Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 2
22-23.3.2017

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Oletetaan, että $(X, \mathcal{F}, \nu)$ on täydellinen mitta-avaruus (ts. ν on täydellinen mitta) s.e. $\Gamma \subset \mathcal{F}$ ja $\nu|\Gamma = \mu$. Osoita, että $\bar{\Gamma} \subset \mathcal{F}$ ja $\nu|\bar{\Gamma} = \bar{\mu}$.

2. Olkoon $\mu = m_n| \operatorname{Bor} \mathbb{R}^n$. Etsi esimerkki sellaisesta Borel-funktioiden $f_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}$, jonosta ja funktiosta $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, että $f_j(x) \to f(x)$ μ-m.k. x, kun $j \to \infty$, mutta f ei ole Borel-funktio.

3. Etsi sellainen jono $p = (p_1, p_2, \ldots)$, että sitä vastaavan Cantorin joukon $E(p)$ mitta on $\frac{1}{4}$.

4. Olkoon (f_j) jono ei-negatiivisia Lebesguen mitallisia funktioita $f_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että
$$\int_{\mathbb{R}} f_j \, dm \to 0.$$
Päteekö tällöin, että $f_j(x) \to 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$. [Perustelut!]

5. Olkoon $f \colon B^n(0,1) \to \dot{\mathbb{R}},\ f(x) = \log|x|$. Millä arvoilla $p \in [1, \infty)$ pätee
$$\int_{B^n(0,1)} |f|^p \, dm < \infty?$$

6. Anna esimerkki $\mathbb{R}$:ssä integroituvista funktioista $f_i, f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$, joilla $f_i \to f$ tasaisesti, mutta
$$\int_{\mathbb{R}} |f_i - f| dm \not\to 0.$$