YO Lyhyt Matematiikka, kevät 2017

Tehtävä 11. Maakellarin sisälämpötila vaihtelee hitaasti vuodenaikojen mukaan. Alin lämpötila $2°C$ saavutetaan helmi-maaliskuun vaihteessa, ja ylin lämpötila $8°C$ saavutetaan elo-syyskuun vaihteessa. Oletetaan, että lämpötilan vaihtelua voidaan kuvata sinikäyrällä. Määritä sellaiset parametrien A, B, c ja t_0 arvot, että lämpötila T saadaan kaavalla

$$T = A + B\sin\left(c\left(t + t_0\right)\right),$$

kun ajan t yksikkönä on kuukausi. Tehtävässä kaikki kuukaudet voidaan olettaa yhtä pitkiksi.

Ratkaisu ja kommentit

Kiinnostuin tehtävästä, sillä usein tyypillisessä parametrien määrittäminen funktiolle -tehtävässä, funktiot ovat joko muotoa $y = ax + b$ tai $y = ax^2 + bx + c$, ja määritettäviä parametrejäkään usein ei ole kuin 1 tai 2. Tässä tehtävässä on poikkeavasti sinifunktio, jonka ominaisuudet ovatkin ratkaisussa olennaisin apuväline parametrien määrittämiseen. Lisäksi tehtävässä on peräti 4 lähtötilanteessa tuntematonta vakiota.

Sinifunktion ominaisuudet:

- Funktion arvojen vaihteluväli $[-1, 1]$, erityisesti pienin ja suurin arvo
- Funktion jaksollisuus, ja jakson pituus 2π

Jos tuntee arvot, joita sinifunktio voi saada, pääsee hyvin kiinni vakioihin A ja B. Selkeästi funktio $T\left(t\right)$ saa suurimmat arvonsa, kun $B\sin\left(c\left(t + t_0\right)\right)$ saa suurimmat arvonsa (vastaavasti myös pienimmät). Nyt B voidaan valita joko positiiviseksi tai negatiiviseksi (kuitenkin selkeästi $B \neq 0$), joista molemmat tuottavat vaihtoehtoisen ratkaisun tehtävälle.

Jos esimerkiksi valitaan, että $B > 0$, tiedetään, että $T\left(t\right)$ saa suurimman arvonsa, kun sinifunktio saa arvon 1, ja vastaavasti pienimmän, kun sinifunktio saa arvon -1. Nyt saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} 8 = A + B \cdot 1 \\ 2 = A + B \cdot (-1)\,, \end{cases}$$

josta edelleen ratkaisuiksi:

$$\begin{cases} A = 5 \\ B = 3. \end{cases}$$

Parametri c saadaan sinifunktion jaksollisuuden avulla. Lämpötila on jaksollinen siten, että yhden jakson pituus on 12 kk. Koska sinifunktion jakson pituus on 2π, saadaan

$$c\,(t + t_0 + 12) = c\,(t + t_0) + 2\pi,$$

josta edelleen ratkaisemalla saadaan $c = \frac{\pi}{6}$. Viimeisenä parametri t_0 saadaan tiedosta, milloin funktion tulisi saada suurimmat ja pienimmät arvonsa. Jos valitaan t olemaan aika kuukausina vuoden alusta ($t \geq 0$), saa funktio pienimmän arvonsa (eli vuoden alin lämpötila) kun $t = 2$, josta saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\,(2 + t_0)\right) &= -1 \\ \frac{\pi}{6}\,(2 + t_0) &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{aligned}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Edelleen ratkaisemalla saadaan, että $t_0 = -5 + 12n$, josta parametri t_0 voidaan valita millä tahansa $n \in \mathbb{Z}$. Esimerkiksi siis sopivaksi funktioksi $T\,(t)$ saadaan

$$T\,(t) = 5 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\,(t - 5)\right)$$

Jos oltaisiin valittu aluksi $B < 0$, ratkaisu olisi muotoa

$$T\,(t) = 5 - 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\,(t + t_0)\right),$$

missä $t_0 = 1 + 12n, n \in \mathbb{Z}$.

Tehtävän ratkaisuun olennaisesti tarvitaan seuraavien kurssien tietoja:

MAB1 Lausekkeet ja yhtälöt

- ongelmien muotoileminen yhtälöiksi
- ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen

MAB8 Matemaattisia malleja III

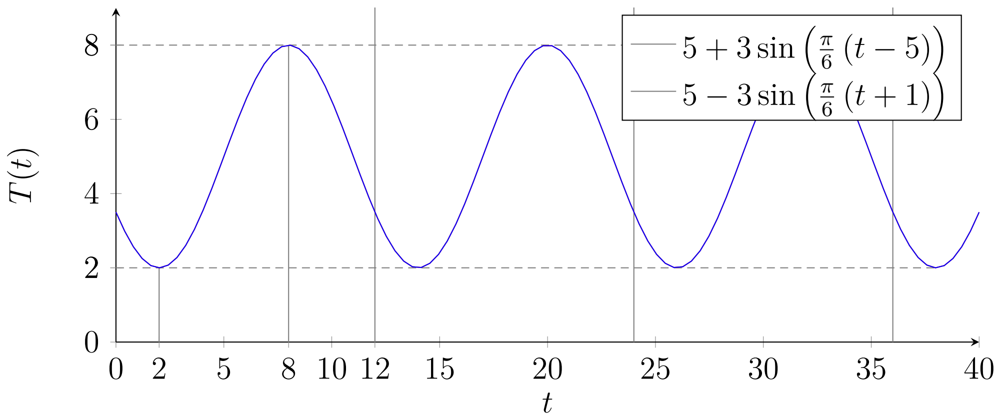
- muotoa $f(x) = A \sin(bx)$ olevien funktioiden kuvaajat jaksollisten ilmiöiden mallintajana

Tehtävä selvästi on melko haastava, ja varmasti olisi tasoltaan sopiva myös pitkään matematiikkaan. Jos tehtävä olisi suunnattu uuden opetussuunnitelman käyneille, olisi se liian vaikea, sillä trigonometristen funktioiden käsittelyä vähennetään lyhyessä matematiikassa.

Kuitenkin tykkään tehtävän luonteesta. Se on sidottu lyhyelle matematiikalle tyypilliseen tapaan käytäntöön, ja ratkaisu vaatii monipuolista ymmärrystä sinifunktion käyttäytymisestä. Tehtävä on mielestäni varsin sopiva noin loppupään tehtäväksi.

Tarkastus

Graafisilla apuvälineillä voi tarkastella saadun funktion kuvaajaa, ja näyttääkö se sopivalta tehtävänannon suhteen:



Lisäksi, ratkaisun välivaiheissakin voi miettiä saatujen tuloksien mielekkyyttä, ja tarkastella funktion toimivuutta sijoittamalla sinne eri arvoja.