Lukiomatematiikka

Harjoitus 4

Tehtävät julkaistaan tiistaina 11.4. ja ne käsitellään pääsiäisen jälkeen torstaina 20.4.

Tehtävä	**Vastuuhenkilö**
1	Meliina Rantakaulio
2	Emilie Lejeune
3	Iiris Helojärvi
4	Johanna Heiskanen
5	Alexandra Hatziantoniadis
6	Joni Alvajärvi
7	Joni Hanski

Meliina Rantakaulio

Tehtävä 1.

Määritä vakio a siten, että

a) funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = 1$

b) funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$, kun

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x = 1 \\ -2ax^2 + a - 1, & x > 1. \end{cases}$$

a) Funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = 1$, jos ja vain jos sen toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 1$ ovat yhtäsuuret. Funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1} (ax^2 - 3) = a \cdot 1^2 - 3 = a - 3$$

ja oikeanpuoleinen raja-arvo on

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1} (-2ax^2 + a - 1) = -2a \cdot 1^2 + a - 1 = -a - 1.$$

Siten toispuoleiset raja-arvot ovat yhtäsuuret, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} a - 3 &= -a - 1 \\ 2a &= 3 - 1 \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Vastaus: $a = 1$

b) Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$, jos ja vain jos sen raja-arvo kyseisessä kohdassa on olemassa ja yhtäsuuri kuin funktion arvo kohdassa $x = 1$. Kohdassa a) osoitettiin, että funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = 1$, jos ja vain jos $a = 1$. Funktion raja-arvoksi kohdassa $x = 1$ saadaan siis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = a - 3 = -2.$$

Funktion arvo kohdassa $x = 1$ on

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \neq -2.$$

Koska funktion arvo kohdassa $x = 1$ on erisuuri kuin sen raja-arvo kyseisessä kohdassa, ei f ole jatkuva millään vakion a arvolla.

Vastaus: ei ratkaisua

Tehtävä 2.

Osoita, että yhtälöllä $x^3 = x - 2$ on tasan yksi ratkaisu.

Todistus. Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x^3 - x + 2 = 0$. Etsitään siis funktion $f(x) = x^3 - x + 2$ nollakohtaa.

Funktio on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva kaikkialla.

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} 3x^2 - 1 &= 0 \\ 3x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Tehdään kulkukaavio

Kaaviosta nähdään, että funktion minimi on kohdassa $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja koska $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2,38.. > 0$ niin funktion juuren täytyy olla välillä $[-2, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$. Koska funktio on tällä välillä aidosti kasvava, voidaan osoittaa Bolzanon lauseen avulla, että tällä yhtälöllä on vain yksi ratkaisu.

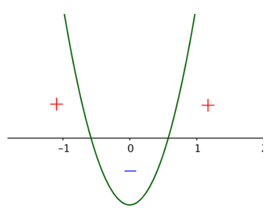
Bolzanon lause Jos funktio $f(x)$ on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja sen arvot päätepisteissä ovat erimerkkiset, ts. $f(a)f(b) < 0$, on sillä avoimella välillä $]a, b[$ nollakohta, ts. piste c, jolle $f(c)$.

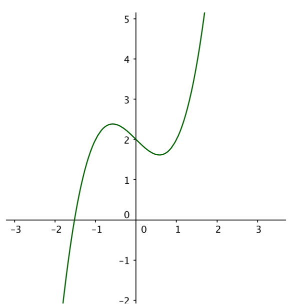
$$\begin{aligned} f(-2) &= -4 \\ f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) &= 2,38.. \end{aligned}$$

□

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗





Tehtävän ratkaisun saisi ratkaistua esimerkiksi Newtonin menetelmän avulla.

Newtonin algoritmi

x_0 on alkuarvo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{jossa } f'(x_n) \neq 0, n = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Valitaan alkuarvoksi $x_0 = -2$

2. Lasketaan nollakohdalle seuraava likiarvo x_1.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} \\ &= -2 - \frac{(-2)^3 - (-2) + 2}{3 \cdot (-2)^2 - 1} = -1,63636363\ldots \end{aligned}$$

3. Vaihdetaan alkuarvon x_0 tilalle $x_1 = -1,636363\ldots$

4. Lasketaan nollakohdalle seuraavat likiarvot x_2, x_3, x_4 ja x_5.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= -1,530392\ldots \\ x_3 &= -1,521441\ldots \\ x_4 &= -1,521379\ldots \\ x_5 &= -1,521379\ldots \end{aligned}$$

Saadaan siis jo neljännellä iteraatiolla tarpeeksi tarkka likiarvo nollakohdalle. Eli tällä yhtälöllä on siis tasan yksi ratkaisu $x \approx -1,5214$

Tehtävä 3. Anna esimerkki aidosti vähenevästä funktiosta $f :]0, 4[\to R$, jolle $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ ja jolla ei ole nollakohtia. Hahmottele funktion kuvaaja ja esitä funktion lauseke. Voiko f olla derivoituva koko määrittelyjoukossaan?

Ratkaisu. Tällaista funktiota ei ole olemassa. Jos nimittäin funktio f olisi aidosti vähenevä, olisi mahdotonta, että $f(1) < 0$ ja $f(3) > 0$. Tämä voi halutessaan todistaa epäsuorasti:

Oletetaan, että on olemassa aidosti vähenevä funktio $f :]0, 4[\to R$, jolle $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ ja jolla ei ole nollakohtia. Aito vähenevyys tarkoittaa, että jos $a, b \in]0, 4[$ ja $a < b$, niin $f(a) > f(b)$. Erityisesti $f(1) > f(3)$.

Toisaalta oletuksen mukaan

$$f(1) < 0 \text{ ja } f(3) > 0,$$

eli

$$f(1) < 0 < f(3)$$

eli

$$f(1) < f(3),$$

mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $f(1) > f(3)$.

Ei siis ole olemassa aidosti vähenevää funktiota $f :]0, 4[\to R$, jolle $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ ja jolla ei ole nollakohtia.

Joni Alvajärvi

Tehtävä 6.

a) Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)$. Määritä osasummat S_3 ja S_n. Suppeneeko sarja?
b) Määritä lukujonon raja-arvo, jos se on olemassa, kun $a_n = \frac{n^2+n}{2n^2+3}$.

Ratkaisu.

- Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ n:s osasumma on $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
- Sarja suppenee, jos ja vain jos sarjan osasummien muodostama jono (S_n) suppenee, eli on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} S_n$.
- Aritmeettisessa sarjassa peräkkäisten termien erotus on vakio.
- Aritmeettisen sarjan n:s osasumma on $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

a) Sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)$ on aritmeettinen, koska

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2,$$

eli kahden peräkkäisen termin erotus on aina vakio.

<u>Sarjan kolmas osasumma S_3:</u>
Tapa 1:

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3}(2k+1) = \underbrace{2\cdot 1+1}_{a_1} + \underbrace{2\cdot 2+1}_{a_2} + \underbrace{2\cdot 3+1}_{a_3} = 3+5+7 = 15.$$

Tapa 2:

$$S_3 = \frac{3(a_1+a_3)}{2} = \frac{3(3+7)}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

<u>Sarjan n:s osasumma S_n:</u>

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(3+2n+1)}{2} = 2n + n^2.$$

Koska

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(2n+n^2) = \infty,$$

niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)$ hajaantuu.

b) Koska

$$a_n = \frac{n^2+n}{2n^2+3} = \frac{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n^2}(2+\frac{3}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}},$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2},$$

eli $\lim_{k\to\infty}(a_k) = \dfrac{1}{2}$.

5. Osoita erotusosamäärän raja-arvon avulla, että funktio f(x)= |2x|
   a) on derivoituva kohdassa x=2
   b) ei ole derivoituva kohdassa x=0.

- Derivaatan määrittely voidaan esittää muodossa

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Funktio on kohdassa x_0 derivoituva, jos ja vain jos sen toispuoleiset derivaatat ovat voimassa ja yhtäsuuret. Tällöin on $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

a) $x = 2$

- Funtion vasemmanpuolinen derivaatta kohdassa x_0 on:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Joten

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{|2x| - |2 \cdot 2|}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} 2 = 2$$

Koska jos $x < 2$ (esim. $x = 1$) $2x > 0$, joten $|2x| = 2x$.

- Funktion oikeanpuolinen derivaatta kohdassa x_0 on:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Joten

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} \frac{|2x| - |2 \cdot 2|}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} 2 = 2$$

Koska jos $x > 2$ (esim. $x = 3$) $2x > 0$, joten $|2x| = 2x$.

Funktio on derivoituva kohdassa x=2, koska

$$f'_-(2) = f'_+(2) = 2$$

b) $x = 0$

- Funtion vasemmanpuolinen derivaatta kohdassa $x = 0$ on:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|2 \cdot x| - |2 \cdot 0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-2x}{x} = \lim_{x \to 2-} -2 = -2$$

Koska jos $x < 0$ (esim. $x = -1$) $2x < 0$, joten $|2x| = -2x$.

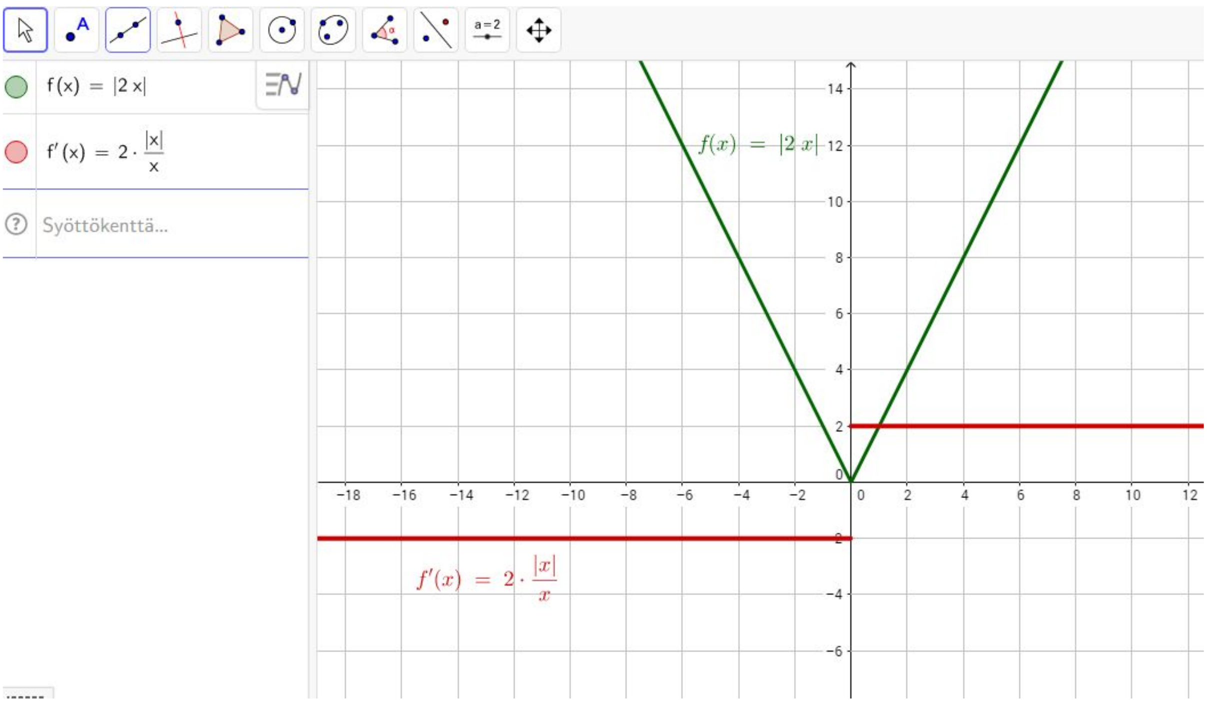
- Funktion oikeanpuolinen derivaatta kohdassa $x = 0$ on:

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|2 \cdot x| - |2 \cdot 0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to 2+} 2 = 2$$

Koska jos $x > 0$ (esim. $x = 1$) $2x > 0$, joten $|2x| = 2x$.

Funktio ei ole derivoituva kohdassa x=0, koska

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$$



Tehtävä 7

https://www.dropbox.com/s/p6bphclovhk785g/geometriatesti.pdf?dl=0

Tuon linkin takaa löytyy. T Joni.

Siisti ja näppärä ratkaisu, mutta kommentoin kuitenkin paria kohtaa:
i) Kappaleessa 1.3 trigonometristen lausekkeiden kohdalla olisi parempi käyttää kulmamuuttujana systemaattisesti a:ta eikä x:ää. Tällä hetkellä esim. yhtälöissä x = cos x ja (sin(x))^2 = 1 - x^2 muuttuja x on kahdessa eri roolissa, mikä hankaloittaa lukemista.
ii) Yhtälön (4) keskimmäisestä lausekkeesta pitäisi joko poistaa kerroin ½ tai muokata nimittäjää 4 -> 2.

Pari pienempää hienosäätöä:
iii) Kappale 1.1: “säde 12 m” → “halkaisija 12 m”
iv) Kappale 1.4: “yksikköympyrän sivu” → “yksikköympyrän säde”
v) Yhtälö (8): Vastaukseksi tulee 288 m^3.
-Joni A

Hei! Pitäisikö kaikkien kommentoida toisten tehtävien ratkaisuja? Saataisiin laajempi näkemys näistä tehtävistä.
T.Emilie

Moi! Kaipaisin kommenttia tehtävän 3 ratkaisusta. Mielestäni kysyttyä funktiota ei ole olemassa, eli joko tehtävä on kompa tai tehtävänannossa on virhe. Haluaisin kuitenkin kuulla mielipiteenne asiasta siltä varalta, että minulla on jokin ajatusvirhe tai aukko tiedoissa. -Iiris

Kiitos Joni ja Emilie! :) -Iiris

Tehtävän 3 ratkaisu vaikuttaa minusta oikealta! T. Emilie

Oikealta näyttää minustakin. Mietin pitkään onko tähän jokin koira haudattuna, mutta eipä kai sitten.
-Joni A

Minunkin mielestä t.3 on oikein :) t. Alexandra