = \sup \mathbb{P}_\theta \left(t(\underset{\sim}{Y}) \leq t(\underset{\sim}{y}) \right)$$

kun $t(H_1) \;\overline{\quad\underset{t_0}{|}\quad}\; t(H_1)$

$$p = \sup \mathbb{P}_\theta \left(|t(\underset{\sim}{Y}) - t_0| \geq |t(\underset{\sim}{y}) - t_0| \right)$$

OSOITTAUTUU (TP 2) ETTÄ

JOS $p < \alpha$ (tai $p \leq \alpha$), niin testi hylkää H_0:n

SANALLISESTI: MITÄ pienempi p-arvo SEN PAHEMMIN HAVAINNOT OVAT RISTIRIIDASSA H_0:n kanssa.

TOISTOKOETULKINTA (AINAKIN kun H_0 on yksinkertainen tai testisuure on [illegible])

JOS TOIST. TESTIÄ NOLLAH. OLLESSA VOIMASSA N KERTAA, niin NOIN $p \cdot N$ TESTEISTÄ SAATU ARVO OLISI VÄHINTÄÄN YHTÄ HUONOA H_0:aa kohtaan

ESIM 2 Kaksisuuntainen testi $t(H_1) \;\overline{\quad\underset{0}{|}\quad}\; t(H_1)$

- $t(\underset{\sim}{Y}) = \dfrac{\overline{Y} - 10}{S/\sqrt{25}} \sim t_{24}$ kun H_0 pätee
- $t(\underset{\sim}{y}) = \dfrac{\overline{y} - 10}{s/\sqrt{25}} = \dfrac{9{,}9 - 10}{0{,}22/\sqrt{25}} \approx -2{,}2727$
- Nyt kun $\theta \in \Theta_0$ (eli H_0 pätee) niin $\mathbb{P}_\theta \left(|t(\underset{\sim}{Y})| \geq |t(\underset{\sim}{y})| \right)$

$= 2\mathbb{P}(T \geq 2{,}2727)$, $\quad T \sim t_{24}$

$= 2(1 - F_{24}(2{,}2727))$

$\approx 0{,}0323$

Koska luku on sama kaikilla $\theta \in \Theta_0$

$$\Rightarrow p = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\ldots) = \sup_{\theta \in \Theta_0} 0{,}0323 = 0{,}0323$$

$\therefore$ HAVAITTU MERKITSEVYYSTASO eli p-arvo

$p \approx 0{,}0323 < 0{,}05$

$> 0{,}01$

Hylkäisimme H_0:n merkitsevyystasolla 0,05 JA H_0 jäisi voimaan —||— 0,01.

KERTAUS TESTAUS

~~lähtökohta~~

ESIM 1 (lanttipeli)

AINEISTO: $n = 100$, $k = 58$ (kruunua)

TIL. MALLI: $\underline{K} \sim \text{Bin}(n, \theta) = \text{Bin}(100, \theta)$, $\theta \in [0,1] = \Theta$

NOLLAHYP.:

$H_0: \theta = \frac{1}{2}$ $(\theta \in \Theta_0 = \{1/2\})$

VASTAHYPOT. (kaksisuunt.)

$H_1: \theta \neq \frac{1}{2}$ $(\theta \in \Theta_1 \in [0,1] \setminus \{1/2\})$

TESTISUURE $t(\underset{\sim}{y}) =$ "kruunujen lkm"

$\rightarrow t(\underset{\sim}{Y}) = \underline{K}$

kriittisiä Hoil

0 50 100

JOTEN

p-arvo $p = p(\underset{\sim}{y}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(|\underline{K} - 50| \geq |t(\underset{\sim}{y}) - 50|)$, $t(\underset{\sim}{Y}) = K$, $k = 58$

$= \mathbb{P}_{1/2}(|K - 50| \geq \underbrace{|58 - 50|}_{=8})$

~~$= \mathbb{P}_{1/2}(\ldots 8 \leq K \ldots 50)$~~

42 58

$= \underbrace{\mathbb{P}_{1/2}(\underline{K} \leq 42)}_{=F_K(42)} + \underbrace{\mathbb{P}_{1/2}(K \geq 58)}_{=1-F_K(57)}$

R

$\approx 0{,}066 + 0{,}0066$

$\approx 0{,}133$

Jos taas $n = 1000$ ja $k = 580$

420 580
0 500 1000

vast. p-arvo olisi $\mathbb{P}_{1/2}(\underline{K} \leq 420) + \mathbb{P}_{1/2}(K \geq 580)$, $\sim \text{Bin}(1000, 1/2)$

R

$\approx 4{,}697 \cdot 10^{-7} = 0{,}000000469$

ESIM 2 (kaksisuuntainen t-testi)

AINEISTO: $n = 25$, $\underset{\sim}{y} = (y_1, \ldots, y_{25})$, $\bar{y} = 9{,}9$, $s = 0{,}22$

TIL. MALLI: $Y_1, \ldots, Y_{25}$ ⫫, $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

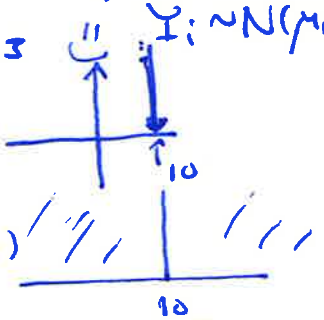
(ERÄS NIISTÄ, VRT H. TEHT 3)

NOLLAHYP:

$H_0: \mu = 10$ $((\mu, \sigma^2) \in$

VASTAHYP.:

$H_1: \mu \neq 10$ (kaksisuunt. vaihtoeht.)



TESTISUURE t-testisuure

$\mu_0 = 10$

$t(\underset{\sim}{y}) = \dfrac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$, $\quad T = \dfrac{\bar{Y} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = t(\underset{\sim}{Y})$

p-arvo (kaksisuunt.)

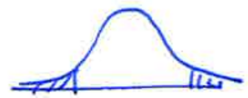
$p(\underset{\sim}{y}) = \sup_{\underbrace{\theta \in \Theta_0}_{=\{\mu = 10,\ \sigma^2 > 0\}}} \mathbb{P}_\theta(|T - 0| \geq \underbrace{|t(\underset{\sim}{y}) - 0|}_{=t})$

t arvo

suuruus sama

$= \mathbb{P}(|T| \geq |t|)$, $T \sim t_{n-1}$

$= 2(1 - F_{n-1}(|t|))$



LASKIMME VIIMEKSI ETTÄ

$$t = \frac{\bar{y}-10}{s/\sqrt{25}} = \frac{9{,}9-10}{0{,}22/\sqrt{25}} \approx -2{,}2727 \quad R$$

JOTEN p-arvoksi saadaan R

$$p = 2(1-F_{24}(+2{,}2727)) \approx 0{,}03228$$

PAL. MIELEEN MITÄ p-arvo (eli HAVAITTU MERKITSEVYYSTASO) KERTOO:

Jos $p < \alpha$, NIIN TESTI HYLKÄÄ H_0:n.

↳ VALITTU MERK. TASO

ESIM 1 Jos $\alpha = 0{,}05$ (melko merkitsevä) tai $\alpha = 0{,}1$ niin aineisto ei anna viitt. todisteita H_0:aa vastaan eli H_0 jää voimaan

Jos $n = 1000$, niin $p < 0{,}001$ joten jopa merkitsevyystasolla $\alpha = 0{,}001$ testi hylkäisi nollahypoteesin.

HUOM SU-ESTIMAATTI kummassakin $\hat{\theta} = 0{,}58$ ($\neq 0{,}$

ESIM 2 Jos $\alpha = 0{,}05$ niin testi hylkäisi H_0:n

Jos $\alpha = 0{,}01$, niin tällöin H_0 jää voimaan

p-arvo — KRIITTINEN ALUE C määrää MERKITSEV. TASO

$p < \alpha$

voidaan osoittaa (TP 2) KATS. ESIM z-testillä: $t(\underset{\sim}{y}) \in C_\alpha$

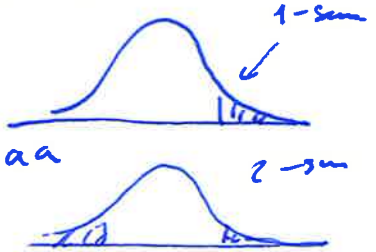
t_{obs} $= c_\alpha$

c_α

$$\alpha = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(t(\underset{\sim}{Y}) \in C) = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(T \geq c_\alpha) = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(\text{HYLK. VIRHE})$$

MERK. TASO α on TÄYSIN VALITTAVISSA JA MITTAA HYLK. VIRHEEN TN:ÄÄ.

- p-arvo on tn (tai pienin yläraja), jolla H_0:n pätiessä $t(\underset{\sim}{Y})$ tuottaisi aineistoa vähintään yhtä huonosti H_0:aa tukevan arvon
- pieni arvo viittaa aineiston todistavan H_0:aa vastaan



- testin päätös voidaan lukea p-arvosta: jos $p \underset{(=)}{<} \alpha$, niin testi hylkää H_0:n ja muuten se jää voimaan p-arvo ei ole tn, että H_0 pitäisi paikkansa

- FREKV. SYY
- BAYESILÄINEN: $\mathbb{P}(H_0 \text{ tosi} \mid \underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{y})$

$$\neq \mathbb{P}(t(\underset{\sim}{Y}) \geq t(\underset{\sim}{y}) \mid H_0 \text{ tosi})$$

Z-testi

(Norm. jakauman od. testaus kun varianssi tunn.)

$Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ ⊥⊥ ← tunnettu.

YKSISUUNT. TESTI

TIEDÄMME $\dfrac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ on saranasuure (jolla sitä voidaan johtaa mukava testi.)

AINEISTO $\underset{\sim}{y} \to \bar{y}$, n = koko

tunnettu ↙

NOLLAHYP. (os. 1) $H_0: \mu = \mu_0$ $(\Theta_0 = \{\mu_0\})$

$H_1: \mu > \mu_0$ $(\Theta_1 = (\mu_0, \infty))$ ↙ mahdolli

μ_0

$t(\underset{\sim}{y}) = \dfrac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ on tunnusluku (koska σ ja μ_0 tunn.)

p-arvo

$$p = \underbrace{\sup_{\theta \in \Theta_0}}_{\mu = \mu_0} \mathbb{P}_\theta(\underset{= t(\underset{\sim}{Y})}{Z} \geq \underbrace{t(\underset{\sim}{y})}_{= z})$$

$$= \mathbb{P}_{\mu_0}(Z \geq t(\underset{\sim}{y})) = \mathbb{P}(Z \geq t(y))$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq \underbrace{t(y)}_{= z}) = 1 - \Phi(z)$$

α val. merk. taso: testi hylkäisi H_0:n jos $p = 1 - \Phi(z) < \alpha$

KRIITTINEN ALUE (c_α, ∞)

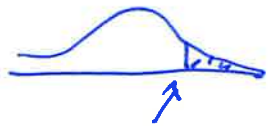
testi hylkää jos $t(\underset{\sim}{y}) = z > c_\alpha$ ↙ $\sim N(0,1)$

$\Rightarrow$ MERKK. TASO $\alpha = \sup_{\mu = \mu_0} \mathbb{P}(Z > c_\alpha)$

$= \mathbb{P}(Z > c_\alpha) = 1 - \Phi(c_\alpha)$

$\Rightarrow \Phi(c_\alpha) = 1 - \alpha$

$\Rightarrow c_\alpha = q(1 - \alpha)$



c_α

p-arvon avulla

Hylk. $1 - \Phi(z) < \alpha$

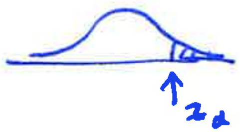
$\Leftrightarrow \Phi(z) > 1 - \alpha \Rightarrow z > \underset{= c_\alpha}{q(1 - \alpha)}$

JOS TÄLLE $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$

ON KAKSI TAPAA RATK. HYLKÄÄKÖ TESTI H_0:n MERK. TASOLLA α

1) LASK. p JA $p < \alpha$

2) LASK. $z = f(y)$ JA ... $z_\alpha = q(1-\alpha)$
HYLK. JOS $f(y) > z_\alpha$.



VOIT. OSOITTAA, että SAMA TESTISUURE $z = f(y) = \dfrac{\bar y - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

TOIMII MYÖS $H_0: \mu \le \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$:lle

p-arvo $p = \sup_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu(Z \ge z)$

$$= \sup_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}\Big(Z \ge \underbrace{z - \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{= z + \frac{|\mu-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}}\Big) \qquad \frac{\bar Y - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar Y - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$= \mathbb{P}(Z \ge z) = 1 - \Phi(z)$$

sama kuin edellä!

KRIITT. ALUE $\alpha = \sup_{\mu \le \mu_0} \mathbb{P}_\mu(Z \ge c_\alpha)$

JAK.-U.-EVAKSI

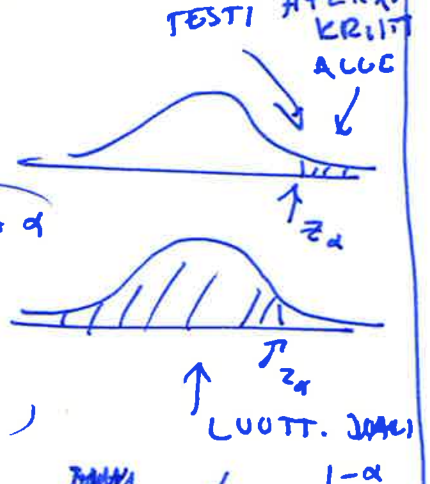
$= \mathbb{P}(Z \ge c_\alpha) \Rightarrow c_\alpha = z_\alpha = q(1-\alpha)$

TÄRKEÄ HUOMIO

(MUTTA TARK. KÄSITTELY TP 2)

TESTI HYLKÄÄ JOS μ_0 EI KUULU LUOTT. VÄLILLE LUOTT. TASOLLA $1-\alpha$

MERK. TASOLLA α



eli

$p < \alpha \Rightarrow \mu_0 \notin [\bar y - z_\alpha \sigma/\sqrt{n}, \infty)$

KAKSISUUNT. Z-testi

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \ne \mu_0$

SAMA TESTISUURE $z = f(y)$

p-arvo $p = \sup_{\mu \in \Theta_0} \mathbb{P}_\mu(|Z| \ge |z|)$

$= \mathbb{P}(|Z| \ge |z|) = 2(1 - \Phi(|z|))$

KRIIT. ALUE $\alpha = \sup \mathbb{P}_\mu(|Z| \ge c_\alpha)$

$= \mathbb{P}(|Z| \ge c_\alpha) = 2(1 - \Phi(c_\alpha))$

$\iff \Phi(c_\alpha) = 1 - \alpha/2$

$\iff c_\alpha = q(1-\alpha/2) = z_{\alpha/2}$

TESTI HYLK. $|z| > z_{\alpha/2}$

$p < \alpha \iff 1 - \Phi(|z|) < \alpha/2 \iff \Phi(|z|) > 1 - \alpha/2 \iff |z| > z_{\alpha/2}$