Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 3
29-30.3.2017

1. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja olkoon $f \in L^\infty(X)$. Osoita, että
$$\|f\|_\infty = \inf\big\{\sup\{|f(x)|\colon x \in X \setminus N\}\colon N \in \Gamma, \mu(N) = 0\big\}.$$

2. Olkoon $\mu(X) < \infty$ ja $1 \le q < p < \infty$.
   (a) Osoita *käyttämättä* Hölderin epäyhtälöä, että $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.
   (b) Osoita (Hölderin epäyhtälöllä), että
   $$\|f\|_q \le \|f\|_p \, (\mu(X))^{(p-q)/pq},$$
   kun $f \in L^p(\mu)$.

3. Osoita, että $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subset L^r(\mu)$, jos $1 \le p \le r \le q \le \infty$.

4. Olkoon X mikä tahansa joukko, $\Gamma = \mathcal{P}(X)$, ja μ lukumäärämitta. [Tällöin merkitään $\ell^p(X) = L^p(X, \mu)$.] Olkoon $1 \le q \le p \le \infty$. Osoita, että $\ell^q(X) \subset \ell^p(X)$ ja
$$\|f\|_\infty \le \|f\|_p \le \|f\|_q \le \|f\|_1.$$
   Vertaa tätä ja Lausetta 1.33.

5. Oletetaan, että $f_j \to f$ avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $g_j \to g$ avaruudessa $L^q(\mathbb{R}^n)$, missä $p, q > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Osoita, että $f_j g_j \to fg$ avaruudessa $L^1(\mathbb{R}^n)$.

6. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $1 \le p \le q < \infty$, ja $A \in \Gamma$ sellainen mitallinen joukko, että $0 < \mu(A) < \infty$. Osoita, että
$$\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f|^q \, d\mu\right)^{1/q}$$
   kaikilla $f \in L^q(A)$.