Lukiomatematiikka
MAA yo K2017 T. 3

T3

Olkoot $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} + 5\bar{k}$. Millä parametrin $-2 \leq t \leq 2$ arvolla vektorin $\bar{c}_t = t\bar{a} + (1-t)\bar{b}$ pituus on mahdollisimman pieni?

Ratkaisu:
Kerrotaan ensin vektori $\bar{c}_t$ auki ja sievennetään pituuden kaava.

$$\begin{aligned} \bar{c}_t &= t\bar{a} + (1-t)\bar{b} \\ &= t(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}) + (1-t)(2\bar{i} + 5\bar{k}) \\ &= (2-t)\bar{i} + 2t\bar{j} + (5-2t)\bar{k} \end{aligned} \tag{1}$$

ja vektorin pituus

$$\begin{aligned} |\bar{c}_t| &= \sqrt{(2-t)^2 + (2t)^2 + (5-2t)^2} \\ &= \sqrt{9t^2 - 24t + 29} \end{aligned} \tag{2}$$

Vektorin pituus on pienimmillään vastaavan funktion $f(x) = 9x^2 - 24x + 29$ minimikohdassa, kun $x \in [-2, 2]$

$$f'(x) = 18x - 24 = 0,$$

kun $x = \frac{4}{3}$. Huomataan, että $-2 < \frac{4}{3} < 2$. Koska funktion f kuvaaja muistuttaa ylöspäin aukeavaa paraabelia se saa pienimmän arvonsa välin päätepisteessä, tai derivaatan nollakohdassa. Tässä tapauksessa nollakohta kuuluu tutkitulle välille. Siis

$$\text{vektorin } \bar{c}_t \text{ pituus on pienimmillään kun } t = \frac{4}{3}$$