

### Harjoitus 3: Differentiaali- ja integraalilaskentaa

1. Määritä vakio  $a$  siten, että
  - a) funktiolla  $f$  on raja-arvo kohdassa  $x = 1$
  - b) funktio  $f$  on jatkuva kohdassa  $x = 1$ , kun

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x = 1 \\ -2ax^2 + a - 1, & x > 1. \end{cases}$$

2. Osoita, että yhtälöllä  $x^3 = x - 2$  on tasan yksi ratkaisu.
3. Anna esimerkki aidosti vähenevästä funktiosta  $f: ]0, 4[ \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle  $f(1) < 0$ ,  $f(3) > 0$  ja jolla ei ole nollakohtia. Hahmottele funktion kuvaaja ja esitä funktion lauseke. Voiko  $f$  olla derivoituva koko määrittelyjoukossaan?
4. Tarkastellaan rationaalifunktioiden raja-arvoja nimittäjän nollakohdissa.
  - a) Hahmottele rationaalifunktioiden kuvaajia tilanteista, joissa funktiolla on raja-arvo nimittäjän nollakohdassa sekä tilanteista, joissa funktiolla on epäoleellinen raja-arvo  $\infty$  tai  $-\infty$  tai ei raja-arvoa nimittäjän nollakohdassa.
  - b) Anna jokaisesta a)-kohdan vaihtoehdosta esimerkki funktion lausekkeena.
5. Osoita erotusosamäärän raja-arvon avulla, että funktio  $f(x) = |2x|$ 
  - a) on derivoituva kohdassa  $x = 2$
  - b) ei ole derivoituva kohdassa  $x = 0$ .
6. a) Olkoon  $\sum_{k=1}^{\infty} (2k + 1)$ . Määritä osasummat  $S_3$  ja  $S_n$ . Suppeneeko sarja?  
 b) Määritä lukujonon raja-arvo, jos se on olemassa, kun  $a_n = \frac{n^2 + n}{2n^2 + 3}$ .
7. Ympyräpohjaisen teltan erästä halkaisijaa vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita niin, että kolmioiden hypotenuusat ovat teltan pohjalla. Laske teltan tilavuus, kun pohjan halkaisija on 12 m.