

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Harjoitus 1
15-16.3.2015

Näillä tehtävillä voi korottaa laskuharjoituksista saatavien lisäpisteiden määrää. Tarkemmin sanoen, nämä lasketaan osoittajaan muttei nimittäjään lisäpisteitä laskettaessa.

1. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus ja $E \in \Gamma$. Osoita, että
 - (a) $\Gamma_E = \{A \in \Gamma : A \subset E\}$ on σ -algebra E :ssä ja
 - (b) $\mu|_{\Gamma_E}$ on mitta E :ssä.
2. Olkoon X epätyhjä joukko. Määritellään $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ asettamalla $\mu^*(\emptyset) = 0$ ja $\mu^*(A) = 1$, jos $A \neq \emptyset$. Osoita, että μ^* on ulkomitta. Mitä ovat μ^* -mitalliset joukot?
3. Olkoot $I = [0, 1] \times [0, 1]$ ja $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$, kun $(x, y) \in I \setminus \{(0, 0)\}$, sekä $f(0, 0) = 0$. Laske integraalit

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

Onko f integroitava yli I :n?

4. Olkoon $f : (0, 1) \times (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}.$$

Näytä, että

$$\int_0^1 \left(\int_1^\infty f(x, y) dy \right) dx \neq \int_1^\infty \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

ja kommentoi Fubinia.

5. Määritellään jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti joukko

$$\tilde{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x - y \in A\}.$$

Osoita, että $m_{2n}(\tilde{A}) = 0$, jos $m_n(A) = 0$.

6. Osoita, että $B \subset \mathbb{R}$ on Borel-joukko, jos ja vain jos se on Borel-joukko myös tasossa. Toisin sanoen,

$$\text{Bor } \mathbb{R} = \{B \subset \mathbb{R} : \{(x, 0) : x \in B\} \in \text{Bor } \mathbb{R}^2\}.$$

Onko Lebesgue-mitallisten joukkojen σ -algebroidilla $\text{Leb } \mathbb{R}$ ja $\text{Leb } \mathbb{R}^2$ samanlainen yhteys?