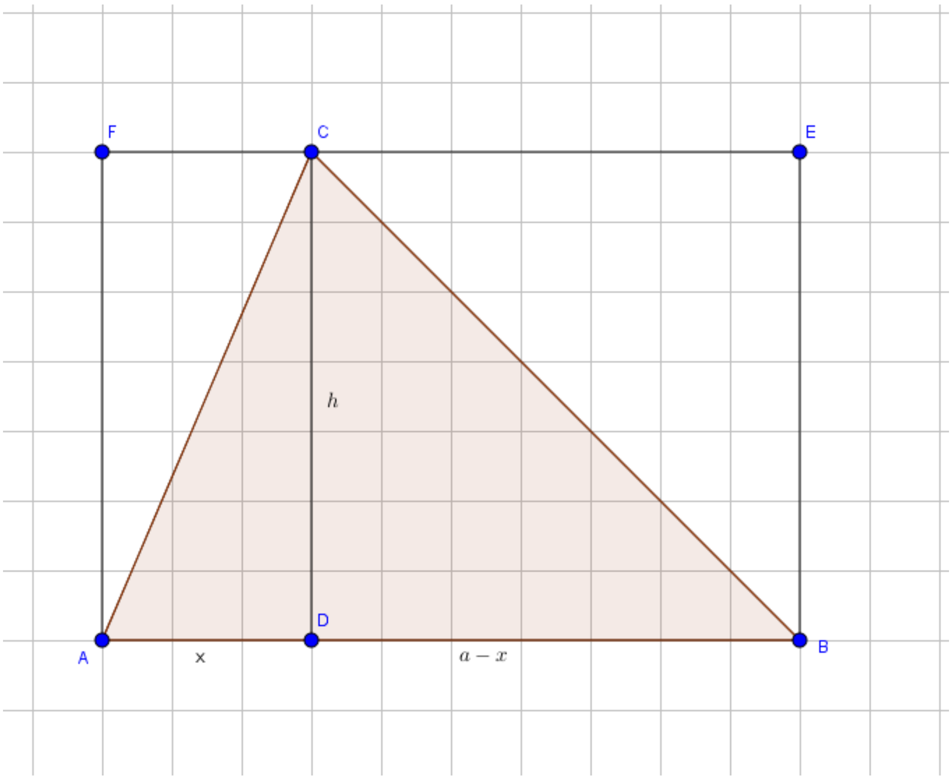
harj. 2 t. 5

Kolmion pinta-alan kaava $A = \frac{1}{2}ah$, missä a= jonkin sivun pituus ja h= sitä vastaavan kohtisuoran korkeusjanan pituus

Piirretään mallikuva kolmiosta, jossa kaikki kulmat ovat teräviä kulmia:



Merkitään janojen pituuksia siten, että

a = AB

h = CD

x = AD jolloin BD = a-x

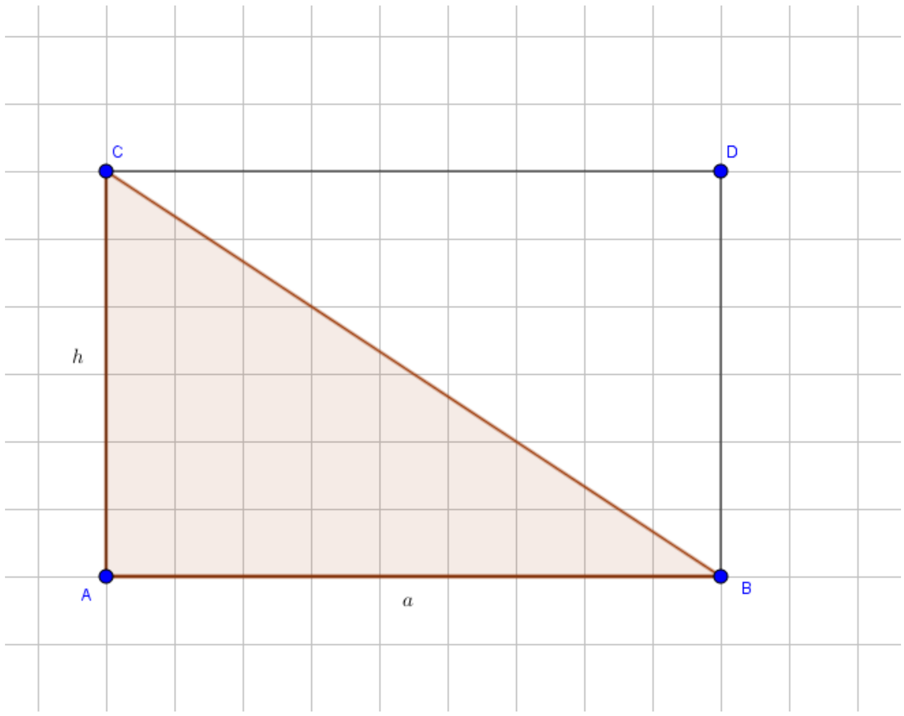
Tarkastellaan kolmiota ACD, jonka sivu AC on suorakulmion ADCF lävistäjä. Siten kolmion ACD pinta-ala on puolet suorakulmion ADCF pinta-alasta hx, ja on siten $\frac{1}{2}hx$.

Tarkastellaan sitten kolmiota BCD, jonka pinta-ala on vastaavasti puolet suorakulmion DBEC pinta-alasta h(a-x) eli se on $\frac{1}{2}h(a-x)$.

Kolmion ABC pinta-ala on kolmioiden ACD ja BCD pinta-alojen summa eli

$\frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}$h(a-x) = $\frac{1}{2}$hx + $\frac{1}{2}$ha - $\frac{1}{2}hx =$ $\frac{1}{2}$h(x+a-x) = $\frac{1}{2}ha$

Tarkastellaan sitten kolmiota, jossa on suora kulma. Piirretään mallikuva.



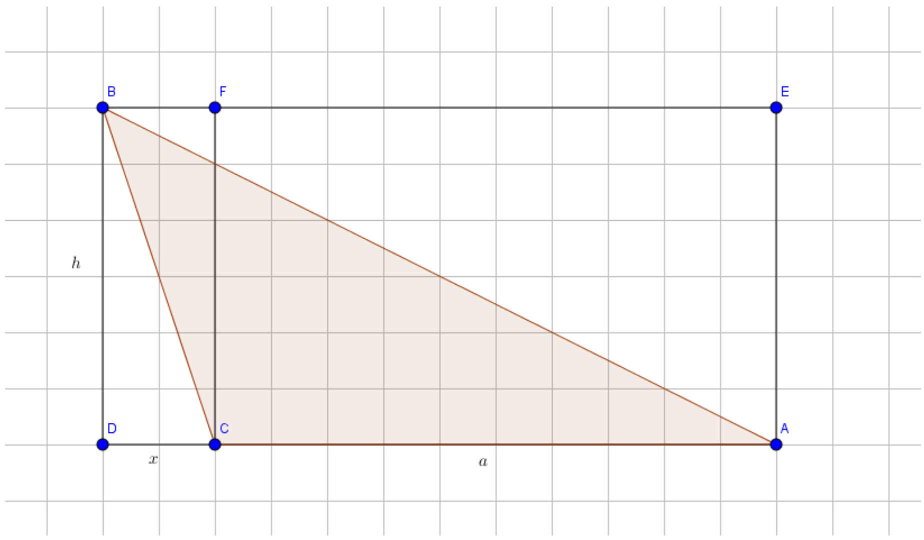
Merkitään janojen pituuksia siten, että

a = AB

h = AC

Tarkastellaan kolmiota ABC, jonka sivu BC on suorakulmion ABDC lävistäjä. Siten kolmion ABC pinta-ala on puolet suorakulmion ABDC pinta-alasta ah eli on $\frac{1}{2}ah$.

Tarkastellaan vielä viimeiseksi sellaista kolmiota, jossa on tylppä kulma. Piirretään mallikuva.



Merkitään janojen pituuksia siten, että

a = AC

h = BC

x = CD

Tarkastellaan kolmiota ABD, jonka sivu AB on suorakulmion AEBD lävistäjä. Siten kolmion ABD pinta-ala on puolet suorakulmion AEBD pinta-alasta h(a+x) eli on $\frac{1}{2}h(a+x)$

Vastaavasti kolmion CBD pinta-ala on puolet suorakulmion CFBD pinta-alasta hx eli on $\frac{1}{2}hx$.

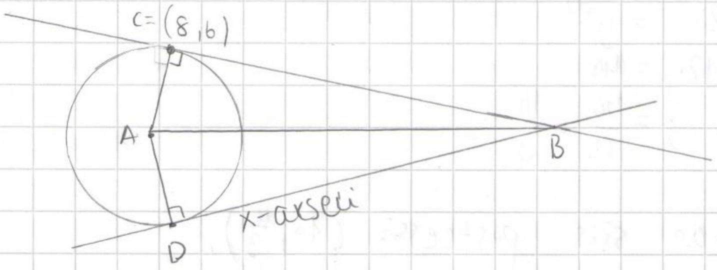
Siten kolmion ABC pinta-ala on

$\frac{1}{2}h(a+x) - \frac{1}{2}hx = \frac{1}{2}ha + \frac{1}{2}hx - \frac{1}{2}hx = \frac{1}{2}ha$

Näin ollaan saatu johdettua kolmion pinta-alan kaava kaikissa tapauksissa.

harj. 2 t. 4

4. Hahmotellaan ensin mallikuva.

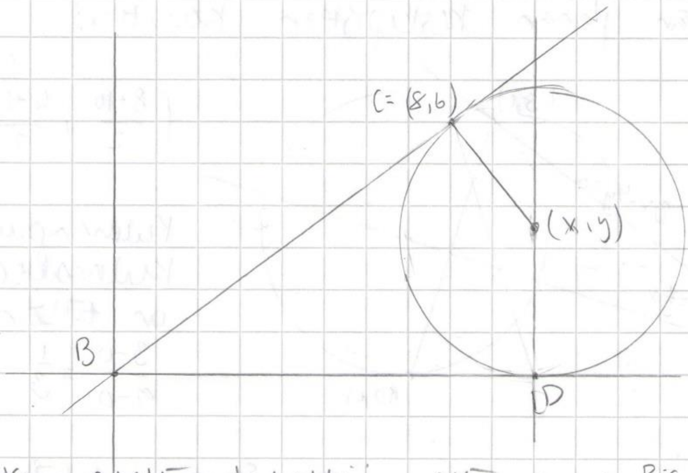


Kuvaan muodostuu kaksi kolmiota ABC ja ABD. Kolmioilla on yhteinen sivu AB. Sivut AD ja AC ovat yhtä pitkiä.

Huomataan että kolmiot ABC ja ABD ovat yhteneviä, josta seuraa että janat CB ja DB ovat yhtä pitkiä.

tapa 1

Piirretään uusi kuva koordinaatistoon:



Koska edellä todettiin, että janat BC ja BD ovat yhtä pitkiä, lasketaan pisteen C etäisyys pisteestä B (eli tässä tapauksessa origosta).

Pythagoraan lause: $\sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10$

Nyt tiedetään, että ympyrä sivuaa x-akselia pisteessä $D=(10,0)$

Merkitään ympyrän keskipistettä (x,y). Tiedetään, että se sijaitsee suoralla $x=10$. Lisäksi se sijaitsee yhtä kaukana pisteistä $C=(8,6)$ ja $D=(10,0)$. Tästä saadaan yhtälö

$$\sqrt{(10-8)^2+(y-6)^2} = \sqrt{(10-10)^2+(y-0)^2}$$
$$\sqrt{4+(y-6)^2} = y$$
$$4+y^2-12y+36 = y^2$$
$$12y = 40$$
$$y = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

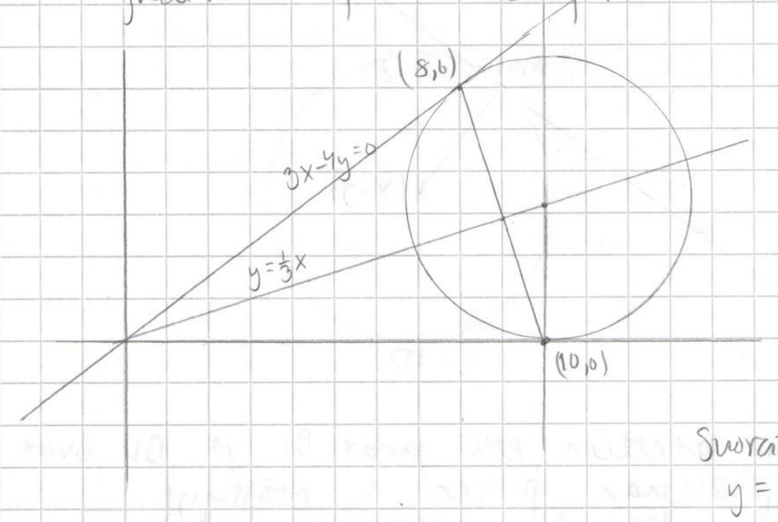
Keskipiste on siis pisteessä $(10, \frac{10}{3})$.

Ympyrän säde on $\frac{10}{3}$.

2. tapa

Lasketaan kulmanpuolittajan avulla:

Kulmanpuolittaja kulkee pisteitä $(8,6)$ ja $(10,0)$ yhdistävän janan keskipisteen kautta:



$$\left(\frac{8+10}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (9,3)$$

Kulmanpuolittajan kulmakerroin on tällöin
$$\frac{3-0}{9-0} = \frac{1}{3}$$

Suoran yhtälö on siis
$$y = \frac{1}{3}x$$

Koska ympyrä sivuaa x-akselia pisteessä $(10,0)$ niin ympyrän keskipiste on suoralla $x = 10$. Täten keskipiste on suorien $x=10$ ja $y=\frac{1}{3}x$ leikkauspiste $(10, \frac{10}{3})$

Ympyrän säde on pisteiden $(10, \frac{10}{3})$ ja $(10,0)$ välinen etäisyys $\frac{10}{3}$.