Matematiikan laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 7
3-4.5.2017

1. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen ja $m(E) > 0$. Osoita, että tällöin joukko
$$E - E = \{a - b : a, b \in E\}$$
sisältää välin.

2. (a) Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Osoita, että jokainen G:n piste on G:n tiheyspiste.
   (b) Näytä esimerkillä, että myös avoimen joukon G komplementin piste voi olla G:n tiheyspiste.
   (c) Konstruoi sellainen $\mathbb{R}$:n osajoukko A, joka ei ole avoin, vaikka jokainen piste $x \in A$ on A:n tiheyspiste.

3. Olkoon $\mathbb{Q} = \{q_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ rationaalilukujen joukko. Asetetaan
$$f(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ q_k \leq x}} 2^{-k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Osoita:
   (a) $f \colon \mathbb{R} \to (0, 1)$ on aidosti kasvava.
   (b) f on jatkuva pisteessä $x \iff x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. (a) Anna (helppo) esimerkki funktiosta $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on rajoitetusti heilahteleva, muttei jatkuva.
   (b) Olkoon $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$
   Osoita, että f on jatkuva, muttei rajoitetusti heilahteleva.

5. Funktio $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-funktio, jos on olemassa sellainen vakio $L < \infty$, että $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ kaikilla $x, y \in [a, b]$. Osoita, että:
   (a) jatkuvasti derivoituva funktio $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on Lipschitz,
   (b) jokainen Lipschitz-funktio on rajoitetusti heilahteleva,
   (c) jokainen Lipschitz-funktio on derivoituva m.k.

6. Olkoon $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva. Merkitään $V(x) = V_f(a, x)$. Osoita, että f on jatkuva $\iff$ V on jatkuva.