

Oletetaan, että p , q ja r ovat positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että luku

$$(p + q)(q + r)(r + p)$$

on parillinen.

Ratkaisutapa 1.

Oletetaan, että p , q ja r ovat positiivisia kokonaislukuja. $(p + q)(q + r)(r + p)$ on parillinen luku, jos jokin sen tekijöistä $(p + q)$, $(q + r)$ tai $(r + p)$ on parillinen luku. Parilliset luvut ovat muotoa $2a$, jossa a on jokin kokonaisluku, ja parittomat luvut ovat muotoa $2b + 1$, jossa b on jokin kokonaisluku.

Oletetaan seuraavissa esimerkeissä, että x ja y ovat kokonaislukuja.

Kahden parillisen luvun summa on parillinen: $2x + 2y = 2(x + y)$, missä x ja y ovat kokonaislukuja.

Kahden parittoman luvun summa on parillinen: $(2x + 1) + (2y + 1) = 2x + 2y + 2 = 2(x + y + 1)$

Parittoman luvun ja parillisen luvun summa on pariton: $(2x + 1) + 2y = 2(x + y) + 1$

Tehdään taulukko yllä olevien esimerkkien mukaisesti, jossa voidaan tutkia luvun parillisuutta. Seuraavassa taulukossa 1 tarkoittaa parillista ja 0 paritonta.

p	r	q	$(p + q)$	$(q + r)$	$(r + p)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

Taulukosta voidaan nähdä, että luku $(p + q)(q + r)(r + p)$ on parillinen luku kaikilla kokonaisluvuilla p , r ja q .

Ratkaisutapa 2.

Tehdään vastaoletus, että luku $(p + q)(q + r)(r + p)$ on pariton luku joillakin positiivisilla kokonaisluvuilla p , q ja r . Tällöin luvut $(p + q)$, $(q + r)$ ja $(r + p)$ ovat kaikki parittomia lukuja. Kolmen parittoman luvun summa on pariton, mutta $(p + q) + (q + r) + (r + p) = 2p + 2q + 2r = 2(p + q + r)$, mikä on ristiriita. Luvun $(p + q)(q + r)(r + p)$ on oltava parillinen luku.

Ratkaisutapa 3.

Tehdään vastaoletus, että luku $(p + q)(q + r)(r + p)$ on pariton luku joillakin positiivisilla kokonaisluvuilla p , q ja r . Tällöin luvut $(p + q)$, $(q + r)$ ja $(r + p)$ ovat kaikki parittomia lukuja.

Jos p on parillinen, niin $(p + q)$ on pariton, jos q on pariton. Jos taas q on pariton, niin $(q + r)$ on pariton, jos r on parillinen. Koska r on parillinen ja p on parillinen, niin $(r + p)$ on parillinen. Tämä on ristiriitainen vastaoletuksen kanssa.

Ratkaisutapa 4.

Lasketaan kaikki tapaukset ensimmäisen ratkaisutavan tapaisesti mutta ilman taulukkoa.