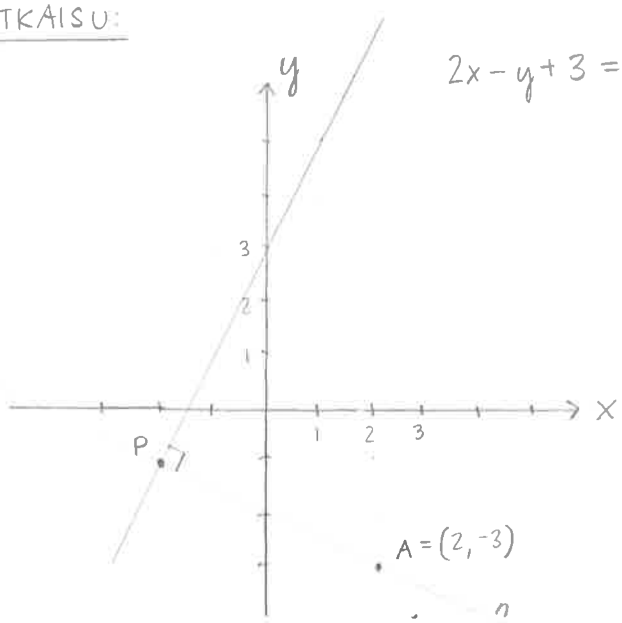
HARJOITUS 2, tehtävä 6

(6.) Mikä suoran $2x-y+3=0$ piste on lähinnä pistettä $(2,-3)$?
Ratkaise
a) analyyttisen geometrian tiedoilla
b) vektoreilla.

RATKAISU:

a)



$2x-y+3=0 \Leftrightarrow y=2x+3$

Merkitään suoran $y=2x+3$ ja pisteen A kautta kulkevan normaalin leikkauspistettä P:llä.

Koska suoran $y=2x+3$ kulmakerroin on 2, niin normaalin kulmakerroin $k_2 = -\frac{1}{2}$, sillä kohtisuoruudesta saadaan, että $k_1 \cdot k_2 = -1$, eli nyt
$2 \cdot k_2 = -1$
$\Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{2}$.

Muodostetaan seuraavaksi pisteen $A=(2,-3)$ kautta kulkevan normaalin yhtälö:
$y-(-3) = -\frac{1}{2}\cdot(x-2)$
$\Leftrightarrow y+3 = -\frac{1}{2}x+1$
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x-2$

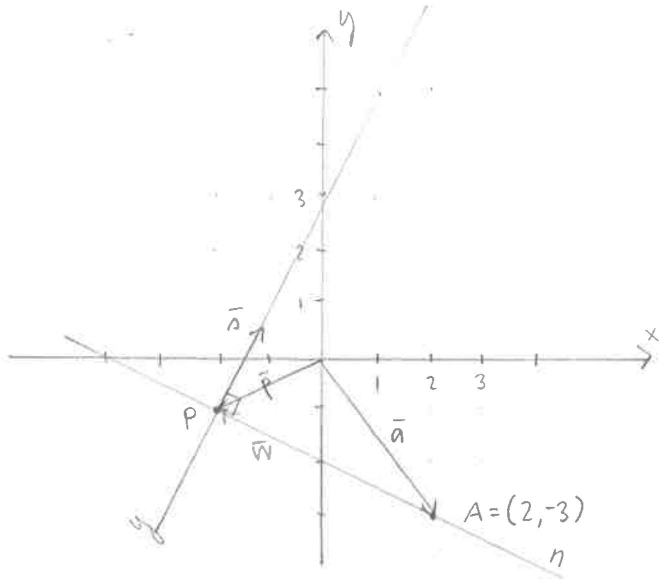
Suorien leikkauspiste $P=(x,y)$ saadaan selville ratkaisemalla yhtälöpari:

$$\begin{cases} y = 2x+3 & (1) \\ y = -\frac{1}{2}x-2 & (2) \end{cases} \quad \text{sij.}$$

$\Rightarrow$ $2x+3 = -\frac{1}{2}x-2 \quad |\cdot 2$
$4x+6 = -x-4$
$5x = -4-6$
$x = -2 \quad \|$ sij. yhtälöön (1)
$\Rightarrow y = 2\cdot(-2)+3 = -1.$

Joten leikkauspisteeksi saadaan $P=(-2,-1)$.

b) TAPA 1



Suoran $y = 2x+3$

- suuntavektori $\bar{s} = \hat{i} + 2\hat{j}$
- normaalivektori $\bar{n} = 2\hat{i} - \hat{j}$

Suoran $y = 2x+3$ pisteet ovat muotoa $(x, 2x+3)$.

$\bar{p} = \bar{a} + \bar{w} \Rightarrow \bar{w} = \bar{p} - \bar{a}$

$$\bar{w} = (x\hat{i} + (2x+3)\hat{j}) - (2\hat{i} - 3\hat{j})$$
$$= (x-2)\hat{i} + (2x+6)\hat{j}$$

$\bar{p} = x\hat{i} + (2x+3)\hat{j}$

Nyt koska vektorit $\bar{s}$ ja $\bar{w}$ ovat kohtisuorassa toisia vastaan, niin niiden pistetulon on oltava nolla.
Joten saadaan:

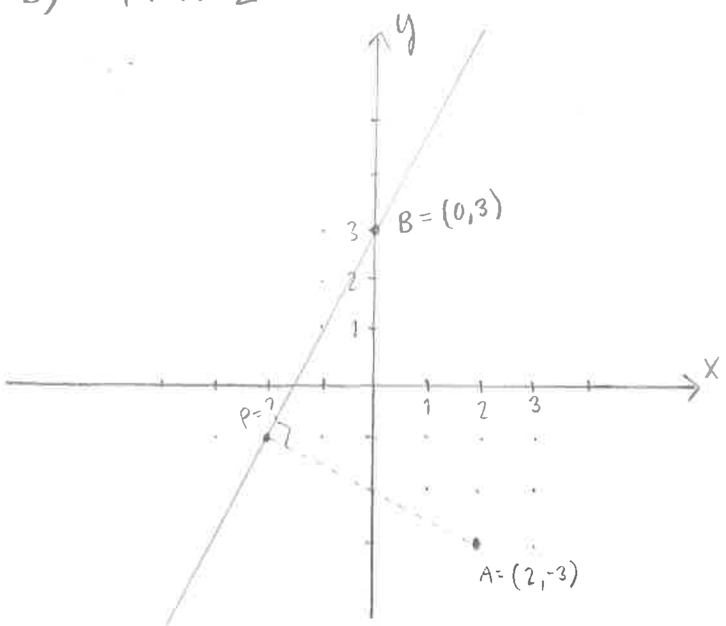
$$\bar{s} \cdot \bar{w} = 0$$
$$(1,2) \cdot (x-2,\ 2x+6) = 0$$
$$x - 2 + 2(2x+6) = 0$$
$$5x - 10 = 0$$
$$x = -2$$

Sijoittamalla $x = -2$, y:ksi saadaan:

$$y = 2x+3 = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$$

Joten kysytty piste on $P = (-2, -1)$.

b) TAPA 2



Valitaan suoralta $2x - y + 3 = 0$ piste $B = (0,3)$.

Suoran $y = 2x + 3$ suuntavektori $\bar{s} = \hat{i} + 2\hat{j}$

Halutaan selvittää pisteen P paikkavektori $\overline{OP}$.

Nyt

$$\overline{AP} = \overline{AB} + t\bar{s}$$
$$= (0-2)\hat{i} + (3-(-3))\hat{j} + t\hat{i} + 2t\hat{j}$$
$$= \underbrace{(t-2)}_{x_1}\hat{i} + \underbrace{(6+2t)}_{y_1}\hat{j}$$

Koska $\overline{AP} \perp \bar{s}$, niin pistetulon oltava nolla.

$$(t-2)\cdot(1) + (6+2t)\cdot(2) = 0$$
$$t - 2 + 12 + 4t = 0$$
$$5t + 10 = 0$$
$$t = -2$$

$$\overline{BP} = t\bar{s} = -2\bar{s} = -2(\hat{i} + 2\hat{j}) = -2\hat{i} - 4\hat{j} = (-2,-4)$$

Ja toisaalta $\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP}$
$= (0,3) + (-2,-4) = (-2,-1)$.

Näin ollen kysytty piste on $P = (-2,-1)$.