Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 9, 10.5.2017

1. Finanssimarkkinoilla on N arvopaperia. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i > 0$ ja arvopaperit $2, \ldots, N$ ovat riskillisiä. Arvopaperin n hinta hetkellä nolla on $S_n(0)$ ja arvo hetkellä yksi $S_n(1)$. Oletetaan, että riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden kovarianssimatriisi on kääntyvä ja että odotustuotot eivät kaikki ole samoja.

Toimijalla on hetkellä nolla käytettävissään pääoma $U_0 > 0$. Tämä sijoitetaan hetkellä 0 vuodeksi markkinoille. Olkoon CAP-mallin mukainen odotustuottoa r vastaava optimaalinen arvopaperiin n sijoitettava määrä $v_n^*(r)\, U_0$, $n = 1, \ldots, N$, $r > i$.

Hetkellä 1 salkku realisoidaan ja samassa yhteydessä luovutetaan aiempien sopimusten nojalla k_n kappaletta arvopaperia n sopijaosapuolille, $n = 1, \ldots, N$. Operaatioiden jälkeen toimijalla on hallussaan eräs varallisuus U_1 hetkellä 1. Toimija ottaa salkun valinnassa lähtökohdaksi asetelman, jossa varallisuus U_0 tuottaa varallisuuden U_1 tarkasteluvuotena. Salkku valitaan siten, että odotustuotto on r ja tuottoasteen varianssi on minimaalinen. Merkitään

$$\varrho = \sum_{n=1}^{N} k_n \frac{S_n(0)}{U_0}.$$

Muotoile salkun valintaongelma matemaattiseksi optimointitehtäväksi.

2. (jatkoa) Oletetaan, että $\varrho \in (0, 1)$ ja että $r > (1 - \varrho)i - \varrho$. Osoita, että optimaalinen arvopaperiin n sijoitettava määrä on $((1 - \varrho)z_n^* + y_n)\, U_0$, $n = 1, \ldots, N$, missä

$$z_n^* = v_n^* \left(\frac{r + \varrho}{1 - \varrho} \right) \quad \text{ja} \quad y_n = k_n S_n(0)/U_0.$$

3. Markkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ (arvopaperi 1) ja riskilliset arvopaperit $2, \ldots, N$. Arvopaperin n lukumäärä on L_n, $n = 1, \ldots, N$. Olkoon markkinoiden hinnoittelija ϕ muotoa $\phi = g(A(1))$, missä g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio ja $A(1)$ on markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1. Oletetaan lisäksi, että riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden yhteisjakauma on multinormaalinen (jolloin tunnetusti parilla (R_n, R^*) on kaksiulotteinen normaalijakauma kaikilla n). Osoita, että

$$\mathbb{E}(R_n) = i + \frac{\text{Cov}\,(R_n, R^*)}{\text{Var}\,(R^*)}(\mathbb{E}(R^*) - i), \quad n = 1, \ldots, N,$$

missä R_n arvopaperin n tuottoaste ja R^* riskillisten arvopapereiden kokonaistutottoaste.

Tehtävässä oletetaan tunnetuksi ns. Steinin lemma: jos (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa ja g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio, niin

$$\text{Cov}\,(X, g(Y)) = \text{Cov}\,(X, Y)\mathbb{E}(g'(Y)).$$

4. Olkoon $(\bar{\phi}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ jälleenvakuutusmarkkinoiden tasapainotila ja

$$\mathbb{E}(\bar{\phi}\bar{X}_k) = \mathbb{E}(\bar{\phi}X_k), \quad k = 1, \ldots, K,$$

missä $X_1, \ldots, X_K$ ovat alkuperäiset vakuutetut kokonaisvahinkomäärät. Osoita, että $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi.

5. Olkoot jälleenvakuutusmarkkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \alpha_k z + \beta_k, \ \ z \in \mathbb{R},$$

missä $\alpha_k > 0$ ja $\beta_k \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, $k = 1, \ldots, K$. Määrää kaikki markkinoiden tasapainotilat.