12/k17

Kevään 2017 lyhyen matematiikan tehtävä 12 edusti uudenlaista tehtävätyyppiä matematiikan kirjoituksissa. Tehtävässä oli tarkoituksena esittää sanallisesti omaa ymmärrystä derivaatasta. Tällainen tehtävätyyppi on otettu mukaan etenkin kokeen sähköistymisen vuoksi. Tietokoneella sanallinen tehtävä on helpompi ja nopeampi tuottaa kuin matemaattisten symboleiden hässäkkä. Toisaalta tällainen tehtävä mittaa hyvin opiskelijan ymmärrystä.

YTL:n hyvän vastauksen piirteet:

a) Kuvaaja kasvava kun t=16 → Derivaatta positiivinen (2p)
b) Derivaatta tangentin kulmakerroin, ääriarvokohdassa tangentti vaakasuora → eli derivaatta nolla. (2p)
(extrapiste jos osaa kertoa, että derivaatan nollakohta ei takaa ääriarvoa)
c) Kohdassa t=19,3 on piikki, jolloin funktio ei ole derivoituva. Siis Kallen menetelmä ei toimi. (2p)

Tehtävän hyvät puolet:

Mitään laskuja ei siis tarvitse tehdä. Matematiikan osaamisessa monesti vaikeat asiat kyllä osataan laskea mekaanisesti läpi, vaikkei tehtävästä ymmärräkään mitään. Tällainen tehtävä mittaa todellista ymmärtämistä, eikä edes yhtään kaavaa tarvitse muistaa.

Tehtävä liittyy vanhan opetussuunnitelman pakolliseen kurssiin 4, matemaattinen analyysi:

> *4. Matemaattinen analyysi (MAB4)*
>
> *TAVOITTEET*
> *Kurssin tavoitteena on, että opiskelija*
> *• tutkii funktion muutosnopeutta graafisin ja numeerisin menetelmin*
> *• ymmärtää derivaatan käsitteen muutosnopeuden mittana*
> *• osaa tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla*
> *• oppii sovellusten yhteydessä määrittämään polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon.*
>
> *KESKEISET SISÄLLÖT*
> *• polynomifunktion derivaatta*
> *• polynomifunktion merkin ja kulun tutkiminen*
> *• polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen*
> *• graafisia ja numeerisia menetelmiä*

Jos kurssilla on tavoitteiden mukaisesti ymmärtänyt derivaatan muutosnopeuden mittana, on tämän tehtävän a- ja b-kohta helppoja. C-kohta sen sijaan haastaa ymmärtämisen funktion derivoituvuudesta, jonka ymmärtäminen menee selvästi syvemmälle. Näin ollen tehtävä a- ja b-kohtien osalta mittaa hyvin kurssin tavoitteiden osaamista.

Kritiikkiä:

Tehtävässä on annettu sykekäyrä, joka ei todellisuudessa ole jatkuva vaan diskreetti, eikä siten derivoituva. Tätä ei olla otettu huomioon YTL:n hyvän vastauksen piirteissä. (Mielestäni se olisi kannattanut korvata vaikka korkeuskäyrällä, jolloin diskreettisyydeltä oltaisiin vältytty. Epäderivoituvuuskohta oltaisiin saatu esimerkiksi portaista.) Käyrä koostuu siis yksittäisistä pisteistä, jotka ollaan yhdistetty suoran pätkillä. Näin muodostuu paloittain määritelty funktio, joka ei ole derivoituva kuin näillä approksimoiduilla pätkillä. Tai sitten diskreettiä käyrää on approksimoitu jollain derivoituvalla funktiolla.

Jos oletetaan, että käyrää on approksimoitu jollain ”siistillä” funktiolla jolloin saadaan ainakin melkein kaikkialla derivoituva funktio, ei c-kohdan epäderivoituvuuskohta olekaan itsestäänselvyys. Kuvaajassa näyttää olevan piikki, mutta voiko siitä olla varma että kyseessä on todella piikki vai hyvin ”jyrkkä mutka”. Lisäksi kuvaajan epäselvyydestä johtuen ei voi olla varma, että piikki edes on kohdassa t=19,3min? Lyhyen matematiikan keskeiset sisällöt koostuvat polynomifunktioista, enkä usko, että lyhyessä juurikaan puhutaan epäderivoituvuudesta. Taitaa pitkässäkin lähinnä vain itseisarvofunktio nousta ei-kaikkialla derivoituvaksi esimerkiksi. Taitava opiskelija periaatteessa voisi havaita, ettei piikkikohtaan saa asetettua tangenttia vain yhdellä tavalla, josta päättelemällä voisi saada täydet pisteet.

Jos olettaa että sykekäyrä on kaikkialla derivoituva paitsi näissä piikkikohdissa, voidaan tällainen piikki huomata myös a-kohdassa, kun t=16, jolloin $f'(16)$ ei ole olemassa. Tämä piikki ei tosin ole yhtä jyrkkä, mutta sillä ei ole vaikutusta derivoituvuuteen. Vastaavasti kohdassa t=15,2 funktio ei ole derivoituva.

Yhteenveto:

Mielestäni tällainen tehtävä sopisi erittäin hyvin myös pitkään matematiikkaan.

Tehtävä mittaa hyvin derivaattakäsitteen ymmärtämistä.

Kuvaajan epäselvyys ja tarkempi tarkastelu tekevät tehtävästä epäselvän eli mielestäni tehtävän idea on erittäin hyvä, mutta toteutus ei niinkään. Toisaalta, jos kokelas osaa ottaa vastauksessaan huomioon nämä seikat, tulisi siitä saada täydet pisteet. Eli kahdella täysin eri vastauksella voi saada täydet pisteet, kunhan vain perustelee tarpeeksi hyvin.