Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 4
5-6.4.2017

1. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus, $1 \leq p < \infty$, ja $f_i \in L^p(X)$, $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että f on sellainen mitallinen funktio, että $\|f_i - f\|_p \to 0$. Osoita, että on olemassa jonon (f_i) osajono (f_{i_k}) siten, että $f_{i_k} \to f$ melkein kaikkialla.

2. Olkoon $\mu(X) < \infty$. Osoita, että kaikilla $f \in L^\infty(\mu)$ pätee
$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$
Päteekö tämä ilman oletusta $\mu(X) < \infty$? Perustele vastauksesi.

3. Olkoon $C(I)$, $I = [0, 1]$, kaikkien jatkuvien funktioiden $f\colon I \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus.
   (a) Osoita, että $C(I) \subset L^p(I, m_1)$ kaikilla $1 \leq p \leq \infty$.
   (b) Osoita, että $C(I)$ on täydellinen normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen.
   (c) Näytä esimerkillä, ettei $C(I)$ ole täydellinen normin $\|\cdot\|_p$ suhteen millään $1 \leq p < \infty$.

4. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja $1 \leq p, q < \infty$.
   (a) Oletetaan, että $f_i \in L^p$, $i \in \mathbb{N}$, $\|f_i - f\|_p \to 0$ ja $f_i \to g$ m.k. Osoita, että $f = g$ m.k.
   (b) Oletetaan, että $f_i \in L^p \cap L^q$, $i \in \mathbb{N}$, $\|f_i - f\|_p \to 0$ ja $\|f_i - g\|_q \to 0$. Osoita, että $f = g$ m.k.

5. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f, f_k \in L^p(X)$, $k \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että
$$f_k \to f \text{ m.k. ja } \|f_k\|_p \to \|f\|_p.$$
Osoita, että $\|f_k - f\|_p \to 0$, ts. $f_k \to f$ $L^p(X)$:ssä.

6. Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = \frac{p}{p-1}$. Sanomme, että jono (u_j), $u_j \in L^p$, *suppenee heikosti L^p:ssä* kohti funktiota $u \in L^p$, jos kaikilla $g \in L^q$
$$\int_X u_j g \, d\mu \to \int_X u g \, d\mu, \text{ kun } j \to \infty\,.$$
   (a) Osoita, että $f_j \to f$ heikosti L^p:ssä, jos $f_j \to f$ L^p:ssä.
   (b) Olkoon $X = [0, 1]$ ja $u_j = j^{1/p}\chi_{[0,1/j]}$, kun $j = 1, 2, \ldots$. Näytä, että jono (u_j) suppenee heikosti L^p:ssä kohti 0-funktiota, mutta ei L^p:ssä (ts. $\|u_j\|_p \not\to 0$).