

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 8

Näillä tehtävillä voi korottaa laskuharjoituksista saatavien lisäpisteiden määrää. Palautettava kirjallisesti laskuharjoitusten pitäjille **perjantaihin 12.5.2017 klo 16 mennessä**.

1. Osoita, että absoluuttisesti jatkuva funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva.
2. Onko funktio $f(x) = \sqrt{x}$ absoluuttisesti jatkuva välillä $[0, 1]$?
3. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva. Merkitään $V(x) = V_f(a, x)$. Osoita, että f on absoluuttisesti jatkuva $\iff V$ on absoluuttisesti jatkuva.
4. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva ja $E \subset [a, b]$ 0-mittainen joukko ($m(E) = 0$). Osoita, että myös kuvajoukko fE on 0-mittainen.
5. Onko funktio $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

absoluuttisesti jatkuva?

6. Olkoot $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuvia. Osoita, että:
 - (a) $f'g \in L^1([a, b])$ ja $fg' \in L^1([a, b])$,
 - (b) fg on absoluuttisesti jatkuva,
 - (c)

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$