Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Harjoitus 6
1.3-3.3.2017

Erilliskoe on 15.3 ja siihen on ilmoittauduttava viimeistään kymmenen päivää ennen.

1. Anna esimerkki jonosta jatkuvia funktioita $f_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$, mutta Riemannin integraalien $\int_0^1 f_i(x)\,dx$ jonolla ei ole raja-arvoa.

2. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x+\sin^k x}}\,dx.$$

3. Olkoon $E_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, jono mitallisia, erillisiä joukkoja ja $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ mitallinen. Osoita, että
$$\int_{\cup_j E_j} f = \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} f.$$

4. [”Laskeva MKL (monotonisen konvergenssin lause)”]
Olkoot $f_j\colon E \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita siten, että $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$.
Todista: Jos $\int_E f_1 < \infty$, niin
$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

5. Olkoon
$$f_n(x) = \frac{1+e^{-n|x|}}{1+x^2},\; x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}.$$
Laske
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty f_n(x)\,dx.$$

6. Oletetaan, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen ja $f\colon E \to [0,+\infty]$ on mitallinen funktio, jolle $\int_E f < \infty$. Asetetaan
$$E_j = \{x \in E\colon f(x) > j\},\; j \in \mathbb{N}.$$
Osoita, että
$$\lim_{j\to\infty} j \cdot m(E_j) = 0.$$