Geometrian perusteita

Matti Lehtinen

Oulun yliopisto

Kevätlukukausi 2013

Johdanto

Geometrian[1] asema ja merkitys matematiikan kentässä on vuosien kuluessa muuttunut. Se ei sellaisenaan enää pitkään ole ollut tutkimuksen eturintamaa (vaikka monet sen jälkeläiset suoraan alenevassa polvessa toki ovat). Matematiikan alkeisopetuksessa geometria on siirtynyt lähinnä leiki, laula ja askartele -osastoon. Kokemus on osoittanut, että monien verrattain pitkällekin matemaattisesti koulutettujen ihmisten (= mm. matematiikan opettajien!) geometrian tietämys on hämmästyttävän niukkaa.

Näitä havaintoja voi pitää kannustavina; ne sävyttävät aiheiden ja näkökulman valintaani. Pyrin esittelemään geometriaa hiukan sillä tavoin kuin sitä (oppi)koulussa vielä jokin vuosikymmen sitten tehtiin: aksiomaattisena ja deduktiivisena järjestelmänä. Kohdeyleisökseni ajattelen tulevat matematiikan opettajat. Talo ei kestä ilman perustusta. En usko matematiikan opetuksen kaikin osin onnistuvan ilman sitä perspektiiviä, jonka geometrian järjestelmän – ja myös siinä esiintyvien faktojen – tuntemus suo.

Useimmat yliopistotason perusgeometrian kurssit oppikirjat – joita esimerkiksi Yhdysvalloista löytyy runsaasti – lähtevät olettamasta, jonka mukaan opiskelijalla on koulusta saatu perusgeometrian tietous hallussa. Sen päälle aletaan sitten rakentaa lisää. Suomen oloissa näin ei oikein voi menetellä. Niinpä pyrinkin rakentamaan geometrian järjestelmää alusta eli aksioomista[2] lähtien. Esitietoja ei siis tarvita, ja samalla syntyy käsitys geometrian rakenteesta. Käyttämäni aksioomajärjestelmä on *David Hilbertin Grundlagen der Geometrie* -teoksen mukainen, mutta toisin kuin tuossa teoksessa (tai *Eukleideen Alkeissa*), aksioomat otetaan käyttöön vähitellen, tarpeen mukaan. Pääpaino ei kuitenkaan ole erityisesti aksiomatiikan kysymyksissä. Aksioomien riippumattomuuden ja järjestelmän täydellisyyden tarkastelu jää muihin yhteyksiin.

Aksioomista johdetaan geometrisen todistamisen perustyökalut kuten kolmioiden yhtenevyyslauseet. Aksioomien jälkeen esittelen joitakin geometrian järjestelmään sisältyviä ainakin oman käsitykseni mukaan mielenkiintoisia tuloksia. Tasogeometrian peruskuvauksiin tutustutaan. Kolmiulotteisen geometrian esittely on tehdään vähemmän pedanttisesti. Kurssin loppupuolella käydään vielä katsomassa projektiivisen geometrian alkeita ja "epäeuklidisia" geometrioita.

* * *

Melko suuri osa esityksen jatkuvuuden kannalta välttämättömiäkin päättelyaskelia on sijoitettu harjoitustehtäviin. Kurssin logiikan hahmottuminen vaatii ehdottomasti näiden läpikäymisen. Harjoitukset eivät ole laskuharjoituksia (sana ei ole onnistunut ainakaan matematiikan opiskelun yhteydessä) vaan pikemminkin geometrisen ajattelun harjoituksia.

Esitys käyttää hyväksi erinäisiä yleisen matematiikan perustuloksia, esimerkiksi ekvivalenssirelaation ominaisuuksia ja induktioperiaatetta.

---

[1] Kreikan $\gamma\varepsilon$ 'maa' ja $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ 'mitata'.

[2] Kreikan $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ 'arvostus, harkinta'.

1 Euklidisen tasogeometrian aksioomat

Geometriaa voidaan pitää ensimmäisenä suurisuuntaisena yrityksenä maailman – tässä tapauksessa tilan, avaruuden – matemaattiseksi mallintamiseksi. Malli rakentuu muutamasta käsitteestä, joistakin niitä toisiinsa kytkevistä aksioomista ja suunnattomasta määrästä aksioomien perusteella todeksi osoitettavia lauseita.

Geometrian aksioomajärjestelmä voidaan rakentaa eri tavoin. Tunnettuja ovat Eukleideen $\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$- eli *Alkeet*[1]-teoksessa noin 2300 vuotta sitten julkaisema järjestelmä ja David Hilbertin vähän yli sata vuotta sitten esittämä[2]. Viimeistään Hilbertin ajoista lähtien geometrian järjestelmä on perustunut aistihavainnoista irrotettuihin määrittelemättömiin peruskäsitteisiin *piste, suora, taso*. Vaikka geometriasta näin tehdään aivan abstrakti oppirakennelma, käsitteiden väliset relaatiot rakennetaan vastaamaan havaintomaailman mukaisia käsityksiämme pisteistä ja suorista. Rakennustyössä on ainoastaan pyrittävä huolellisesti välttämään pelkkiin havaintoihin perustuvia johtopäätöksiä.

Aksiomaattinen lähestymistapa ei tietenkään ole ainoa tapa mennä sisään geometriaan. Yksi suosittu tapa on ottaa käyttöön joukko kuvauksia ja käsitellä geometriaa oppina näiden kuvausten invarianssiominaisuuksista. (Tästä Felix Kleinin kuuluisasta vuoden 1872 *Erlangenin ohjelmasta* lähtevästä geometrian rakennusmallista saattaa nähdä jälkiä Suomen peruskoulun opetussuunnitelmista, joissa symmetria tulee vastaan melkein ensimmäisenä geometriaan liittyvänä asiana.) Kun kuvausten on kuitenkin jotenkin kytkeydyttyvaä kuvattaviin joukkoihin ja niiden ominaisuuksiin, niin tarvitaan jokin pohja, jolla toimia, luontevimmin joukko $\mathbb{R}^2$, taso, tai $\mathbb{R}^3$, avaruus.

Geometria pyrkii mallittamaan meitä ympäröivää todellista havaittavaa tilaa. On melkein väistämätöntä, että aksioomia on useita, paljon enemmän kuin esimerkiksi *ryhmän* tai *luonnollisten lukujen* aksioomia. Aksioomat on luontevaa ottaa käyttöön vähitellen. Monia eri geometrioita on määriteltävissä niin, että käytetään joitakin euklidisen geometrian aksioomien osajoukkoja tai järjestelmiä, joissa joitakin aksioomia hiukan muutetaan. Tässä esityksessä ensisijaisena tavoitteena on kuitenkin kuvata nimenomaan Eukleideen järjestelmää.

Aloitamme tasogeometriasta ja laajennamme tarkasteluamme "avaruuteen" myöhemmin. Lähtökohtana on siis toistaiseksi ominaisuudeton ja struktuuriton perusjoukko τ, jota kutsumme *tasoksi*. Tason alkioita nimitämme *pisteiksi*. Tasossa on osajoukkoja, joita kutsumme *suoriksi*. Pisteitä merkitsemme isoin kirjaimin A, B, $\ldots$, suoria pienin kirjaimin a, b, $\ldots$ Pisteisiin ja suoriin liittyy eräitä relaatioita, jotka määritellään sitä mukaa, kuin ne tulevat esityksen kannalta ajankohtaisiksi.

---

[1] Erinomainen englanninkielinen laitos on Sir Thomas L. Heathin toimittama ja runsaasti taustoittama *The Thirteen Books Euclid's Elements*, joka on saatavissa kolminiteisenä nidottuna Dover-kustantamon tuotteena. Uudenaikaisempi lyhenne Eukleideen teoksesta on Benno Artmannin *Euclid – The Creation of Mathematics*, Springer 1999. Alkeisiin voi tutustua myös internetissä, esimerkiksi osoitteessa `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`

[2] Hilbertin *Grundlagen der Geometrie* ilmestyi 1899. Siitä on julkaistu lukuisia lisättyjä painoksia; itselläni on 9. painos vuodelta 1962.

1.1 Liittymis- ja järjestysaksioomat

Ensimmäisen aksiooman perusajatus on ”kahden pisteen kautta kulkee aina suora, mutta vain yksi”.

Aksiooma 1. *Jokaista kahta eri pistettä A ja B kohden on olemassa yksi ja vain yksi suora a niin, että $A \in a$ ja $B \in a$.*

Aksiooman 1 mukaista pisteisiin A ja B liittyvää suoraa a voidaan merkitä symbolilla AB. Jos $A \in a$, sanotaan, että suora *a kulkee pisteen A:n kautta* tai että *piste A on suoralla a* tai *suoran a piste*. On myös tapana ottaa käyttöön suora AB sanomalla, että se *piirretään* pisteiden A ja B kautta. Jos $A \notin a$, sanotaan, että piste A on *suoran a:n ulkopuolella*. Jos $A \in a$ ja $A \in b$, sanotaan, että a ja b *leikkaavat toisensa* pisteessä A tai että A on suorien a ja b *leikkauspiste*.

Harjoitus 1.1.1. *Osoita, että kahdella tason eri suoralla on joko yksi yhteinen piste tai ei yhtään yhteistä pistettä.*

Toinen aksiooma pitää sisällään ajatuksen tason (ainakin) kaksiulotteisuudesta.

Aksiooma 2. *Jokaisella suoralla on ainakin kaksi pistettä. Tasossa on ainakin kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla.*

Tason kolmen pisteen kesken voi vallita relaatio *välissä*. Relaatio määrittyy seuraavien kolmen aksiooman avulla. Jos ajatellaan välissä oloa arkihavainnon kannalta, niin aksioomista ensimmäinen tuntuu itsestään selvältä. Teorian formaalin rakentumisen kannalta se on tietenkin asetettava.

Aksiooma 3. *Jos piste B on pisteiden A ja C välissä, niin A, B ja C ovat suoran AC eri pisteitä ja B on pisteiden C ja A välissä.*

Seuraavan aksiooman ajatussisältö on se, että suora on päättymätön: ”jokaisen pisteen tuolla puolen on vielä piste”.

Aksiooma 4. *Jos A ja C ovat eri pisteitä, niin suoralla AC on sellainen piste B, että C on A:n ja B:n välissä.*

Välissä olemisen määrittely vaatii vielä seuraavan, tähän mennessä esittämiimme aksioomiin sisältymättömän täydennyksen.

Aksiooma 5. *Kolmesta saman suoran pisteestä enintään yksi on muiden kahden välissä.*

(Kun puhutaan ns. epäeuklidisista geometrioista, esitetään usein malli, jossa ”taso” on pallon pinta ja ”suoria” ovat pallon isoympyrät. Aksiooma 5 ei toteudu tässä mallissa.)

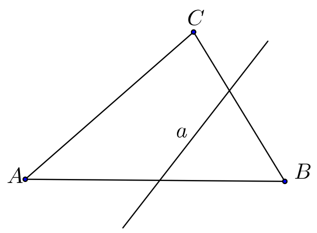
Pisteet A ja B sekä kaikki pisteet, jotka ovat pisteiden A ja B välissä, muodostavat joukon, jota kutsutaan *janaksi* $[A, B]$. Janaa $[A, B]$ on tapana merkitä myös AB. (Käytännöt janan merkitsemisessä vaihtelevat. Esimerkiksi saksalaisella kielialueella merkintä $\overline{AB}$ on tavallinen.) Koska ”AB” on myös suoran merkintä, on kaksitulkintaisuuteen johtavissa tilanteissa sanallisesti osoitettava, tarkoitetaanko *janaa AB* vai *suoraa AB*.

A ja B ovat janan AB *päätepisteet* ja A:n ja B:n välissä olevat pisteet ovat janan AB *sisäpisteet*. Aksiooman 3 nojalla $AB = BA$. Pisteen C kuuluminen janaan AB ilmaistaan myös sanomalla, että *C on janalla AB*. Myös muut aksiooman 1 jälkeen esitetyt ilmaukset voidaan sovittaa janoihin siinä kuin suoriinkin.

Jos pisteet A, B ja C eivät ole samalla suoralla, ne määrittävät *kolmion*, jota merkitään ABC. Janat AB, BC ja CA ovat kolmion *sivut*, pisteet A, B ja C kolmion *kärjet*. Janojen AB, BC ja CA yhdiste on kolmion ABC *piiri.*

Eräänksi Eukleideen järjestelmän puutteeksi on aikojen kuluessa havaittu se, että tiettyjä kuvioiden leikkausominaisuuksia on käytetty hyväksi ilman perusteluja. Saksalainen *Moritz Pasch* (1843–1930) esitti vuonna 1882 seuraavan aksiooman, jonka sisällyttäminen geometrian perusoletuksiin korjaa tätä Eukleideen jäljiltä geometriaan jäänyttä aukkoa.

Aksiooma 6. (Paschin aksiooma). *Olkoon piste C suoran AB ulkopuolella; olkoon a suora ja $A \notin a$, $B \notin a$, $C \notin a$. Jos a leikkaa janan AB, niin se leikkaa ainakin toisen janoista AC ja BC.*

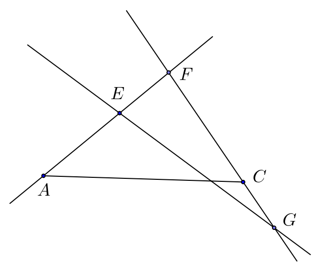


Paschin aksiooman havainnollinen sisältö on, että jos suora ”työntyy kolmion sisään”, se ”tulee sieltä myös ulos”. Eukleides käytti tätä tietoa implisiittisesti hyväksi. Paschin aksioomaan joudutaan useasti vetoamaan päättelyissä, jotka koskevat pisteiden järjestystä suoralla.

1.2 Liittymis- ja järjestysaksioomien seurauksia

Esittämiemme aksioomien perusteella voimme todistaa muutamia lauseita. Niistä ensimmäisestä seuraa, että pisteitä on paljon.

Lause 1.2.1. *Jos $A \neq C$, on olemassa ainakin yksi piste, joka on A:n ja C:n välissä.*



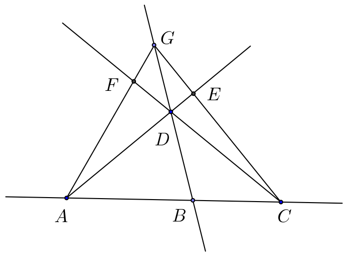
Todistus. Aksiooman 2 nojalla on olemassa piste E, joka ei ole suoralla AC. Suoralla AE, joka aksiooman 1 nojalla on eri suora kuin AC, on aksiooman 4 perusteella piste F niin, että E on A:n ja F:n välissä. Suoralla FC on piste G niin, että C on F:n ja G:n välissä. Piste F ei ole suoralla AC. Siis ACF on kolmio. Suora GE leikkaa janan AF. Aksiooman 6 perusteella se leikkaa AC:n tai CF:n. Mutta jos se leikkaisi CF:n, se olisi sama kuin CF, eikä E voisi olla A:n ja F:n välissä. Siis GE leikkaa janan AC. Siis A:n ja C:n välissä on piste. □

Hiukan samalla tekniikalla, toistuvasti Paschin aksioomaan vedoten, voimme todistaa myös seuraavan aksioomaa 5 täydentävän tuloksen.

Lause 1.2.2. *Jos eri pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, niistä yksi on kahden muun välissä.*

Todistus. Oletetaan, että A ei ole B:n ja C:n välissä eikä C ole A:n ja B:n välissä. On olemassa piste D, joka ei ole suoralla AC. Suoralla BD on aksiooman 4 perusteella piste G, niin että D on B:n ja G:n välissä. Sovelletaan aksioomaa 6 ensin kolmioon BCG ja suoraan AD ja sitten kolmioon ABG ja suoraan CD.

Aksiooman mukaan AD leikkaa janan GC pisteessä E. Samoin perustein CD leikkaa AG:n pisteessä F. Mutta koska CF leikkaa kolmion AEG sivun AG, sen on leikattava myös sivu AE. Tämä merkitsee, että D on A:n ja E:n välissä. Mutta suora GD leikkaa kolmion ACE sivun AE. Sen on leikattava toinenkin sivu, siis AC. Mutta AC:llä ja BD:llä ei ole muita yhteisiä pisteitä kuin B. On todistettu, että B on A:n ja C:n välissä. □

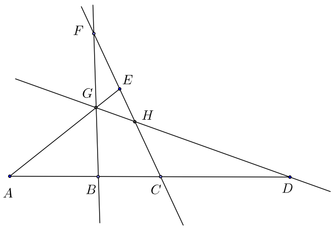


Harjoitus 1.2.1. *Osoita, että jos suora a leikkaa kolmion ABC sivut AB ja BC, niin se ei leikkaa sivua CA.*

Seuraava lause osoittaa, että useasta saman suoran pisteestä voidaan valita kaksi niin, että muut ovat näiden välissä. Hiukan mutkikas todistus käyttää olennaisesti hyödyksi Paschin aksioomaa.

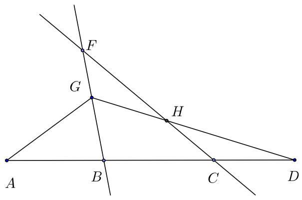
Lause 1.2.3. *Jos suoralla on neljä eri pistettä, ne voidaan nimetä kirjaimin A, B, C ja D niin, että B on sekä janalla AC että janalla AD ja C on sekä janalla AD että janalla BD.*

Todistus. Olkoot A, B, C ja D saman suoran a eri pisteitä.



1. Osoitetaan ensin: Jos B on janalla AC ja C on janalla BD, niin B ja C ovat janalla AD. Olkoon E suoran a ulkopuolella oleva piste. Olkoon F sellainen suoran EC piste, että E on F:n ja C:n välissä. Aksiooman 6 nojalla suora AE leikkaa kolmion BCF sivun BF pisteessä G. Suora FB leikkaa kolmion ACE sivun AC pisteessä B. Se leikkaa siis myös sivun AE. Siis G on janalla AE. Suora DG leikkaa kolmion ACE sivun AE; se leikkaa siis myös sivun EC pisteessä H. EH leikkaa kolmion ADG sivun DG. Se leikkaa siis myös sivun AD. Leikkauspiste on C, joten C on janalla AD. Samoin osoitetaan, että B on tällä janalla.

2. Osoitetaan sitten, että jos B on janalla AC ja C janalla AD, niin C on janalla BD ja B janalla AD. Valitaan piste G suoran a ulkopuolelta ja piste F suoralta BG niin, että G on janalla BF. Suora FC ei leikkaa kolmion ABG sivua BG eikä sivua AB. Se ei siis leikkaa myöskään sivua AG. Mutta FC leikkaa kolmion ADG sivun AD, joten sen on leikattava myös sivu GD pisteessä H. Mutta FH leikkaa kolmion BDG sivun GD, joten se leikkaa myös sivun BD. Leikkauspiste on C, joten C on janalla BD. Todistuksen ensimmäisestä osasta seuraa nyt, että B on janalla AD.



3. Olkoon nyt suoralla a jotkin neljä eri pistettä P, Q, R ja S. Valitaan niistä kolme. Lauseen 1.2.2 mukaan näistä yksi on kahden muun välissä. Olkoon Q pisteiden P ja R

välissä. Jos neljäs piste S on sellainen, että R on P:n ja S:n välissä, voidaan kohdan 2 perusteella valita $A = P$, $B = Q$, $R = C$ ja $S = D$. Jos P on S:n ja R:n välissä, voidaan kohdan 2 perusteella valita $R = A$, $Q = B$, $P = C$ ja $S = D$. Oletetaan sitten, että S on P:n ja R:n välissä. Jos lisäksi Q on P:n ja S:n välissä, voidaan 2. kohdan mukaan valita $P = A$, $Q = B$, $S = C$ ja $R = D$. Jos taas S on P:n ja Q:n välissä, 2. kohdan mukaan voidaan valita $P = A$, $S = B$, $Q = C$ ja $R = D$. Jos viimein P on S:n ja Q:n välissä, voidaan 1. kohdan perusteella valita $A = S$, $P = B$, $Q = C$ ja $R = D$. □

Edellisen lauseen perusteella voidaan induktiolla johtaa tulos, jonka mukaan mikä tahansa äärellinen suoran pisteiden joukko voidaan nimetä pisteiksi A, B, C, D, ..., K niin, että B on jokaisella janalla AC, AD, ... AK, C on janoilla AD, ..., AK ja janoilla BD, ..., BK jne.

Harjoitus 1.2.2. *Osoita, että janan päätepisteet ovat yksikäsitteiset.*

Harjoitus 1.2.3. *Osoita, että jokaisella janalla on äärettömän monta pistettä.*

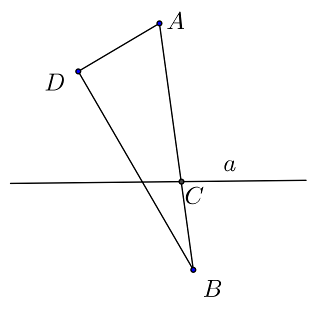
Lauseen 1.2.3 sisältöä käytetään jatkossa yleenä seuraavassa yksinkertaisessa muodossa:

Lause 1.2.4. *Jos X ja Y ovat janan AB pisteitä ja jos X on janan AY sisäpiste, niin Y on janan XB sisäpiste.*

1.3 Puolitaso, puolisuora ja kulma

Esittämiemme aksioomien perusteella voimme todistaa, että piste jakaa suoran ja suora tason kahteen osaan. Aloitamme tasosta. Käytämme hyväksi ekvivalenssirelaatioon liittyvää ekvivalenssiluokan käsitettä.

Lause 1.3.1. *Jokainen tason suora a jakaa ne tason pisteet, jotka eivät ole suoralla a, tasan kahteen joukkoon, joilla on se ominaisuus, että jos A ja B kuuluvat samaan joukkoon, janalla AB ja suoralla a ei ole yhteisiä pisteitä, ja jos A ja B kuuluvat eri joukkoihin, niin janalla AB ja suoralla a on yhteinen piste.*



Todistus. Määritellään tason a:han kuulumattomien pisteiden joukossa relaatio $\sim$ asettamalla $P \sim Q$, jos ja vain jos janalla PQ ei ole yhteisiä pisteitä suoran a kanssa. Osoitetaan, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Olennaista on osoittaa, että $\sim$ on transitiivinen. Ellei näin olisi, olisi olemassa pisteet P, Q ja R, joille pätisi $P \sim Q$ ja $Q \sim R$, muttei $P \sim R$. Jos P, Q ja R eivät ole samalla suoralla, syntyy ristiriita Paschin aksiooman kanssa. Jos taas P, Q ja R ovat samalla suoralla, niin janalla PR on suoran a piste X. Jos Q on janalla PR, niin X on joko janalla PQ tai QR (lause 1.2.4.), mistä seuraa ristiriita. Jos R on P:n ja Q:n välissä, seuraa lauseen 1.2.3 toisen kohdan todistuksesta, että X on janalla PQ: jällen ristiriita. Relaatio $\sim$ täyttää selvästi muutkin ekvivalenssirelaation ehdot, joten a:han kuulumattomat tason pisteet jakautuvat ekvivalenssiluokkiin.

Aksiooman 2 perusteella on olemassa tason piste A, joka ei ole suoralla a. Jos C on jokin suoran a piste, niin aksiooman 3 perusteella on olemassa suoran CA piste B, niin että C on A:n ja B:n välissä. Pisteiden A ja B kesken ei vallitse relaatio $\sim$. Ne kuuluvat siis eri ekvivalenssiluokkiin. Eksivalenssiluokkia on ainakin kaksi. Toisaalta, jos D on mielivaltainen suoran a ulkopuolinen piste, niin harjoitustehtävän 1.2.1 ja lauseen 1.2.3 perusteella a ei leikkaa jompaakumpaa janoista AD, BD, eli D kuuluu joko A:n tai B:n edustamaan ekvivalenssiluokkaan. $\square$

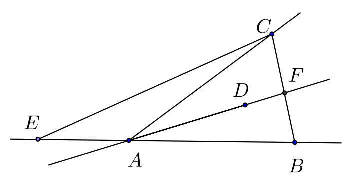
Edellisen lauseen mukaisia kahta ekvivalenssiluokkaa kutsutaan suoran a määrittämiksi *puolitasoiksi*. Samaan puolitasoon kuuluvien pisteiden sanotaan olevan *samalla puolella* suoraa a. Eri puolitasoihin kuuluvat pisteet ovat suoran a *eri puolilla* tai *vastakkaisilla puolilla*.

Jos A, B, O ja C ovat suoran pisteitä ja O on pisteiden B ja C välissä, mutta ei pisteiden A ja B välissä, niin pisteiden A ja B sanotaan olevan pisteen O *samalla puolella*, mutta pisteiden B ja C olevan pisteen O *eri puolilla*. Pisteen O samalla puolella olevat pisteet muodostavat yhdessä pisteen O kanssa *puolisuoran* eli *säteen* eli *puolisäteen*. O on puolisuoran *päätepiste*. Jokainen piste jakaa suoran kahdeksi puolisuoraksi. Puolisuoraa, jonka päätepiste on O ja joka sisältää pisteen A, merkitään $\overrightarrow{OA}$ tai OA. Jos O on A:n ja B:n välissä, $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ ovat *vastakkaiset puolisuorat*.

Jono janoja AB, BC, $\ldots$, JK, KL on pisteet A ja L yhdistävä *murtoviiva*. Murtoviivaa voidaan merkitä $AB\ldots L$. Jos $A = L$, murtoviiva on *monikulmio* ja janat AB jne. ovat monikulmion *sivuja* ja pisteet A, B, $\ldots$ sen *kärkiä*. Jos monikulmion kärjet ovat eri pisteitä eikä sen sivuilla ole muita yhteisiä pisteitä kuin kärjet, niin monikulmio on *yksinkertainen*. Voidaan osoittaa, että jokainen yksinkertainen monikulmio jakaa tason (itseensä kuulumattoman osan) kahteen osaan, sisä- ja ulkopuoleen, niin, että jos A on sisäpuolen ja L ulkopuolen piste, niin jokaisella murtoviivalla $AB\ldots L$ on ainakin yksi yhteinen piste monikulmion kanssa.

Kahden ei samaan suoraan sisältyvän puolisuoran AB ja AC yhdiste on *kulma*. A on kulman *kärki* ja puolisuorat AB ja AC sen *kyljet*. Kulmaa merkitään $\angle BAC$. Kulman *aukeama* on niiden tason pisteiden joukko, jotka ovat sekä samalla puolella suoraa AB kuin C että samalla puolella suoraa AC kuin B.

Kulmaa koskevissa tarkasteluissa tarvitsemme usein seuraavaa Paschin aksioomalle sukua olevaa tulosta.



Lause 1.3.2. *Jos piste D on kulman BAC aukeamassa, niin puolisuora AD leikkaa janan BC.*

Todistus. Valitaan suoralta AB piste E siten, että A on E:n ja B:n välissä. Silloin E on eri puolella suoraa AC kuin B. Jokainen janan EC piste (paitsi C) on samalla puolella suoraa AC kuin E. Jokainen puolisuoran AD piste (paitsi A) on samalla puolella suoraa AC kuin D. Jana EC ei siis leikkaa puolisuoraa AD. Toisaalta AD:n vastakkainen säde on eri puolella suoraa AB kuin C ja jana EC. Siis EC ei leikkaa suoraa AD. (Myöskään ei voi olla $A = E$ tai $A = C$). Paschin aksiooman perusteella suora AD leikkaa kolmion EBC sivun CB pisteessä F. On vielä osoitettava, että F on puolisuoralla AD. Koska F on samalla puolella suoraa AB kuin C ja D, se ei voi olla puolisuoran AD vastakkaisella puolisuoralla. □

1.4 Yhtenevyysaksioomat

Kaksi janaa voi olla keskenään relaatiossa, jota kutsumme *yhtenevyydeksi*. Janojen AB ja CD yhtenevyyttä merkitään $AB \cong CD$ tai $AB = CD$. Yhteneviä janoja voidaan nimittää myös *yhtä pitkiksi* janoiksi. Käsitettä "pituus" tai "mittaluku" emme kuitenkaan vielä ota käyttöön. Yhtenevyysrelaatio määritellään seuraavien kolmen aksiooman avulla.

Aksiooma 7. *Jos AB on jana ja $\overrightarrow{CE}$ on puolisuora, niin puolisuoralla $\overrightarrow{CE}$ on yksi ja vain yksi sellainen piste D, että $AB \cong CD$.*

Aksiooma 8. *Jos $CD \cong AB$ ja $EF \cong AB$, niin $CD \cong EF$.*

Lause 1.4.1. *Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. On todistettava, että relaatio on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Olkoon AB jana ja $\overrightarrow{CE}$ puolisuora. Aksiooman 7 perusteella puolisuoralla on sellainen piste D, että $AB \cong CD$. Koska $AB \cong CD$ ja $AB \cong CD$, seuraa aksioomasta 8, että $AB \cong AB$. Yhtenevyys on refleksiivinen. Olkoon nyt $AB \cong CD$. Koska myös $CD \cong CD$, on $CD \cong AB$. Yhtenevyys on symmetrinen. Olkoon $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$. Silloin myös $EF \cong CD$, ja aksiooman 8 perusteella $AB \cong EF$. Yhtenevyys on transitiivinen. □

Aksiooma 9. *Olkoot A, B ja C pisteitä suoralla a ja olkoon B A:n ja C:n välissä. Olkoot A', B' ja C' pisteitä suoralla a' ja olkoon B' A':n ja C':n välissä. Jos $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.*

Aksiooman 9 nojalla on mahdollista määritellä janojen AB ja CD *yhteenlasku*. Valitaan pisteiden A ja B järjestys. Olkoon r puolisuoran $\overrightarrow{BA}$ vastakkainen puolisuora. Valitaan r:ltä piste E niin, että $BE \cong CD$ (aksiooma 7). Jana AE on janojen AB ja CD summa; merkitään $AE = AB + CD$.

Harjoitus 1.4.1. *Osoita, että jos $AB \cong A'B'$ ja $CD \cong C'D'$, niin $AB + CD \cong A'B' + C'D'$.*

Jos AB ja CD ovat janoja, niin sanomme, että AB on *lyhempi* kuin CD tai CD on *pitempi* kuin AB jos ja vain jos pisteiden C ja D välissä on piste E siten, että $CE \cong AB$. Merkitsemme tätä asiaintilaa $AB < CD$. Jos $XY \cong ED$, niin XY on janojen CD ja AB *erotus*; merkitään $XY = CD - AB$.

Harjoitus 1.4.2. *Osoita, että jos $AB < CD$ ja $CD < EF$, niin $AB < EF$, ja että jos AB ja CD ovat kaksi janaa, niin seuraavista kolmesta vaihtoehdosta yksi ja vain yksi on tosi: $AB \cong CD$, $AB < CD$, $CD < AB$.*

Myös kahden kulman kesken voi vallita relaatio, jota kutsutaan *yhtenevyydeksi*. Sitä, että kulma $\angle ABC$ on yhtenevä kulman $\angle DEF$ kanssa, merkitään $\angle ABC \cong \angle DEF$ tai $\angle ABC = \angle DEF$. Yhteneviä kulmia voidaan kutsua myös *yhtä suuriksi* kulmiksi. Tämä ei merkitse sitä, että kulma olisi määritelty jollain mittayksiköllä mitattavaksi suureeksi. Kulmien yhtenevyyden määrittelevät seuraavat kaksi aksioomaa.

Aksiooma 10. *Jos $\angle BAC$ on kulma ja $\overrightarrow{DE}$ on puolisuora ja F piste, joka ei ole suoralla DE, on olemassa yksi ja vain yksi puolisuora DG, samalla puolen suoraa DE kuin F, niin että $\angle BAC \cong \angle GDE$.*

Aksiooma 11. *Jos α, β ja γ ovat kolme kulmaa ja jos $\beta \cong \alpha$, $\gamma \cong \alpha$, niin $\beta \cong \gamma$.*

Periaatteessa samoin kuin janojen yhtenevyyden tapauksessa voidaan näyttää, että kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Kulmien ja janojen yhtenevyys kytkeytyy toisiinsa kolmioiden yhtenevyyden kautta. Sanomme, että kolmiot ABC ja DEF ovat *yhtenevät*, jos ja vain jos $AB \cong DE$, $AC \cong DF$, $BC \cong EF$, $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ ja $\angle ACB \cong \angle DFE$. Tällöin merkitsemme $ABC \cong DEF$. Janojen ja kulmien yhtenevyyden ominaisuuksista seuraa heti, että kolmioiden yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

Aksiooma 12. *Olkoot ABC ja DEF kolmioita. Jos $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ ja $\angle BAC \cong \angle EDF$, niin $\angle ABC \cong \angle DEF$.*

Aksioomasta 12 seuraa heti kolmioiden yhtenevyyskriteeri sks.

Lause 1.4.2. *Jos kolmioissa ABC ja DEF on $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ ja $\angle BAC \cong \angle EDF$, niin $ABC \cong DEF$.*

Todistus. Kun vaihdetaan AB, AC ja DE, DF toisikseen, niin aksioomasta 12 seuraa, että $\angle BCA \cong \angle EFD$. On siis vain osoitettava, että $BC \cong EG$. Ellei näin ole, niin toinen janoista BC, EG on toista lyhyempi. Voidaan olettaa, että $BC < DF$. Silloin janalla EF on piste G niin, että $BC \cong EG$. Mutta aksioomasta 12 seuraa nyt, että $\angle BAC \cong \angle EDG$. Tämä on ristiriidassa aksiooman 10 kanssa. Oletus $DF < BC$ johtaa samanlaiseen ristiriitaan. Siis $BC \cong EF$ ja $ABC \cong DEF$. $\Box$

Ilmaus "kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä lauseen 1.4.2 perusteella" on tapana kirjoittaa lyhyesti "$ABC \cong DEF$ (sks)". Samanlaista kirjoitus- ja puhetapaa noudatetaan myöhemmin todistettavien yhtenevyyskriteerien suhteen.

Yhtevyyskriteeri sks:stä seuraa heti yhtenevyyskriteeri ksk:

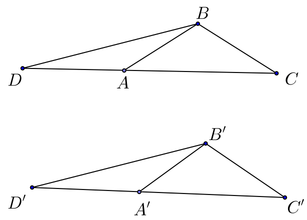
Lause 1.4.3. *Jos kolmioissa ABC ja DEF on $\angle BAC \cong \angle EDF$, $AB \cong DE$ ja $\angle ABC \cong \angle DEF$, niin $ABC \cong DEF$.*

Todistus. Oletetaan, että $AC < DF$ ja että G on sellainen janan DF piste, että $DG \cong AC$. Silloin $ABC \cong DEG$ (sks) joten $\angle ABC \cong \angle DEG$. Siis $\angle DEF \cong \angle DEF$. Aksiooman 10 perusteella puolisuorat EF ja EG ovat samat, joten $G = F$. Ristiriita! Samanlaiseen ristiriitaan johtaa oletus $DF < AC$. $\Box$

Jos $\angle BAC$ on kulma ja D on sellainen suoran AC piste, että A on D:n ja C:n välissä, niin kulmat $\angle BAC$ ja $\angle BAD$ ovat *vieruskulmia*.

Lause 1.4.4. *Olkoot $\angle BAC$ ja $\angle BAD$ vieruskulmia ja olkoot $\angle B'A'C'$ ja $\angle B'A'D'$ vieruskulmia. Jos $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, niin $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$.*

Todistus. Aksiooman 7 perusteella on mahdollista olettaa, että $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ ja $AD \cong A'D'$. Silloin $ACB \cong A'C'B'$ (sks). Siis $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ ja $CB \cong C'B'$. Harjoitustehtävän 1.4.1 tuloksen perusteella $DC \cong D'C'$. Siis $DCB \cong D'C'B'$ (sks) ja edelleen $\angle BDA \cong \angle B'D'A'$ ja $BD \cong B'D'$. Mutta tästä seuraa, että $BDA \cong B'D'A'$ (sks). Siis $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$. $\square$



Jos A on pisteiden B ja C välissä ja pisteiden D ja E välissä, niin kulmat $\angle BAD$ ja $\angle EAC$ ovat *ristikulmia.*

Lause 1.4.5. *Ristikulmat ovat yhtä suuret.*

Todistus. Olkoot $\angle BAD$ ja $\angle EAC$ ristikulmia. Molemmilla kulmilla on vieruskulmana $\angle BAE$. Koska kulma $\angle BAE$ on yhtenevä itsensä kanssa, ovat sen vieruskulmat yhteneviä: $\angle BAD \cong \angle EAC$. $\square$

Kulmille voidaan määritellä yhteenlasku ja vähennyslasku sekä suuruusjärjestys. Koska kulma on määritelty niin, että sen aukeama on aina puolitason osa, kaikkia kulmia ei voi laskea yhteen.

Lause 1.4.6. *Olkoon $\angle BAC$ kulma ja olkoon puolisäde $\overrightarrow{AD}$ kulman $\angle BAC$ aukeamassa. Oletetaan, että $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ ja $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ ja että puolisuorat $\overrightarrow{A'B'}$ ja $\overrightarrow{A'C'}$ ovat eri puolilla suoraa $A'D'$. Silloin $\overrightarrow{A'B'}$ ja $\overrightarrow{A'C'}$ muodostavat kulman, $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$ ja $\overrightarrow{A'D'}$ on kulman $\angle B'A'C'$ aukeamassa.*

Todistus. Jana BC leikkaa puolisuoran $\overrightarrow{AD}$ lauseen 1.3.2 perusteella. Nimetään leikkauspiste D:ksi ja nimetään B', C' ja D' tarvittaessa uudelleen niin, että $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ ja $AD \cong A'D'$. Oletusten ja aksiooman 12 perusteella kolmiot ADB ja $A'D'B'$ ovat yhteneviä. Siis $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$. Kolmioista ACD ja $A'C'D'$ saadaan samoin, että $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$. Olkoon E' piste suoralla $B'D'$ niin, että D' on B':n ja E':n välissä. Koska $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$, niin lauseen 1.4.2 perusteella $\angle ADC \cong \angle A'D'E'$, joten aksiooman 11 nojalla $\angle A'D'E' \cong \angle A'D'C'$. Aksiooman 10 perusteella puolisuorien $\overrightarrow{D'E'}$ ja $\overrightarrow{D'C'}$ on oltava samat. Siis B', D' ja C' ovat samalla suoralla, D' B':n ja C':n välissä. Aksiooman 9 perusteella $BC \cong B'C'$. Jos A', B' ja C' olisivat samalla suoralla, olisi D' tällä suoralla. $\overrightarrow{A'B'}$ ja $\overrightarrow{A'C'}$ muodostavat kulman. Koska $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$, niin kolmiot ACB ja $A'C'B'$ ovat yhtenevät. Siis $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Lisäksi D' on B':n ja C':n välissä, joten $\overrightarrow{A'D'}$ on kulman $\angle B'A'C'$ aukeamassa. $\square$

Olkoot $\angle BAC$ ja $\angle EDF$ kulmia. Sanomme, että $\angle BAC$ on pienempi kuin $\angle EDF$, jos kulman $\angle EDF$ aukeamassa on puolisuora $\overrightarrow{DG}$ niin, että $\angle BAC \cong \angle GDF$. Tällöin merkitään $\angle ABC < \angle EDF$.

Harjoitus 1.4.3. *Todista: jos α, β, α' ja β' ovat kulmia, $\alpha \cong \alpha'$ ja $\beta \cong \beta'$, niin $\alpha < \beta$ silloin ja vain silloin, kun $\alpha' < \beta'$.*

Harjoitus 1.4.4. *Todista: jos $\alpha < \beta$ ja $\beta < \gamma$, niin $\alpha < \gamma$.*

Harjoitus 1.4.5. *Todista: jos α ja β ovat kulmia, niin seuraavista vaihtoehdoista yksi ja vain yksi on tosi: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha \cong \beta$.*

Kulma, joka on yhtä suuri kuin sen (kumpi hyvänsä) vieruskulma, on *suora*. Jos kaksi suoraa a ja b leikkaa toisensa niin, että yksi leikkauskulma on suora (ja siis kaikki neljä leikkauskulmaa ovat suoria), sanotaan, että suorat ovat *kohtisuorassa toisiaan vastaan.* Tällöin merkitään $a \perp b$. Toisinaan sanotaan myös, että a ja b ovat toistensa *normaaleja*.

Harjoitus 1.4.6. *Osoita, että on olemassa suoria kulmia.*

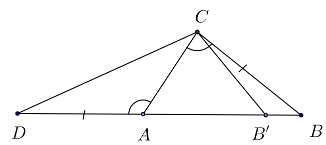
Lause 1.4.7. *Kaikki suorat kulmat ovat keskenään yhteneviä.*

Todistus. Olkoot $\angle CAB$ ja $\angle EDF$ suoria kulmia ja $\angle CAH$ ja $\angle JDE$ niiden vieruskulmia. Oletetaan, että $\angle CAB < \angle EDF$. Silloin kulman $\angle EDF$ aukeamassa on puolisuora $\overrightarrow{DG}$, niin, että $\angle GDF \cong \angle CAB$. Nyt $\angle JDE < \angle JDG$. Mutta $\angle JDE$ on kulman $\angle EDF$ vieruskulma, joten $\angle JDE \cong \angle EDF$. Lauseen 1.4.2 perusteella $\angle JDG \cong \angle HAC \cong \angle CAB$. Näin ollen $\angle EDF < \angle CAB$. Tämä on ristiriidassa alussa tehdyn oletuksen kanssa. Siis onkin oltava $\angle CAB \cong \angle EDF$. $\square$

Kulma, joka on suoraa kulmaa pienempi, on *terävä* ja kulma, joka on suoraa kulmaa suurempi, on *tylppä.*

Kulmien suuruuden vertailu mahdollistaa myös seuraavan tärkeän tuloksen.

Lause 1.4.8. *Kolmion kulman vieruskulma on kolmion muita kulmia suurempi.*



Todistus. Tarkastellaan kolmion ABC kulman $\angle BAC$ vieruskulmaa CAD. Voidaan olettaa, että $AD \cong BC$. Oletetaan ensin, että $\angle CAD \cong \angle ACB$. Silloin $ABC \cong CDA$ (sks). Nyt siis $\angle ACD \cong \angle BAC$. Koska $\angle BAC$ on kulman $\angle CAD$ vieruskulma, on kulman $\angle ACD$ oltava kulman $\angle ACB$ vieruskulma. Siis D ja myös A on suoralla BC. Mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että ABC on kolmio. Olkoon sitten $\angle CAD < \angle ACB$. Jos B' on sellainen janan AB piste, että $\angle ACB' = \angle CAB$, niin saadaan kolmiota $AB'C$ koskemaan sama ristiriita kuin todistuksen alussa. Siis on oltava $\angle ACB < \angle CAD$. Siirtymällä kulman CAD ristikulmaan saadaan samoin todistetuksi, että $\angle ABC < \angle CAD$. $\square$

Edellisen lauseen perusteella voidaan todistaa yhtenevyyskriteeri kks.

Lause 1.4.9. *Jos kolmioissa ABC ja DEF on $AB \cong DE$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ ja $\angle BCA \cong \angle EFD$, niin $ABC \cong DEF$.*

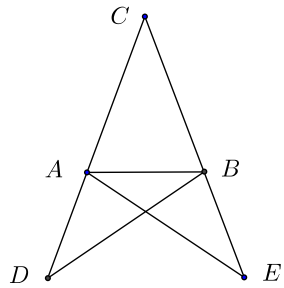
Todistus. Osoitetaan, että $AC \cong DF$. Jos olisi $AC < DF$ ja G sellainen janan DF piste, että $DG \cong AC$, niin olisi $ABC \cong DEG$ (sks). Siis $\angle BCA \cong \angle EGD$ ja $\angle BCA \cong \angle EFD$. Mutta nyt kolmiossa EFG olisi kulma $\angle EFG$ yhtä suuri kuin kulman $\angle EGF$ vieruskulma. Ristiriita! $\square$

Harjoitus 1.4.7. *Osoita, että jana voidaan puolittaa, ts. että janalla AB on piste M, joka toteuttaa ehdon $AM \cong MB$.*

Harjoitus 1.4.8. *Osoita, että janan puolittava piste on yksikäsitteinen.*

Seuraava usein käytettävä tulos on Eukleideen Alkeiden ensimmäisen kirjan viides propositio. Se on ilmeisesti keskiajalla saanut nimen *Pons asinorum* (aasinsilta). Esitettävä Eukleideen todistus ei ole yksinkertaisin mahdollinen, mutta selittää osin lempinimeä.

Lause 1.4.10. *Kolmiossa ABC on $AC \cong BC$. Silloin $\angle CAB \cong \angle CBA$.*



Todistus. (Eukleides.) Valitaan suoralta CA jokin piste D, niin että A on C:n ja D:n välissä. Suoralla CB on yksikäsitteinen piste E niin, että B on C:n ja E:n välissä ja $BE \cong AD$ (aksiooma 7). Nyt $CD \cong CE$ (aksiooma 9). Kolmiot CDB ja CEA ovat yhteneviä (sks). Siis $\angle ADB \cong \angle BEA$ ja $AE \cong DB$. Siis kolmiot $ADB \cong BEA$ (sks). Siis $\angle BAD \cong \angle ABE$. Koska yhtenevien kulmien vieruskulmat ovat yhteneviä, $\angle CAB \cong \angle CBA$. □

Harjoitus 1.4.9. *Esitä lauseelle 1.4.10 todistus, jossa ei käytetä apupiirroksia.*

Harjoitus 1.4.10. *Kolmiossa ABC on $\angle CAB \cong \angle CBA$. Osoita, että $AC \cong BC$.*

Harjoitus 1.4.11. *Todista: jos $AB \cong DE$, $AC \cong DF$ ja $\angle ABC \cong \angle DEF$, niin joko kolmiot ABC ja DEF ovat yhteneviä tai $\angle ACB$ ja $\angle DFE$ ovat vieruskulmia. (”Yhtenevyyskriteeri” ssk.)*

Kolmio, jossa on kaksi yhtenevää sivua, on *tasakylkinen*; yhtä pitkät sivut ovat tällaisen kolmion *kyljet*. Kolmion kolmas sivu on sen *kanta*. Jos tasakylkisessä kolmiossa ABC $AC \cong BC$, niin kulmat $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ ovat kolmion *kantakulmat*. Lauseen 1.4.10 ja harjoitustehtävän 1.4.10 sisältö voidaan lausua niin, että tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret ja kolmio, jossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, on tasakylkinen. (Emme noudata kirjoituskonventiota, jonka mukaan ”kolmio ABC on tasakylkinen” tarkoittaisi aina sitä, että $AB \cong AC$.)

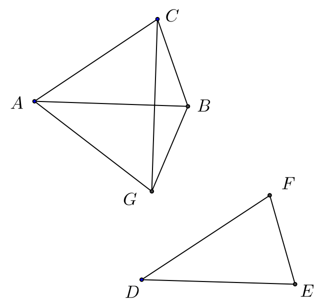
Tasakylkisten kolmioiden olemassaolo ei ole aivan ongelmatonta. Jos AB on jana ja C, D pisteitä samalla puolen suoraa AB ja $\angle CAB \cong \angle DBA$, ei tiedetä, leikkaavatko AC ja BD.

Lause 1.4.11. *Jos AB on jana, on olemassa tasakylkinen kolmio ABC, $AC \cong BC$.*

Todistus. Olkoon D piste suoran AB ulkopuolella. Jos $\angle DAB \cong \angle DBA$, tasakylkinen kolmio on löytynyt. Ellei, niin joko $\angle DAB < \angle DBA$ tai $\angle DBA < \angle DAB$ (harjoitustehtävä 1.4.5). Oletetaan, että $\angle DBA < \angle DAB$. Silloin kulman BAD aukeamassa on piste E niin, että $\angle BAE \cong \angle DBA$ (aksiooma 10). Lauseen 1.3.2 perusteella puolisuora $\overrightarrow{AE}$ leikkaa janan BD; olkoon leikkauspiste C. Kolmiossa ABC on $\angle CAB \cong \angle CBA$, joten se on tasakylkinen (harjoitustehtävä 1.4.10).

Lause 1.4.12. *Jos kolmioissa ABC ja DEF on $AB \cong DF$, $BC \cong EF$ ja $CA \cong FD$, niin kolmiot $ABC \cong DEF$ (yhtenevyyskriteri sss).*

Todistus. Valitaan piste G eri puolelta suoraa DE kuin F niin, että $\angle EDG \cong \angle CAB$ ja $DG \cong AC$ (aksioomat 10 ja 7). Kolmiot ABC ja DEG ovat yhteneviä (sks). Yhdistetään F ja G janalla. Oletetaan, että FG leikkaa janan DE D:n ja E:n välissä olevassa pisteessä. (Tapaukset, joissa näin ei ole, ovat analogisia ja jäävät harjoitustehtäviksi.) Koska $DF \cong AC \cong DG$ ja $EG \cong BC \cong EF$, kolmiossa DGF on $\angle DFG \cong DGF$ ja kolmiossa EFG on $\angle EFG \cong EGF$. Lauseen 1.4.4 perusteella $\angle DFG \cong \angle DGE$. Mutta tästä seuraa, että kolmiot DEF ja DEG ovat yhteneviä (sks). Koska DEG ja ABC ovat yhteneviä, ovat myös ABC ja DEF yhteneviä. $\square$



Harjoitus 1.4.12. *Täydennä lauseen 1.4.12 todistus tapauksilla, joissa jana FG sisältää pisteen E tai D tai joissa FG ei leikkaa janaa DE.*

Harjoitus 1.4.13. *Osoita, että kulma voidaan puolittaa, ts. että $\angle BAC$:n aukeamassa on piste D siten, että $\angle BAD \cong \angle DAC$.*

Edellisen tehtävän mukainen puolisuora $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\angle BAC$ *puolittaja.*

Harjoitus 1.4.14. *Kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on $BC \cong B'C'$ ja $AB \cong A'B'$. Lisäksi kulmat $\angle BCA$ ja $\angle B'C'A'$ ovat suoria. Osoita, että kolmiot ovat yhteneviä.*

Edellisen tehtävän tulokseen viitataan usein nimellä *suorakulmainen ssk*.

Suora a, joka kulkee janan AB keskipisteen C kautta ja joka on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, on janan AB *keskinormaali*.

Lause 1.4.13. *Kaikille janan AB keskinormaalin pisteille D pätee $AD \cong BD$. Jos E on piste, jolle $AE \cong BE$, niin E on AB:n keskinormaalin piste.*

Todistus. Jos D on keskinormaalin piste, niin kolmiot ACD ja BCD ovat yhteneviä (sks), joten $AD \cong DB$. Jos $AE \cong BE$, niin kolmiot ACE ja BCE ovat yhteneviä (sss). Kulma $\angle ACE$ on vieruskulmansa $\angle BCE$ suuruinen, joten se on suora. E on siis keskinormaalin piste. $\square$

Sanomme, että kolmiossa ABC sivu BC ja kulma $\angle BAC$, sivu CA ja kulma $\angle ABC$ sekä sivu AB ja kulma $\angle ACB$ *vastaavat toisiaan*. Sanomme myös, että kulma ABC on sivujen BA ja BC *välinen kulma*.

Lause 1.4.14. *Kolmiossa pienempää sivua vastaa pienempi kulma ja pienempää kulmaa pienempi sivu.*

Todistus. Oletetaan, että $AB < AC$. Silloin janalla AC on piste D niin, että $AD \cong AB$. Koska kolmio ABD on tasakylkinen, $\angle ABD \cong \angle ADB$. Piste D on selvästi kulman $\angle ABC$ aukeamassa, joten $\angle ABD < \angle ABC$. Sovelletaan lausetta 1.4.8 kolmioon BCD. Kyseisen lauseen perusteella $\angle BCD < \angle ABD$. Jälkimmäinen väite todistetaan epäsuorasti ensimmäisen väitteen perusteella. $\square$

Harjoitus 1.4.15. *Todista kolmioepäyhtälö, eli että kolmiossa sivu on aina pienempi kuin kahden muun sivun summa.*

1.5 Yhdensuuntaiset suorat

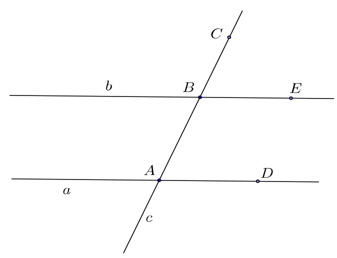
Jos suora c leikkaa suorat a ja b pisteissä A ja B ja jos C on suoran c sellainen piste, että B on janalla AC, ja jos D ja E ovat samalla puolella suoraa c olevia a:n ja b:n pisteitä, niin kulmia $\angle BAD$ ja $\angle CBE$ sanotaan *samakohtaisiksi kulmiksi.* Nimitys laajennetaan koskemaan myös mainittujen kulmien ristikulmia.

Suorat a ja b ovat *yhdensuuntaiset,* jos ne ovat sama suora tai jos ne eivät leikkaa toisiaan. Merkintä $a \| b$ tarkoittaa, että a ja b ovat yhdensuuntaiset.

Harjoitus 1.5.1. *Osoita, että yhdensuuntaisuus on ekvivalenssirelaatio.*

Lause 1.5.1. *Olkoot a, b ja c eri suoria. Oletetaan, että c leikkaa a:n ja b:n pisteissä A ja B, että C on suoran c piste niin, että B on A:n ja C:n välissä. Olkoot vielä $D \in a$ ja $E \in b$ samalla puolella suoraa c olevia pisteitä. Jos $\angle BAD = \angle CBE$, niin $a \| b$.*

Todistus. Jos a ja b leikkaavat pisteessä F samalla puolen c:tä kuin D ja E, kolmio AFB ei ole lauseen 1.4.10 mukainen. Ristikulmien yhtäsuuruuden avulla sama päättely pätee myös, jos a ja b leikkaisivat toisensa eri puolella suoraa c kuin D ja E. □



Esitämme nimenomaan euklidiselle geometrialle olennaisen *yhdensuuntaisaksiooman* eli *paralleeliaksiooman* seuraavassa englantilaisen *John Playfairin* (1748–1819) vuonna 1795 kirjaamassa muodossa:

Aksiooma 13. *Jos a on suora ja $A \notin a$, on olemassa enintään yksi suora b siten, että $A \in b$ ja $a \| b$ (Playfairin aksiooma).*

Geometrian järjestelmää, jossa paralleeliaksioomaa tai jotakin sille vaihtoehtoista aksioomaa ei ole, sanotaan *neutraaliksi geometriaksi*.

Lause 1.5.2. *Jos $a \| b$ ja c leikkaa a:n, mutta $c \neq a$, niin c leikkaa b:nkin.*

Todistus. Jos c ei leikkaa b:tä, niin $c \| b$. Tällöin a:n ja c:n leikkauspisteen kautta kulkee kaksi eri suoraa, jotka ovat b:n suuntaisia. Aksiooman 13 mukaan tämä on mahdotonta. □

Lause 1.5.3. *Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samakohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.*

Todistus. Olkoon $a \| b$ ja leikatkoon c a:n pisteessä A ja b:n pisteessä B. Lauseen 1.5.1 mukaan sellainen B:n kautta piirretty suora b', joka synnyttää suorakolmikkoon a, b', c yhtä suuret samakohtaiset kulmat, on a:n suuntainen. Aksiooman 13 perusteella $b = b'$. □

Harjoitus 1.5.2. *Olkoon $A \notin a$. Osoita, että on olemassa yksi ja vain yksi piste $B \in a$ niin, että $AB \perp a$.*

Edellisen tehtävän piste B on A:n *kohtisuora projektio suoralla* a.

Harjoitus 1.5.3. *Kulmille $\angle ABC$ ja $\angle DEF$ pätee seuraavaa: $AB \| DE$, $CB \| FE$ ja A ja D ovat samalla puolella suoraa BE sekä C ja F ovat samalla puolella suoraa BE. Osoita, että $\angle ABC \cong \angle DEF$.*

Lause 1.5.4. *Kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa.*

Todistus. Olkoon ABC kolmio ja olkoon D piste suoralla BC niin, että C on D:n ja B:n välissä. Kulma $\angle ABC < \angle ACD$ (lause 1.4.8). Kulman $\angle ACD$ aukeamassa on siis puolisuora $\overrightarrow{CE}$ niin, että $\angle ECD \cong \angle ABC$. Lauseen 1.5.1 perusteella $AB \| CE$. Mutta lauseen 1.5.3 nojalla $\angle BAC \cong \angle ACE$. $\square$

Harjoitus 1.5.4. *Osoita: jos kolmioissa ABC ja DEF on kaksi paria keskenään yhteneviä kulmia, niin kolmioiden kolmannetkin kulmat ovat keskenään yhtenevät.*

Nelikulmio $ABCD$, jossa $AB \| CD$ ja $AD \| BC$, on *suunnikas*. Suunnikas $ABCD$, jossa $AB \cong BC$ on *neljäkäs* eli *vinoneliö*. Suunnikas $ABCD$, jossa $\angle ABC$ on suora kulma, on *suorakulmio* eli *suorakaide*. Suorakulmio $ABCD$, jossa $AB \cong BC$, on *neliö*. Janat AC ja BD ovat suunnikkaan $ABCD$ *lävistäjät*.

Lause 1.5.5. *Jos $ABCD$ on suunnikas, niin $AB \cong CD$.*

Todistus. Kolmioissa ABC ja CDA on lauseen 1.5.3 nojalla $\angle CAB \cong \angle ACD$ ja $\angle BCA \cong \angle DAC$. Kolmiot ovat yhteneviä (ksk). Siis $AB \cong CD$. $\square$

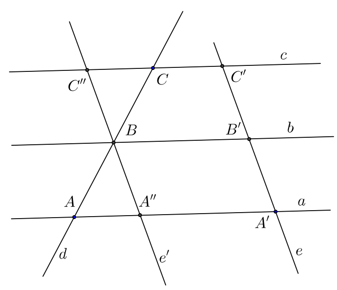
Harjoitus 1.5.5. *Osoita, että suorakulmion kaikki kulmat ovat suoria kulmia.*

Harjoitus 1.5.6. *Olkoon $ABCD$ yksinkertainen nelikulmio. Osoita, että seuraavat ehdot ovat kukin välttämättömiä ja riittäviä sille, että $ABCD$ on suunnikas.*
(1) $AB \cong CD$ ja $AB \| CD$.
(2) $AB \cong CD$ ja $BC \cong AD$.
(3) AC:n ja BD:n leikkauspiste on kummankin janan keskipiste.

Harjoitus 1.5.7. *Osoita, että suunnikas $ABCD$ on neljäkäs, jos ja vain jos $AC \perp BD$.*

Lause 1.5.6. *Olkoot a, b ja c kolme yhdensuuntaista suoraa. Leikatkoon suora d suorat a, b ja c pisteissä A, B ja C ja leikatkoon suora e nämä suorat pisteissä A', B' ja C'. Jos $AB \cong BC$, niin $A'B' \cong B'C'$.*

Todistus. Olkoon e' pisteen B kautta kulkeva suoran e suuntainen suora. Leikatkoon e' suorat a ja c pisteissä A'' ja C''. Silloin nelikulmiot $A''A'B'B$ ja $BB'C'C''$ ovat suunnikkaita. Kolmioissa $AA''B$ ja $CC''B$ on $\angle ABA'' \cong CBC''$ (ristikulmat) ja $\angle BAA'' \cong BCC''$ (lause 1.5.3). Kolmiot ovat siis yhtenevät (ksk). Siis $A''B \cong BC''$. Mutta koska $A''B \cong A'B'$ ja $BC'' \cong B'C'$ (lause 1.5.5), on myös $A'B' \cong B'C'$. $\square$



Harjoitus 1.5.8. *Osoita, että jos kolmion ABC sivun AB suuntainen suora kulkee sivun AC keskipisteen B' kautta, niin se kulkee myös sivun BC keskipisteen A' kautta. Osoita, että $A'B'$ on yhtä pitkä kuin sivun AB puolikas.*

Harjoitus 1.5.9. *Olkoon $ABCD$ nelikulmio, P, Q, R, S sen sivujen keskipisteet. Osoita, että $PQRST$ on suunnikas.*

Edellisen tehtävän tulos on *Varignonin*[1] *lause.*

1.6 Ympyrä

Jos O ja A ovat pisteitä, niin O-keskinen ja OA-säteinen *ympyrä* Γ on niiden pisteiden B joukko, joille $OB \cong OA$. Piste O on Γ:n *keskipiste* ja jana OA Γ:n *säde*. Aksioomasta 7 seuraa, että jos a on mielivaltainen O:n kautta kulkeva suora, niin tällä suoralla ja Γ:lla on tasan kaksi yhteistä pistettä C ja D; O on C:n ja D:n välissä. CD on Γ:n (eräs) *halkaisija*.

Osoitamme, että ympyrällä on vain yksi keskipiste.

Lause 1.6.1. *Jos Γ on O-keskinen ja OA-säteinen ympyrä ja O'-keskinen, $O'A'$-säteinen ympyrä, niin $O = O'$.*

Todistus. Olkoon $O \neq O'$, Tarkastellaan suoraa OO'. Se leikkaa Γ:n kahdessa pisteessä C ja D niin, että $OC \cong OD$. Koska O' on Γ:n keskipiste, on myös $O'C = O'D$. Pisteistä C, O, O' tasan yksi on muiden kahden välissä (lause 1.2.2). Oletetaan, että O on janalla CO'. Lauseen 1.2.4 mukaan O' on janalla OD. Silloin $CO < CO' \cong O'D < OD$. Ristiriita! □

Harjoitus 1.6.1. *Osoita: jos A, B ja C eivät ole samalla suoralla, niin on olemassa yksi ja vain yksi ympyrä Γ, johon kaikki kolme pistettä kuuluvat.*

Edellisen tehtävän ympyrä on kolmion ABC *ympärysympyrä* tai *ympäri piirretty ympyrä.*

Olkoon Γ O-keskinen ja OA-säteinen ympyrä. Sanomme, että B on Γ:n *sisäpuolella*, jos $B = O$ tai jos $OB < OA$. Sanomme, että B on Γ:n *ulkopuolella*, jos $OA < OB$.

Jos suoralla a ja ympyrällä Γ on yksi ja vain yksi yhteinen piste, niin a on Γ:n *tangentti*. Tällöin sanotaan myös, että a ja Γ *sivuavat toisiaan* ja ympyrän Γ ja suoran a ainoa yhteinen piste on suoran ja ympyrän *sivuamispiste*. Samoin, jos kahdella ympyrällä on yksi ja vain yksi yhteinen piste, ympyrät sivuavat toisiaan; yhteinen piste on ympyröiden sivuamispiste.

Lause 1.6.2. *Olkoon Γ O-keskinen ja OA-säteinen ympyrä. Olkoon suora a pisteen A kautta kulkeva ja suoraa OA vastaan kohtisuora suora. Silloin a sivuaa Γ:aa ja a:n kaikki pisteet A:ta lukuun ottamatta ovat Γ:n ulkopuolella. Jos suora a on ympyrän Γ tangentti ja A on a:n ja Γ:n yhteinen piste, niin $OA \perp a$.*

Todistus. Olkoon $B \neq A$ suoran a piste. Kolmiossa OAB on $\angle OAB$ suora. Kulma $\angle OBA$ on lauseen 1.4.8 perusteella pienempi kuin $\angle OAB$:n vieruskulma eli pienempi kuin $\angle OAB$ itse. Lauseen 1.4.14 perusteella $OA < OB$. Siis B on Γ:n ulkopuolella. Olkoon sitten a Γ:n tangentti ja A a:n ja Γ:n yhteinen piste. Piste O ei kuulu suoraan a, koska OA leikkaa Γ:n kahdessa pisteessä. Olkoon $B \in a$ siten, että $OB \perp a$ (harjoitustehtävä 1.5.2). Olkoon

[1] *Pierre Varignon* (1654–1722), ranskalainen jesuiittamatemaatikko.

$BD \cong BA$, B janalla AD. Kolmiot OAB ja ODB ovat yhteneviä (sks). Siis $OD \cong OA$. Siis $D \in \Gamma$. Tämä ei ole mahdollista, jos $B \neq A$. Siis $B = A$, $OA \perp a$. $\square$

Lause 1.6.3. *Jos suoralla a ja ympyrällä Γ on yhteinen piste, mutta a ei ole Γ:n tangentti, niin a:lla ja Γ:lla on tasan kaksi yhteistä pistettä.*

Todistus. Edellisen lauseen todistuksesta nähdään, että jos A on a:n ja Γ:n yhteinen piste, mutta a ei ole Γ:n tangentti, niin a:lla ja Γ:lla on toinen yhteinen piste D ja A:n ja D:n välissä on piste B siten, että $OB \perp a$. Oletetaan, että a:han kuuluisi vielä kolmas Γ:n piste C. Oletetaan, että C on puolisuoralla $\overrightarrow{BA}$. Harjoitustehtävän 1.4.14 mukaan kolmiot OBA ja OBC ovat yhtenevät. Tästä seuraa, että $C = A$. $\square$

Jana AB, jonka molemmat päätepisteet ovat ympyrällä Γ, on ympyrän Γ *jänne*.

Lause 1.6.4. *Olkoot pisteet O, O' ja A samalla suoralla. Olkoon Γ O-keskinen ja OA säteinen ympyrä ja Γ' O'-keskinen ja $O'A$-säteinen ympyrä. Silloin Γ ja Γ' sivuavat toisiaan. Jos kaksi ympyrää Γ ja Γ' sivuavat toisiaan pisteessä A, niin A ja ympyröiden keskipisteet O ja O' ovat samalla suoralla.*

Todistus. Lauseen 1.6.1 todistuksen argumentoinnilla voidaan torjua se, että Γ:lla ja Γ':lla olisi toinen yhteinen piste suoralla OA. Oletetaan sitten että ympyröillä on yhteinen piste B, joka ei ole suoralla OA. Oletetaan, että O' on O:n ja A:n välissä. Silloin OAB ja $O'AB$ ovat tasakylkisiä kolmioita. Siis $\angle OBA \cong \angle OAB \cong \angle O'BA$. Tämä ei ole mahdollista. Olkoon sitten A O:n ja O':n välissä. Kolmiot OAB ja $O'AB$ ovat tasakylkisiä, joten $\angle OBA \cong \angle OAB$ ja $\angle O'BA \cong \angle O'AB$. Mutta kulmat $\angle OAB$ ja $O'AB$ ovat vieruskulmia. Siis myös $\angle OBA$ ja $\angle OAB$ ovat vieruskulmia ja O, B ja O' ovat samalla suoralla. Tämäkään ei ole mahdollista. Siis Γ:lla ja Γ':lla ei ole muita yhteisiä pisteitä kuin A. Olkoot sitten Γ ja Γ' pisteessä A sivuavat ympyrät ja O, O' näiden keskipisteet. Jos O, O' ja A eivät ole samalla suoralla, niin $O \neq O'$. Olkoon C se suoran OO' piste, jolle $AC \perp OO'$ (harjoitustehtävä 1.5.2). Olkoon $B \neq A$ se suoran AC piste, jolle $CB \cong AC$. Kolmiot OAC ja OBC ovat yhteneviä (sks). Siis $OA \cong OB$. Samoin nähdään, että $O'A \cong O'B$. Siis myös B on molemmilla ympyröillä Γ ja Γ'. Koska tämä ei ole mahdollista, päätellään, että O, O' ja A ovat samalla suoralla. $\square$

Lause 1.6.5. *Jos ympyröillä on yhteinen piste, mutta ne eivät sivua toisiaan, niillä on tasan kaksi yhteistä pistettä.*

Todistus. Jos ympyröillä on yhteinen piste A, mutta ympyrät eivät sivua toisiaan, niin A ja ympyröiden keskipisteet O, O' eivät ole samalla suoralla, ja ympyröillä on toinenkin yhteinen piste B (edellisen lauseen todistus). Jos D olisi kolmas yhteinen piste, niin kolmiot $OO'A$, $OO'B$ ja $OO'D$ olisivat kaikki yhteneviä (sss). Koska nyt $\angle AOO' \cong \angle BOO' \cong DOO'$, puolisuora OD on joko puolisuora OA tai puolisuora OB. Piste D on välttämättä joko A tai B. $\square$

Harjoitus 1.6.2. *Osoita, että jos ympyrät Γ ja Γ' sivuavat toisiaan pisteessä A, niin joko jokainen Γ':n piste (paitsi A) on Γ:n ulkopuolella tai jokainen Γ':n piste (paitsi A) on Γ:n sisäpuolella.*

Tason pistejoukko X on *kupera* eli *konveksi*, jos siitä, että $A \in X$ ja $B \in X$ aina seuraa $AB \subset X$.

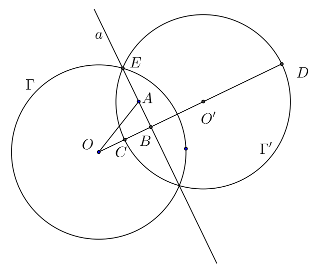
Harjoitus 1.6.3. *Osoita, että ympyrän* Γ *sisäpuoli on kupera.*

Eukleideen järjestelmää kritisoitiin jo antiikin aikana siitä, että aksioomista ei voitu johtaa kahden ympyrän leikkauspisteen olemassaoloa. Tämä vaatiikin oman aksioomansa.

Aksiooma 14. *Olkoot* Γ *ja* Γ' *kaksi ympyrää. Jos* Γ'*:uun kuuluu ainakin yksi* Γ*:n sisällä oleva piste ja ainakin yksi* Γ*:n ulkopuolella oleva piste, niin* Γ *ja* Γ' *leikkaavat toisensa.*

Harjoitustehtävästä 1.6.1 ja lauseesta 1.6.5 seuraa, että Γ ja Γ' leikkaavat toisensa tasan kahdessa pisteessä.

Lause 1.6.6. *Olkoon* Γ *ympyrä ja* a *suora, ja olkoon suoralla* a *piste* A*, joka on* Γ*:n sisällä. Silloin* a *leikkaa* Γ*:n.*



Todistus. Jos Γ:n keskipiste O on suoralla a, niin a leikkaa Γ:n (aksiooma 7). Jos O ei ole suoralla a, niin suoralla a on piste B siten, että $OB \perp a$ (harjoitustehtävä 1.5.2). Olkoon O' suoralla OB niin, että B on O:n ja O':n välissä ja $OB \cong O'B$. Olkoon Γ' O'-keskinen ympyrä, jonka säde on Γ:n säteen kanssa yhtenevä. Suora OO' leikkaa ympyrän Γ' pisteissä C ja D; nimetään pisteet niin, että O ja C ovat samalla puolella pistettä O' ja D vastakkaisella puolella. Koska $OB < OA$ (lause 1.4.14), niin OB on pienempi kuin Γ:n ja Γ':n säde. Siis $O'B < O'C$. Tästä seuraa, että O ja C ovat samalla puolella suoraa a. Jos C on O:n ja B:n välissä, niin $OC < OB$, joten C on Γ:n sisäpuolella. Jos taas O on C:n ja B:n välissä, niin O on myös C:n ja O':n välissä, ja $OC < O'C$; nytkin C on Γ:n sisäpuolella. Toisaalta O' on O:n ja D:n välissä, joten $O'D < OD$. D on siis Γ:n ulkopuolella. Aksiooman 14 perusteella Γ ja Γ' leikkaavat toisensa pisteessä E. Nyt $OE \cong O'E$, $OB \cong O'B$, joten kolmiot OBE ja $O'BE$ ovat yhtenevät (sss). Koska $\angle OBE \cong \angle O'BE$, kulma $\angle OBE$ on suora kulma. Siis E on suoralla a. $\square$

Lause 1.6.6 ja sitä edeltävät lauseet antavat oikeutuksen sellaisille harpin ja viivoittimen avulla tehtäville konstruktioille, joissa etsittävät pisteet löytyvät suorien ja ympyröiden leikkauspisteinä.

Harjoitus 1.6.4. *Todista: jos suorat* a *ja* b *leikkaavat toisensa pisteessä* C *ja sivuavat ympyrää* Γ *pisteissä* A *ja* B*, niin* $CA \cong CB$*.*

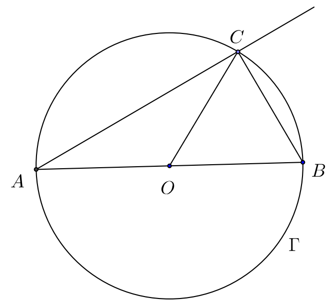
Harjoitus 1.6.5. *Todista, että kolmion* ABC *kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä* I*.*

Harjoitus 1.6.6. *Todista, että* I *keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä, joka sivuaa kolmion* ABC *kaikkia sivuja.*

Edellisen tehtävän ympyrä on kolmion ABC *sisäympyrä* tai *sisään piirretty ympyrä.*

Seuraava lause on saanut nimensä vanhimmasta nimeltä tunnetusta matemaatikosta, n. 600 eKr eläneestä *Thales Miletolaisesta.*

Lause 1.6.7. *Olkoon AB ympyrän Γ halkaisija ja C jokin muu Γ:n piste kuin A tai B. Silloin $\angle ACB$ on suora kulma.*

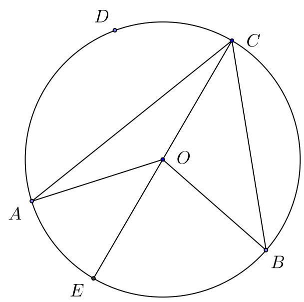


Todistus. Lauseen 1.5.4 perusteella kulman $\angle ACB$ vieruskulma on kulmien $\angle CAB$ ja $\angle CBA$ summa. Olkoon O Γ:n keskipiste. Kolmiot OCA ja OBC ovat tasakylkisiä. Siis $\angle ACB$ kulmien $\angle CAB$ ja $\angle CBO$ summa. Mutta näin ollen $\angle ACB$ on vieruskulmansa suuruinen ja siis suora. □

Harjoitus 1.6.7. *Olkoot A, B ja C ympyrän Γ pisteitä ja $\angle ACB$ suora kulma. Osoita, että AB on ympyrän Γ halkaisija.*

Olkoot A ja B O-keskisen ympyrän Γ pisteitä. Oletetaan, että AB ei ole ympyrän halkaisija. A, B ja kaikki ne Γ:n pisteet C, joille C on kulman $\angle AOB$ aukeamassa, muodostavat *kaaren* AB tai $\widehat{AB}$. Muut ympyrän Γ pisteet muodostavat kaaren AB komplementtikaaren. Jos C on kaaren AB komplementtikaaren piste, niin C ei ole suoralla AB (lause 1.6.3). Kulma $\angle ACB$ on (eräs) *kaarta AB vastaava kehäkulma.* Euklidissa tasogeometriassa seuraavalla lauseella, *kehäkulmalauseella,* on suuri työkaluarvo.

Lause 1.6.8. *Olkoon Γ O-keskinen ympyrä ja olkoot A ja B kaksi Γ:n pistettä; A ja B eivät ole Γ:n halkaisijan päätepisteet. Jos C ja D ovat samalla puolella suoraa AB olevia Γ:n pisteitä, niin $\angle ACB \cong \angle ADB$.*



Todistus. Olkoot C, D ja O samalla puolen suoraa AB. Silloin C ei ole kulman $\angle AOB$ aukeamassa: jos se olisi, $\overrightarrow{OC}$ leikkaisi janan AB pisteessä, joka olisi Γ:n ulkopuolella. Olkoon E sen ympyrän halkaisijan toinen päätepiste, jonka toinen päätepiste on C. Jos E on kulman $\angle AOB$ aukeamassa, niin $\angle AOB \cong \angle AOE + \angle EOB$. Kolmion kulman vieruskulmalauseen 1.5.4 ja lauseen 1.4.6 nojalla $\angle AOE \cong 2\angle ACO$ ja $\angle EOB \cong 2\angle OCB$. Siis $\angle AOB \cong 2\angle ACB$.

Jos E ei ole kulman $\angle ACB$ aukeamassa, esimerkiksi jos O ja B ovat eri puolilla suoraa AC, päädytään samaan tulokseen vähentämällä kulmasta $\angle EOB$ kulma $\angle EOA$ ja kulmasta $\angle ECB$ kulma $\angle ECA$. Kulma $\angle ACB$ on C:stä riippumatta puolet kulmasta $\angle AOB$.

Olkoon sitten C eri puolella suoraa AB kuin O. Jo todistetun mukaan kulmien $\angle BAC$ ja $\angle CBA$ summa on puolet kulmasta $\angle AOB$. Se on toisaalta sama kuin kulman $\angle ACB$ vieruskulma. C:stä riippumatta tämä vieruskulma on sama, joten myös $\angle ACB$ on C:stä riippumatta sama. □

Harjoitus 1.6.8. *Osoita: jos C ja D ovat samalla puolella suoraa AB ja $\angle ACB \cong \angle ADB$, niin A, B, C ja D ovat samalla ympyrällä.*

Kehäkulmalause voidaan laajentaa tilanteeseen, jossa "kehäkulman" toinen kylki on ympyrän tangentti:

Harjoitus 1.6.9. *Osoita: jos* Γ *on* O*-keskinen ympyrä,* a Γ*:n tangentti,* A a*:n ja* Γ*:n yhteinen piste,* D a*:n piste ja* B Γ*:n piste, kumpikin samalla puolella suoraa* OA*, niin* $\angle AOB$ *on kaksi kertaa* $\angle DAB$*.*

Nelikulmio $ABCD$ on *jännenelikulmio*, jos $ABCD$:n ympäri voidaan piirtää ympyrä.

Harjoitus 1.6.10. *Osoita: Jos* $ABCD$ *on jännenelikulmio, niin* $\angle ABC$ *ja* $\angle CDA$ *ovat vieruskulmia.*

Harjoitus 1.6.11. *Jos nelikulmiossa* $ABCD$ $\angle ABC$ *ja* $\angle CDA$ *ovat vieruskulmia, niin* $ABCD$ *on jännenelikulmio.*

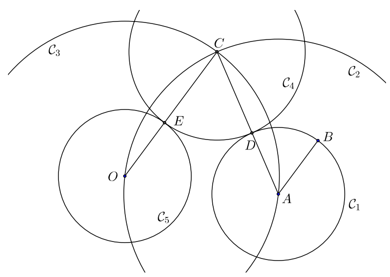
1.7 Piirtäminen harpilla ja viivoittimella

Euklidisen tasogeometrian aksioomien voi katsoa esittävän sitä, mitä on tehtävissä harpin ja viivoittimen avulla. Hiukan tarkentaen geometriset piirrostehtävät palautuvat seuraaviin perustehtäviin.

1. Suoran piirtäminen kahden pisteen kautta (aksiooma 1) – viivoitin.

2. Ympyrän piirtäminen, kun ympyrän keskipiste ja yksi ympyrän piste tiedetään – harppi.

Ankaran tulkinnan mukaan edelliset kaksi piirrosta ovat ainoat sallitut. Niitä kombinoimalla saadaan sitten muita piirroksia. Esitetään seuraavaksi tavalliset perusoperaatioita yhdistelemällä tehtävät piirrokset.



3. Ympyrän piirtäminen, kun keskipiste O ja säteen kanssa yhtenevä jana AB tunnetaan. – Piirretään A-keskinen ympyrä $\mathcal{C}_1$ B:n kautta. Piirretään O-keskinen ympyrä $\mathcal{C}_2$ A:n kautta ja A-keskinen ympyrä $\mathcal{C}_3$ O:n kautta. Ne leikkaavat pisteessä C. Puolisuora AC leikkaa $\mathcal{C}_1$:n pisteessä D. Piirretään C-keskinen ympyrä $\mathcal{C}_4$ D:n kautta. Se leikkaa puolisuoran OC pisteessä E. Piiretään O-keskinen ympyrä $\mathcal{C}_5$ E:n kautta. Koska $OC \cong OA \cong AC$ ja $EC \cong DC$, niin $OE \cong AD \cong AB$. $\mathcal{C}_5$ on siis haluttu ympyrä. – Koska tällainen "janan siirtäminen" voidaan aina tehdä, voidaan käytännössä jana siirtää "jäykkää harppia kuljettamalla".

4. Tunnetun janan kanssa yhtenevän janan erottaminen puolisuorasta (aksiooma 7) – harppi.

5. Kulman siirtäminen Kulman $\angle ABC$ kanssa yhtenevän kulman piirtäminen niin, että kulman toinen kylki on puolisuora $\overrightarrow{EF}$ (aksiooma 10).– Valitaan puolisäteeltä $\overrightarrow{BC}$ piste C_1. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on B ja säde BC_1. Se leikkaa puolisuoran BA

pisteessä A_1. $A_1C_1 < 2BC_1$ (kolmioepäyhtälö). Piirretään E keskipisteenä ympyrä Γ, jonka säde on BC_1:n kanssa yhtenevä. Se leikkaa $\overrightarrow{EF}$:n pisteessä F_1 ja $\overrightarrow{EF}$:n vastakkaisen puolisuoran pisteessä F_2; $F_1F_2 \cong 2\,BC_1$. Piirretään F_1 keskipisteenä ympyrä Γ_1, jonka säde on A_1C_1. Suora EF leikkaa tämän ympyrän pisteissä G ja H. Koska $GF_1 < F_2F_1$ ja $HF_1 < F_2F_1$, toinen pisteistä G ja H on Γ:n sisäpuolella ja toinen ulkopuolella. Aksiooman 14 nojalla Γ ja Γ_1 leikkaavat pisteessä G_1. Kolmiot BC_1A_1 ja F_1EG_1 ovat yhteneviä (sss). Siis $\angle F_1EG_1 \cong \angle A_1BC_1 = \angle ABC$.

6. Suoran a kanssa yhdensuuntaisen suoran piirtäminen pisteen $A \notin a$ kautta. – Valitaan suoralta a piste B. Piirretään suora AB. Valitaan suoralta a piste $C \neq B$. Valitaan suoralta AB piste D niin, että A on B:n ja D:n välissä. Piirretään kulma $\angle DAE \cong \angle ABC$ niin, että E ja C ovat samalla puolen suoraa AB. Nyt $AE \| a$.

7. Janan AB keskinormaalin piirtäminen. – Piirretään A-keskinen ja AB-säteinen sekä B-keskinen ja BA-säteinen ympyrä. Ympyrät leikkaavat kahdessa pisteessä C ja D. Suorat CD ja AB leikkaavat pisteessä M. Kolmiot ADC ja BCD ovat tasakylkisiä ja yhteneviä (sss). Siis $\angle ACM \cong \angle BCM$. Kolmiot CAM ja CBM ovat yhtyeneviä (sks). Siis $\angle AMC \cong \angle BMC$ ja $AM \cong MC$. Vieruskulmansa kanssa yhtenevä kulma on suora. Siis $CD \perp AB$.

8. Janan puolittaminen. – Ks. edellinen.

9. Suoraa a vastaan kohtisuoran suoran piirtäminen pisteen A kautta. – Valitaan suoralta a piste B. Piirretään A-keskinen ympyrä B:n kautta. (Jos ympyrä sivuaa suoraa a, valitaan suoralta a jokin toinen piste, ja aletaan alusta.) Se leikkaa a:n pisteissä B ja C. Piirretään janan BC keskinormaali. Koska $BA \cong CA$, tämä keskinormaali sisältää A:n.

10. Kulman $\angle BAC$ puolittaminen. – Piirretään A-keskinen ympyrä. Se leikkaa $\overrightarrow{AB}$:n pisteessä B_1 ja $\overrightarrow{AC}$:n pisteessä C_1. Piirretään B_1- ja C_1-keskiset ympyrät, säteinä (esimerkiksi) B_1C_1 ja C_1B_1. Ympyrät leikkaavat pisteissä D ja E. DE on B_1C_1:n keskinormaali; B_1C_1:n keskipiste M on kulman BAC aukeamassa ja D ja E ovat eri puolilla suoraa B_1C_1. Puolisäde $\overrightarrow{AM}$ on jompi kumpi säteistä $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$; olkoon se $\overrightarrow{AD}$. Kolmiot DAA_1 ja DAB_1 ovat yhteneviä (sss). Siis $\angle B_1AD \cong \angle DAA_1$.

11. Janan AB jakaminen n:ksi keskenään yhteneväksi osaksi. – Piirretään puolisuora $\overrightarrow{AC}$, joka ei yhdy suoraan AB. Erotetaan $\overrightarrow{AC}$:ltä jana AA_1. Merkitään $A_0 = A$. Erotetaan puolisuoran $\overrightarrow{AkA_{k-1}}$ vastakkaiselta puolisuoralta jana $A_kA_{k+1} \cong AA_1$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Piirretään jokaisen A_k:n kautta A_nB:n suuntainen suora a_k. a_k leikkaa janan AB pisteessä B_k. Nyt kaikki janat $B_{k-1}B_k$ ovat keskenään yhteneviä (lause 1.5.6), $B_0 = A$, $B_n = B$.

On runsaasti yksinkertaisia piirustustehtäviä, joiden suorittaminen vaatii muita kuin edellä lueteltuja keinoja. Esimerkiksi kulman jakaminen kolmeksi keskenään yhteneväksi kulmaksi on tehtävä, jonka ratkaiseminen ei onnistu pelkällä harpilla ja viivoittimella.

2 Yhdenmuotoisuus ja pinta-ala

Kolmioiden yhtenevyyden ohella toinen keskeinen euklidisen geometrian työkalu on kolmioiden *yhdenmuotoisuus*. Yhdenmuotoisuus vaatii, että on voitava määritellä janojen kesken relaatio, jota kutsutaan *suhteeksi* ja kahden janaparin samasuhteisuus eli *verannollisuus.*

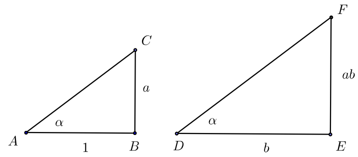
2.1 Janojen laskutoimitukset

Olemme tottuneet liittämään janoihin mittaluvun, *pituuden*. Geometrian ja alkuaan diskreettien kokoelmien osien lukumäärän ilmaisemista varten kehittyneen lukujärjestelmän toisiinsa kytkeminen ei kuitenkaan ole itsestään selvää. Erityisesti tiettyjen janojen *yhteismitattomuus* pakotti kehittämään melkoisen mutkikkaan menetelmän verrannollisuuden täsmällisen määrittelyn aikaansaamiseksi. (Jos neliön sivu on a pituusyksikköä ja lävistäjä b pituusyksikköä, niin Pythagoraan lause johtaa yhtälöön $b^2 = 2a^2$ ja tämä ristiriitaan sen asian suhteen, onko b parillinen luku.) Eukleideen järjestelmässä tämä tehdään olennaisesti *Eudoksos Knidoslaisen* (n. 408 – n. 355 e.Kr.) rakentaman suhdeopin ja lauseen 1.5.6 avulla. Suhdeoppia on aina pidetty Eukleideen *Alkeiden* vaikeimpana osana. Tämä esityksemme etenee hiukan suoremmin, muttei toisaalta osu ihan maaliin. Emme onnistu esittämään geometristen suureiden mittalukuja oikeina reaalilukuina, vaan joudumme tyytymään geometrian omien tarpeiden pohjalle rakentuvaan laskentoon. Se riittää kuitenkin esimerkiksi yhdenmuotoisuuskäsitteen määrittelyyn ja yhdenmuotoisuuden perusominaisuuksien todistamiseen.

Aikaisemmin olemme todenneet, että janojen kongruenssi on ekvivalenssirelaatio. Ekvivalenssiluokille, joita merkitsemme pienin kirjaimin ja joita voidaan edelleen kutsua janoiksi, voimme määritellä *yhteenlaskun* käyttämällä hyväksi luokkien edustajia ja niiden yhteenlaskua. Mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole, ekvivalenssiluokasta voidaan käyttää sen edustajan nimeä: relaatio $AB \in c$ voidaan merkitä $AB = c$.

Yhteenlasku on liitännäinen ja vaihdannainen. Lisäksi yhteenlasku synnyttää vähennyslaskun. Jos a ja b ovat kaksi janojen ekvivalenssiluokkaa, niin joko $a = b$, on olemassa ekvivalenssiluokka c siten, että $a + c = b$ tai on olemassa ekvivalenssiluokka d siten, että $a = b + d$. Valitsemme nyt yhden ekvivalenssiluokista ja kutsumme sitä *yksikköjanaksi.* Tätä luokkaa merkitsemme symbolilla 1.

Määrittelemme kahden janan a ja b *tulon* ab seuraavasti. Olkoon AB 1:n edustaja ja DE b:n edustaja. Konstruoimme suorakulmaisen kolmion ABC niin, että $\angle ABC$ on suora kulma ja $BC \in a$ eli $BC = a$. Olkoon $\angle BAC = \alpha$. Silloin α on pienempi kuin suora kulma. (Kolmion kulmasummalause). Konstruoidaan suorakulmainen kolmio DEF siten, että $DE \in b$ eli $DE = b$ ja $\angle EDF = \alpha$. (F on olemassa, koska α on suoraa kulmaa pienempi) Määritellään nyt tulo ab janan FE edustamaksi ekvivalenssiluokaksi.



Harjoitus 2.1.1. *Osoita, että janojen tulo, joka määriteltiin käyttämällä kahta ekvivalenssiluokkien edustajaa, ei riipu näiden edustajien valinnasta.*

Tulon ominaisuuksia esitellään seuraavissa harjoitustehtävissä. Olennainen työkalu useimpien ominaisuuksien todentamisessa on sopiva jännenelikulmio.

Harjoitus 2.1.2. *Osoita, että tulo on vaihdannainen ja liitännäinen ja että tulo ja summa noudattavat osittelulakia $a(b+c) = ab + ac$.*

Harjoitus 2.1.3. *Osoita, että jokaista janaa a kohden on olemassa jana b siten, että $ab = 1$.*

Edellisen harjoitustehtävän tulos oikeuttaa merkinnän b/a eli $\dfrac{b}{a}$ eli $b : a$. Itse asiassa edellisissä harjoitustehtävissä on todistettu osia siitä, että janat määriteltyjen laskutoimitusten kautta tulevat olemaan erään *kunnan* positiiviset alkiot. Tätä tietoa, jonka täydellisen todistamisen jää lukijoille (se on luonnollisesti työläs, muttei vaikea), käytetään jatkossa hyväksi.

Jos $b/a = d/c$, sanomme, että janat a ja c ovat *verrannollisia* janoihin b ja d.

2.2 Kolmioiden yhdenmuotoisuus

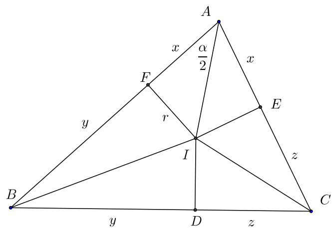
Noudatamme vastedes *Leonhard Eulerin* (1707–87) käyttöön ottamaa merkintätapaa. Jos ABC on kolmio, niin $BC \in a$, $CA \in b$ ja $AB \in c$ tai $BC = a$, $CA = b$ ja $AB = c$. Edelleen $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle BCA = \gamma$. Ellei sekaannuksen vaaraa ole, käytämme samaa nimeämisperiaatetta myös, jos kolmion kärkiin liittyy pilkkuja tai alaindeksejä.

Sanomme, että kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat *yhdenmuotoiset*, jos kolmioiden vastaavat kulmat (α ja α' jne.; puhutaan myös *vastinkulmista*) ovat yhteneviä ja jos $a/a' = b/b' = c/c'$.

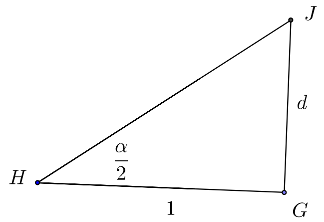
Samoin kuin yhtenevyyden yhteydessä, myös yhdenmuotoisuuden toteamiseksi riittää, kun osa yhtenevyyden määritelmän ehdoista täyttyy. Erityisesti yhdenmuotoisuuteen riittää kahden kolmion vastinkulmaparin yhtenevyys.

Lause 2.2.1. *Jos kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on $\beta = \beta'$ ja $\gamma = \gamma'$, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset (yhdenmuotoisuuslause kk).*

Todistus. Kolmion kulmasummalauseen (lause 1.5.4) perusteella $\alpha = \alpha'$. Piirretään kolmion ABC kulmien puolittajat. Ne leikkaavat toisensa pisteessä I (harjoitus 1.6.5). Olkoot D, E ja F pisteen I kohtisuorat projektiot (harjoitus 1.5.2) suorilla BC, CA ja AB. Janat ID, IE ja IF ovat yhteneviä; olkoon r niiden ekvivalenssiluokka. Yhtenevistä (kks) kolmioista AFI ja AEI saadaan $AF \cong AE$. Vastaavat tarkastelut voidaan tehdä kolmion muiden kärkien ympärillä. On siis perusteltua merkitä $AE = AF = x$, $BD = BF = y$, $CD = CE = z$. Kolmiosta $A'B'C'$ saadaan vastaavilla konstruktioilla janat x', y', z' ja r'.



Konstruoidaan suorakulmainen kolmio GHJ, jossa $\angle JGH = \angle IAF$ ja $GH = 1$. Olkoon $JH = d$. Janojen kertolaskun määritelmän mukaan $r = dx$. Kun verrataan kolmioita $A'F'I'$ ja GHJ, saadan samoin $r' = dx'$. Siis $x/x' = r/r'$. Vastaavalla tavalla saadaan $y/y' = r/r'$ ja $z/z' = r/r'$. Olkoon $r/r' = k$. Silloin $x = kx'$, $y = ky'$ ja $z = kz'$. Nyt $a = x + y = kx' + ky' = k(x' + y') = ka'$. Samoin $b = kb'$, $c = kc'$. Siis $a/a' = b/b' = c/c'$. $\square$



Lause 2.2.2. *Jos B' ja C' ovat kolmion ABC sivujen AB ja AC pisteitä ja jos $B'C' \| BC$, niin ABC ja $AB'C'$ ovat yhdenmuotoisia. Jos B' ja D ovat sivujen AB ja AC pisteitä ja kolmiot ABC ja $AB'D$ ovat yhdenmuotoiset, niin $B'D \| BC$.*

Todistus. Jos $B'C' \| BC$, niin lauseen 1.5.3 perusteella kolmioiden ABC ja $AB'C'$ vastaavat kulmat ovat yhtä suuria. Olkoon sitten kolmio $AB'D$ yhdenmuotoinen kolmion ABC kansa. Olkoon C' janalla AC niin, että $B'C' \| BC$. Olkoon $AB' = c'$, $AC' = b'$, $AD = d$. Oletuksen mukaan $c'/c = d/b$. Koska todistuksen alun perusteella $AB'C'$ on kolmion ABC kanssa yhtenevä, on $c'/c = b'/b$. Tästä seuraa $d = b'$. Aksiooman 7 perusteella $C' = D$. $\square$

Lause 2.2.3. *Jos kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on $a/a' = b/b' = c/c'$, niin ABC ja $A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset (yhdenmuotoisuuslause sss).*

Todistus. Oletetaan, että $AB < A'B'$. Olkoon D janalla $B'A'$ niin, että $B'D \cong BA$. Olkoon E janalla $B'C'$ niin, että $DE \| A'C'$. Edellisen lauseen perusteella kolmiot $B'ED$ ja $B'C'A'$ ovat yhdenmuotoiset. Siis $B'E/a' = B'D/c' = c/c'$. Mutta $a/a' = c/c'$, joten $B'E = a$. Samoin $DE = b$. Kolmiot $B'ED$ ja BCA ovat yhteneviä (sss). Tämä merkitsee, että kolmioiden $B'ED$ ja BCA kulmat ovat yhtä suuret ja niin muodoin myös kolmioiden BCA ja $B'C'A'$ kulmat ovat yhtä suuret. Kolmiot ovat yhteneviä. $\square$

Lause 2.2.4. *Olkoot a, b ja c yhdensuuntaisia suoria. Leikatkoon suora d nämä suorat pisteissä A, B ja C ja suora e kyseiset suorat pisteissä D, E ja F. Silloin $AB/BC = DE/EF$.*

Todistus. Jos $d \| e$, väite seuraa lauseesta 1.5.5. Muussa tapauksessa piirretään A:n kautta e:n suuntainen suora, joka leikkaa b:n ja c:n pisteissä G ja H. Silloin kolmiot ACH ja ABG ovat yhdenmuotoiset, joten $AC/AB = AH/AG$. Väite seuraa siitä, että $AC = AB + BC$ ja $AH = AG + GH$ ja $AG \cong DE$, $GH \cong EF$. $\square$

Harjoitus 2.2.1. *Olkoot C ja D janan AB pisteitä ja olkoon $AC/CB = AD/DB$. Osoita, että $C = D$. Olkoot X ja Y suoran AB pisteitä, ja olkoot X ja Y janan AB ulkopuolella. Olkoon $AX/BX = AY/BY$. Osoita, että $X = Y$.*

Harjoitus 2.2.2. *Todista kolmiot yhdenmuotoisiksi, jos niissä on kaksi paria verrannollisia sivuja ja niiden väliset kulmat ovat yhtä suuret.*

Edellisen harjoituksen tulos on yhdenmuotoisuuslause sks.

Harjoitus 2.2.3. *Kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on*

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

ja $\alpha = \alpha'$. Osoita, että kolmiot ovat yhdenmuotoiset tai β ja β' ovat vieruskulmia.

Edellisen harjoituksen tulosta kutsutaan yhdemuotoisuuslauseeksi ssk.

Harjoitus 2.2.4. *Jos kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ α ja α' ovat suoria kulmia ja*

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'},$$

niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Harjoitus 2.2.5. *Todista, että jos ABC on suorakulmainen kolmio ja kulma $\angle BCA$ on suora kulma, niin*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Edellisen harjoituksen tulos on (*Pythagoraan lause*. (Huomattakoon kuitenkin, että tässä liikutaan jana-aritmetiikan kunnassa, eikä tulos siis koske pinta-aloja; niitähän ei ole vielä edes määritelty.)

2.3 Yhdenmuotoisuuteen perustuvia lauseita

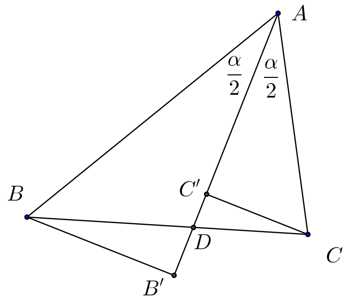
Esitämme muutaman kolmioiden yhdenmuotoisuuteen perustuvaa keskeisen ja monia sovelluksia omaavan lauseen.

Lause 2.3.1. *Jos kolmion ABC kulman α puolittaja leikkaa sivun a pisteessä D, niin*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Todistus. Olkoot B' ja C' pisteiden B ja C kohtisuorat projektiot suoralla AD. Jos $B' = C' = D$, niin kolmiot ABD ja ACD ovat yhteneviä (sks), ja väite pätee. Jos $BB'D$ ja $CC'D$ ovat kolmioita, niin ne ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'}. \tag{1}$$



Mutta mysö kolmiot ABB' ja ACC' ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC}. \tag{2}$$

Kun (1) ja (2) yhdistetään, saadaan väite.□

Edellisen lauseen tulos muotoillaan yleensä sanoiksi niin, että kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.

Harjoitus 2.3.1. *Osoita, että kolmion kulman ja sen vieruskulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.*

Jos P ja Q ovat suoran BC pisteitä, P janalla BC ja Q janan ulkopuolella, ja jos

$$\frac{AP}{PB} = \frac{QA}{QB},$$

sanotaan, että P ja Q jakavat janan BC sisä- ja ulkopuolisesti samassa suhteessa.

Harjoitus 2.3.2. *Kolmion ABC kulman $\angle CAB$ vieruskulman puolittaja leikkaa suoran BC pisteessä Q. Osoita, että*

$$\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}.$$

Kolmion kulman ja sen vieruskulman puolittajien sanotaan jakavan kolmion vastaisen sivun sisä- ja ulkopuolisesti kulman viereisten sivujen suhteessa.

Harjoitus 2.3.3. *Olkoon M janan BC keskipiste ja $P \neq M$ janan piste. Olkoon Q se suoran BC piste, joka jakaa janan BC ulkopuolisesti suhteessa $\frac{BP}{PC}$. Niiden pisteiden X joukko, joille*

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BP}{CP},$$

on ympyrä Γ, jonka halkaisija on PQ.

Edellisen harjoituksen ympyrää kutsutaan *Apollonioksen*[1] *ympyräksi.*

[1] *Apollonios Pergalainen* (n. 262– n. 190 eaa) sai antiikin aikana lisänimen *Suuri Geometrikko*. Hän selvitti perinpohjaisesti kartioleikkauskäyrien ominaisuuksia.

Lause 2.3.2. *Jos kaksi ympyrän jännettä leikkaa toisensa niin, että leikkauspiste jakaa jänteet osiin a ja b sekä c ja d, niin*

$$ab = cd$$

.

Todistus. Olkoon E jänteiden AD ja BC leikkauspiste, $a = AE$, $b = ED$, $c = BE$, $d = EC$. Kolmioissa ABE ja CDE on $\angle ABE \cong \angle CDE$ ja $\angle BAE \cong \angle DCE$. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CE}{ED}.$$

Tämä on yhtäpitävää väitteen kanssa. □

Tulo $AE \cdot ED = EB \cdot CE$, joka siis riippuu vain E:stä, on pisteen E *potenssi* ympyrän Γ suhteen. Käsite määritellään samoin myös ympyrän ulkopuolisille pisteille.

Harjoitus 2.3.4. *Muotoile ja todista edellistä lausetta vastaava tulos tilanteessa, jossa suorat AD ja BC leikkaavat toisensa ympyrän Γ ulkopuolella.*

Harjoitus 2.3.5. *Osoita, että jos O on r-säteisen ympyrän Γ keskipiste ja $OA = d$, niin pisteen A potenssi Γ:n suhteen on $|r^2 - d^2|$.*

Harjoitus 2.3.6. *Suora a sivuaa ympyrää Γ pisteessä A, suora b leikkaa Γ:n pisteissä B ja C. a ja b leikkaavat pisteessä P. Osoita, että $PA^2 = PB \cdot PC$.*

Harjoitus 2.3.7. *Ympyröillä Γ ja Γ' on sama keskipiste; Γ:n säde on pienempi kuin Γ':n. Suora a sivuaa Γ':aa pisteessä A ja suora b sivuaa Γ:aa pisteessä B. Suorat leikkaavat pisteessä P ja jana PB leikkaa Γ':n pisteessä C. Osoita, että $PB^2 - PA^2 = BC^2$.*

Jos Γ_1 ja Γ_2 ovat kaksi ympyrää, niin ne pisteet, joiden potenssi kummankin ympyrän suhteen on sama, muodostavat ympyröiden *radikaaliakselin*. Jos Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat pisteissä A ja B, niiden radikaaliakseli on selvästi suora AB.

Harjoitus 2.3.8. *Osoita, että jos O_1 ja O_2 ($O_1 \neq O_2$) ovat Γ_1:n ja Γ_2:n keskipisteet ja Γ_1 ja Γ_2 eivät leikkaa, niin niiden radikaaliakseli on eräs suoraa O_1O_2 vastaan kohtisuora suora.*

Seuraava lause on *Menelaoksen* [1] *lause.*

Lause 2.3.3. *Leikatkoon suora a suorat BC, CA ja AB pisteissä X, Y ja Z. Silloin*

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1. \tag{1}$$

Jos X, Y ja Z ovat suorien BC, CA ja AB pisteitä, joille pätee (1) ja jos pisteistä kaksi tai ei yhtään on kolmion ABC sivuilla, niin X, Y ja Z ovat samalla suoralla.

Todistus. Piirretään A:n kautta BC:n suuntainen suora. Leikatkoon a sen pisteessä D. Kolmiot AZD ja BZX ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis

$$\frac{AZ}{AD} = \frac{BZ}{BX}.$$

[1] *Menelaos Aleksandrialainen* (n. 70 – n. 130), mm. pallogeometrian uranuurtajia.

Kolmiot ADY ja CXY ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis

$$\frac{AY}{AD} = \frac{CY}{CX}.$$

Väite seuraa, kun edellisistä verrannoista eliminoidaan AD. Lauseen käänteisen puolen todistamiseksi asetetaan suora b pisteiden X ja Y kautta. Se leikkaa suoran AB pisteessä Z'. Lauseen alkuosan perusteella

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ'}{BZ'} = 1.$$

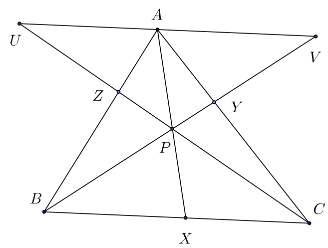
Tästä ja (1):stä seura, että $AZ/BZ = AZ'/BZ'$. Harjoitustehtävän 2.2.1 tuloksen perusteella $Z = Z'$. Pisteet X, Y ja Z ovat suoralla b. □

Jos Menelaoksen lauseen suorat tulkitaan suunistetuiksi ja janojen pituudet varustetaan suunnistuksen mukaisilla etumerkeillä, niin kaavan (1) oikea puoli on -1.

Seuraava *Cevan*[2] *lause* on muotoilultaan lähellä Menelaoksen lausetta.

Lause 2.3.4. *Olkoot X, Y ja Z kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB pisteitä ja leikatkoot suorat AX, BY ja CZ toisensa pisteessä P. Silloin*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1. \tag{2}$$



Jos (2) pätee, niin suorat AX, BY ja CZ leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

Todistus. Todistetaan ensin lauseen alkuosa. Piirretään A:n kautta BC:n suuntainen suora. Leikatkoon suora BY sen pisteessä V ja suora CZ sen pisteessä U. Kolmiot BCY ja VAY ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{CY}{YA} = \frac{BC}{AV}. \tag{3}$$

Kolmiot BCZ ja AUZ ovat yhdenmuotoisia (kk), Siis

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AU}{BC}. \tag{4}$$

Kolmiot BXP ja VAP ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{BX}{AV} = \frac{PX}{PA}. \tag{5}$$

Kolmiot XCP ja AUP ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{XC}{AU} = \frac{PX}{PA}. \tag{6}$$

[2] *Giovanni Ceva* (1647–1734), italialainen matemaatikko.

Yhtälöistä (4) ja (5) saadaan

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AV}{AU}. \tag{7}$$

Kerrotaan yhtälöt (7), (3) ja (4) puolittain. Saadaan

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{AV}{AU} \cdot \frac{BC}{AV} \cdot \frac{AU}{BC} = 1.$$

Lauseen jälkimäisen osan todistamiseksi oletetaan, että AX ja BY leikkaavat toisensa pisteessä P ja että CP leikkaa AB:n pisteessä Z'. Samoin kuin Menelaoksen lauseen tapauksessa nähdään, että $Z = Z'$, mikä todistaakin väitteen. □

Cevan lauseen avulla voidaan todistaa useita ns. *kolmion merkillisiä pisteitä* koskevia tuloksia. Jo aikaisemmin on todettu, että kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka samalla on kolmion ympärysypyrän keskipiste, ja että kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sisäympyrän keskipiste. Kolmion ABC ympärys- ja sisäympyrän keskipisteita on usein tapana merkitä kirjaimin O ja I.

Jos kolmion ABC sivujen AB, BC ja CA keskipisteet ovat C', A' ja B', niin janat AA', BB' ja CC' ovat kolmion *keskijanat* eli *mediaanit*.

Harjoitus 2.3.9. *Osoita, että kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Keskijanojen leikkauspistettä kutsutaan kolmion *painopisteeksi*. (Fysiikan kannalta kolmio on tasapainossa, jos se asetetaan mitä hyvänsä keskijanaa pitkin kulkevalle tuelle.)

Harjoitus 2.3.10. *Osoita, että kolmion painopiste jakaa jokaisen mediaanin suhteessa* $2:1$.

Harjoitus 2.3.11. *Osoita, että janat, jotka yhdistävät kolmion kärjet kolmion sisäympyrän ja kolmion sivujen yhteisiin pisteisiin, leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Edellisen harjoituksen mukainen leikkauspiste on kolmion *Gergonnen*[1] *piste*.

Jos A_1, B_1 ja C_1 ovat kolmion ABC kärkien kohtisuorat projektiot vastakkaiset sivut sisältävillä suorilla, niin AA_1, BB_1 ja CC_1 ovat kolmion *korkeusjanat*. Pisteet A_1, B_1 ja C_1 ovat korkeusjanojen *kantapisteet*.

Harjoitus 2.3.12. *Osoita Cevan lauseeseen nojautuen, että jos kolmio on teräväkulmainen, sen korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Edellisen tehtävän leikkauspiste on kolmion *ortokeskus*. Jos kolmio ei ole teräväkulmainen, sillä on korkeusjanoja, jotka eivät kulje kolmion sisällä. Edellisen tehtävän tyyppinen väite on tosi kolmion *korekeussuorille* eli niille suorille, joihin korkeusjanat kuuluvat. Todistus ei kuitenkaan onnistu suoraan Cevan lauseeseen vetoamalla.

Harjoitus 2.3.13. *Osoita, että minkä tahansa kolmion korkeussuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

[1] Ranskalainen sotilas ja matemaatikko *Joseph Gergonne* (1771–1859) oli matemaattisen julkaisutoiminnan uranuurtajia.

2.4 Pinta-ala: kuvioiden samaosaisuus ja samasisältöisyys

Samoin kuin mittaluvun liittäminen janaan, myös kuvion kokoa oikein kuvaavan mittaluvun synnyttäminen on epätriviaali tehtävä. Pyrimme ensin selvittämään, miten kahdesta kuviosta on mahdollista todeta sama-alaisuus ja sitten muodostamaan kytkennän jo luotuun janan mittalukuun. Yksinkertainen perusajatus on se, että yhtenevät kolmiot ovat alaltaan yhtä suuret. Osoittautuu, että jo kahden kuvion samankokoisuuden määrittely tuottaa ongelmia. Pinta-alan käsittelymme on hiukan viitteellinen.

Edellä kolmio on ollut kolmen pisteen ja niitä yhdistävien janojen konfiguraatio. Pidämme nyt kolmiota ABC sinä tason osajoukkona, jonka muodostaa kolmion luonnollisella tavalla määrittämän kolmen puolitason leikkauksen ja kolmion kolmen sivun yhdiste. Mainittu puolitasojen leikkaus on kolmion *sisäosa*; sisäosan pisteet ovat kolmion *sisäpisteitä.* Kolmiot, joilla ei ole yhteisiä sisäpisteitä, eivät *peitä toisiaan.*

Ensin on määriteltävä, mitä tarkoitamme kuviolla. Sanomme, että tason joukko, joka voidaan esittää toisiaan peittämättömien kolmioiden yhdisteenä, on *kuvio*. (Määritelmämme on ahdas, esimerkiksi ympyrä ei ole sen mukainen kuvio.) Voidaan osoittaa, että kahden kuvion yhdiste on kuvio ja kuvioon sisältyvän kuvion komplementti em. kuvion suhteen (yhdistettynä janoihin, jotka muodostavat kyseisen komplementin reunan) on kuvio. Käsite olla peittämättä toisiaan laajennetaan koskemaan myös kuvioita.

Harjoitus 2.4.1. *Osoita, että kahden kolmion yhdiste on kuvio ja että jos kahden kolmion leikkaus ei ole tyhjä, se on kuvio.*

Tilannetta ”kahdella kuviolla on sama pinta-ala” voi lähestyä kolmesta suunnasta. Kuvioiden P ja P' sanotaan olevan *samaosaiset*, jos ne voidaan esittää yhdisteinä

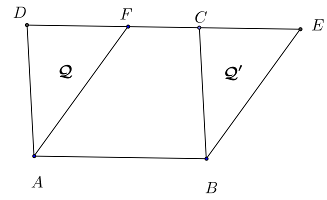
$$P = \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \quad P' = \bigcup_{i=1}^{n} K_i',$$

missä jokainen K_i ja K_j' on kolmio, jokaiset K_i, K_i' ovat yhteneviä ja jokaiset K_i, K_j, missä $i \neq j$ ja jokaiset K_i', K_j', $i \neq j$, ovat toisiaan peittämättömiä.

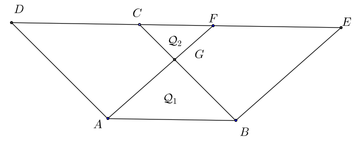
Harjoitus 2.4.2. *Olkoot $Q_1 = ABCD$, $Q_2 = EFGH$ ja $Q = IJKL$ neliöitä, Q_1 ja Q_2 toisiaan peittämättömiä ja $AB \cong EF$ ja $IJ \cong AC$. Osoita, että $Q_1 \cup Q_2$ ja Q ovat samaosaisia.*

Toinen tapa ajatella kahta kuviota ”samankokoisiksi” on seurava: Kuviot P ja P' ovat *samasisältöiset*, jos ne voidaan täydentää samaosaisin kuvioin samaosaisiksi kuvioiksi. Tämä merkitsee, että on oltava olemassa samaosaiset kuviot Q ja Q' siten, että P ja Q eivät peitä toisiaan, P' ja Q' eivät peitä toisiaan ja $P \cup Q$, $P' \cup Q'$ ovat samaosaiset. Samaosaiset kuviot ovat samasisältöisiä. Käänteinen väite on ongelmallisempi. Tyydyttävä pinta-alan käsite vaatii tavan ilmaista pinta-ala tai sen suhde johonkin standardipintalaan eli *pinta-alafunktion* määrittelemisen.

Lause 2.4.1. *Olkoot $\mathcal{P} = ABCD$ ja $\mathcal{P}' = ABEF$ suunnikkaita ja olkoot C, D, E ja F samalla suoralla. Silloin $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{P}'$ ovat samasisältöiset.*



Todistus. Voidaan olettaa, että F ja E ovat puolisuoralla $\overrightarrow{DC}$. Koska $AD \| BC$ ja $AF \| BE$, niin $\angle DAF \cong \angle CBE$ ja $AD \cong BC$, $AF \cong BE$ (lause 1.5.5). Siis kolmiot $\mathcal{Q} = AFD$ ja $\mathcal{Q}' = BEC$ ovat yhteneviä. Jos F on janalla DC, niin $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}'$, mistä väite seuraa.
Jos C on janalla DF, niin janat AF ja BC leikkaavat toisensa pisteessä G. Olkoon $\mathcal{Q}_1$ kolmio ABG ja $\mathcal{Q}_2$ kolmio GFC. Nyt $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}_2$ ja $\mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}' \cup \mathcal{Q}_2$. Määritelmän mukaan $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{P}'$ ovat samasisältöiset. □



Lause 2.4.2. *Olkoon D kolmion ABC sivun AC keskipiste ja olkoon E sellainen piste, että $ABED$ on suunnikas. Silloin kolmio ABC ja suunnikas $ABED$ ovat samaosaisia.*

Todistus. Olkoon F BC:n ja ED:n leikkauspiste. Koska $DE \| AB$, $\angle CAB \cong \angle CDF$, kolmiot ABC ja CFC ovat yhdenmuotoiset (kk). Koska D puolittaa janan AC, niin F puolittaa janan CB. Siis $FB \cong FC$. Koska $ABED$ on suunnikas, $BE \cong AD \cong DC$. Samakohtaisina kulmina $\angle DCF \cong \angle EBF$. Kolmiot DFC ja EFB ovat yhteneviä (sks). Mutta tämä merkitsee, että ABC ja $ABED$ ovat samaosaisia. □

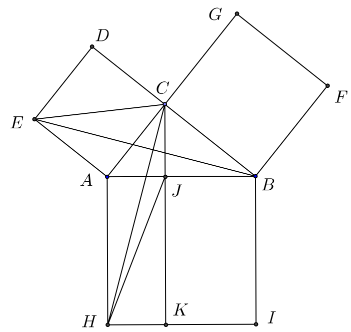
Edellisistä kahdesta lauseesta seuraa heti

Lause 2.4.3. *Olkoot ABC ja $A'B'C'$ kolmioita ja AD, $A'D'$ niiden korkeusjanoja. Jos $BC \cong B'C'$ ja $AD \cong A'D'$, niin ABC ja $A'B'C'$ ovat samasisältöiset.*

Harjoitus 2.4.3. *Olkoon $ABCD$ suorakaide. Osoita, että on olemassa suorakaide $EFGH$, joka on samasisältöinen $ABCD$:n kanssa ja jolle $EF = 1$.*

Voimme nyt todistaa *Pythagoraan lauseen* sen klassisessa muodossa. Seuraava todistus on Eukleideen.

Lause 2.4.4. *Olkoon ABC suorakulmainen kolmio, missä $\angle BCA$ on suora kulma. Olkoot $ACDE$, $CBFG$ ja $BAHI$ kolmion ABC ulkopuolella olevia neliöitä. Silloin neliö $BAHI$ on samasisältöinen kuin neliöiden $ACDE$ ja $CBFG$ yhdiste.*



Todistus. Leikatkoon pisteestä C suoraa AB vastaan kohtisuoraan piirretty suora AB:n pisteessä J ja HI:n pisteessä K. On helppo nähdä, että kolmioilla EAC ja EAB on sama korkeus. Ne ovat siis samasisältöiset. Koska kulmat $\angle EAB$ ja $\angle CAH$ ovat suoran kulman ja kulman CAB summia, ne ovat yhtä suuret.

Koska $ACDE$ ja $BAHI$ ovat neliöitä, $EA \cong AC$ ja $AB \cong AH$. Kolmiot EAB ja CAH ovat yhteneviä (sks). Kolmioilla AHC ja AHJ on sama korkeus. Nyt siis kolmiot EAC ja AHJ ovat samasisältöiset. Edelleen neliö $ACDE$ ja suorakaide $AHKJ$ ovat samasisältöiset. Samoin osoitetaan, että neliö $CBFG$ ja suorakaide $JKIB$ ovat samasisältöiset. □

Harjoitus 2.4.4. *Olkoot $ACED$, $CBFG$ ja $BAHI$ kolmion ABC ulkopuolella olevia neliöitä ja olkoon neliö $BAHI$ on samasisältöinen kuin neliöiden $ACDE$ ja $CBFG$ yhdiste. Osoita, että $\angle BCA$ on suora kulma.*

2.5 Pinta-alafunktio

Voidaan todistaa, että samaosaisuus on ekvivalenssirelaatio. Myös voidaan osoittaa, että samasisältöisyys on ekvivalenssirelaatio. Samaosaisuudesta seuraa samasisältöisyys. Nämä asiat voidaan todistaa määritelmien perusteella käyttäen hyväksi eri kolmioihinjakojen hienonnuksia. Todistukset sivuutetaan tässä. Kahden kuvion samasisältöisyyden toteaminen ei ole ongelmatonta. Erityisesti seuraava intuition mukainen väittämä, ns. *de Zoltin aksiooma*, ei ole todistettavissa: Jos kuvio Q sisältyy kuvioon P ja $P \setminus Q$:n sisäosa ei ole tyhjä, niin P ja Q eivät ole samasisältöiset. Tämän väittämän ja sen seurausten todistus perustuu ns. *pinta-alafunktion* käsitteen, joka puolestaan nojautuu algebran ryhmästruktuuriin tai sitä rikkaampaan struktuuriin[1]. Jotta menettely tulisi oikeutetuksi, on vielä saatava näyttö pinta-alafunktion olemassaolosta.

Sanomme, että Abelin ryhmä G on *järjestetty*, jos on olemassa joukko $P \subset G$ siten, että jos a ja b kuuluvat P:hen, myös $a + b$ kuuluu P:hen ja jokaiselle $a \in G$ pätee yksi ja vain yksi seuraavista: $a \in P$, $-a \in P$, $a = 0$. P on G:n positiivisten alkioiden joukko. Jos $a - b \in P$, merkitään $a > b$.

Funktio m, joka on määritelty kaikkien kuvioiden joukossa ja jonka arvot ovat ryhmässä G, on pinta-alafunktio, jos $\mathrm{m}(T) > 0$ kaikilla kolmioilla T, jos $\mathrm{m}(T) = \mathrm{m}(T')$ aina, kun T ja T' ovat yhteneviä, ja jos $\mathrm{m}(Q_1 \cup Q_2) = \mathrm{m}(Q_1) + \mathrm{m}(Q_2)$ aina, kun Q_1 ja Q_2 ovat toisiaan peittämättömiä kuvioita.

Lause 2.5.1. *Pinta-alafunktiolle* m *pätee*

(a) Jos kuviolla Q on epätyhjä sisäosa, niin $\mathrm{m}(Q) > 0$.
(b) Jos Q ja Q' ovat samaosaisia, niin $\mathrm{m}(Q) = \mathrm{m}(Q')$.
(c) Jos Q ja Q' ovat samasisältöisiä, niin $\mathrm{m}(Q) = \mathrm{m}(Q')$.
(d) Jos Q sisältyy P:hen ja $P \setminus Q$:lla on epätyhjä sisäosa, niin $\mathrm{m}(Q) < \mathrm{m}(P)$.

Todistus. Jos Q jaetaan kolmioiksi T_i, niin $\mathrm{m}(Q) = \sum_i \mathrm{m}(T_i)$, ja jokainen $\mathrm{m}(T_i) > 0$. (a) on siis tosi. (b) seuraa siitä, että yhtenevien kolmioiden pinta-ala on sama. (c):n todistamiseksi riittää täydentää Q ja Q' samaosaisilla kuvioilla P ja P' samaosaisiksi kuvioiksi $Q \cup P$ ja $Q' \cup P'$. Koska $\mathrm{m}(Q \cup P) = \mathrm{m}(Q) + \mathrm{m}(P)$, $\mathrm{m}(Q' \cup P') = \mathrm{m}(Q') + \mathrm{m}(P')$ ja (b):n perusteella $\mathrm{m}(Q \cup P) = \mathrm{m}(Q' \cup P')$ ja $\mathrm{m}(P) = \mathrm{m}(P')$, on oltava $\mathrm{m}(Q) = \mathrm{m}(Q')$. Siis (c) on voimassa. Koska $\mathrm{m}(P) = \mathrm{m}(P \setminus Q) + \mathrm{m}(Q)$ ja $\mathrm{m}(P \setminus Q) > 0$ (a):n perusteella, on $\mathrm{m}(P) > \mathrm{m}(Q)$. □

[1] Muistetaan, että emme ole mitenkään kytkeneet geometriaa reaalilukuihin, mutta käytössä on janoille luodut laskutoimitukset

Muodostetaan nyt ryhmä G lähtemällä liikkeelle edellä määritellyistä janojen laskutoimituksista. Periaatteessa samoin kuin siirryttäessä (positiivisista) luonnollisista luvuista negatiivisiin, voidaan muodostaa janojen (ekvivalenssiluokkien) vasta-alkiot. Jana-aritmetiikkaan voidaan liittää ryhmä, johon sopivat edellä pinta-alafunktion määritelmässä tarpeelliset käsitteet.

Lause 2.5.2. *Olkoon ABC kolmio. Jos $AB = c$, $BC = a$ ja C:stä AB:lle piirretty korkeusjana on CD ja A:sta BC:lle piirretty korkeusjana on AE ja jos $CD = h$, $AE = h'$, niin $ch = ah'$.*

Todistus. Kolmiot BCD ja BAE ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis $h'/h = c/a$. □

Lause 2.5.3. *On olemassa pinta-alafunktio* m, *jonka arvot kuuluvat jana-aritmetiikan muodostamaan ryhmään ja jonka arvo kolmiolle ABC on $\frac{1}{2}ah$, kun $a = BC$ ja h on kärjestä A piirretty korkeusjana.*

Todistus. Lauseen todistuksen esitämme tässä vain viitteellisesti[1]. Idea on se, että kolmioille esitetty funktio on lauseen 2.5.2 perusteella hyvin määritelty. Edelleen, jos kolmio jaetaan osakolmioiksi, määritelmä toimii: kolmion alaksi tulee osakolmioiden alojen summa. Tämän todistus on suoritettavissa induktiolla niin, että tarkastellaan ensin kolmion ABC jakoa sellaisiin osakolmioihin, joiden yksi kärki on A ja muut kärjet ovat sivulla BC, sitten sellaisia jakoja, joissa jako-osien kärjet ovat ABC:n sivuilla, ja sitten yleistä tapausta. On vielä tarkistettavissa, että funktion arvo ei riipu tavasta, jolla mielivaltainen kolmio jaetaan osiin. Että määritelty funktio toteuttaa kaikki pinta-alafunktion ehdot, on helposti tarkistettavissa. □

Lause 2.5.4. *Jos $\mathrm{m}(P) = \mathrm{m}(Q)$, missä* m *on edellisen lauseen pinta-alafunktio, niin P ja Q ovat samasisältöiset.*

Todistus. Lauseita 2.4.1 ja 2.4.2 sekä harjoitustehtävää 2.4.3 soveltaen P voidaan nähdä samasisältöiseksi kuin jokin suorakaide P', jonka yksi sivu on 1 ja toinen sivu a. Samoin Q on samasisältöinen, kuin jokin suorakaide Q', jonka yksi sivu on 1 ja toinen sivu on b. Näille suorakaiteille saadaan $\mathrm{m}(P') = 1 \cdot a = a$ ja $\mathrm{m}(Q') = 1 \cdot b = b$. Koska samasisältöisten kuvioiden pinta-ala on sama, on $a = \mathrm{m}(P) = \mathrm{m}(Q) = b$. P' ja Q' ovat samaosaiset ja siis samasisältöiset. Siis myös P ja Q ovat samasisältöiset.

Kuvion Q pinta-ala on $\mathrm{m}(Q)$. Lauseesta 2.5.3 seuraavat tutut pinta-alakaavat. Jos suorakulmion R sivut ovat a ja b, niin $\mathrm{m}(R) = ab$, ja että jos suunnikkaassa $ABCD$ on $AB = a$ ja pisteestä C suoralle AB piirretyn kohtisuoran jana $CC' = h$, niin suunnikkaan ala on ah. Nelikulmio $ABCD$, missä $AB \| CD$ on *puolisuunnikas*. Jos $CC' = h$ on pisteestä C suoralle AB piirretty kohtisuora jana, niin puolisuunnikkaan ala on $\frac{1}{2}(a + b)h$.

[1] Tarkemman version voi lukea esim. Robin Hartshornen teoksesta *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000, s. 205–210.

2.6 Toisen asteen yhtälön geometrinen ratkaisu

Edellä kehitetyssä janojen laskuopissa voidaan ratkaista "ensimmäisen asteen yhtälöitä" $ax = b^2$. (Neliön käyttämisellä vältetään yksikköjanan eksplisiittinen mukana pito.) Verrantoyhtälön

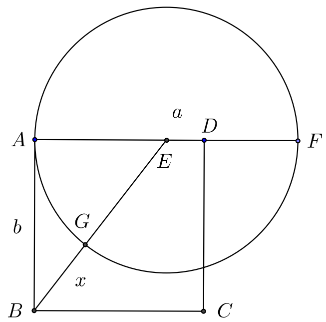
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

eli $x^2 = ab$ ratkaisu onnistuu sellaisen puoliympyrän avulla, jonka halkaisija on $a + b$.

Harjoitus 2.6.1. *Ratkaise* $ax = b^2$.

Harjoitus 2.6.2. *Ratkaise* $x^2 = ab$.

"Toisen asteen yhtälö" voi olla muotoa $x^2 + ax = b^2$, $x^2 + b^2 = ax$ tai $x^2 = ax + b^2$, missä a ja b ovat tunnettuja janoja. Ratkaistaan näistä ensimmäinen. Piirretään neliö $ABCD$, jonka sivu on b. Erotetaan puolisuoralta $\overline{AD}$ jana $AF = a$. Olkoon E janan AF keskipiste. Piirretään jana BE ja erotetaan puolisuoralta $\overline{EB}$ jana $EG \cong EF$. Selvästi $EF \cong EA < BE$. Siis $\left(BG + \frac{1}{2}a\right)^2 = BE^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$, joten $BG^2 + a \cdot BG = b^2$. Kysytty jana x on BG.



Harjoitus 2.6.3. *Ratkaise yhtälöt* $x^2 = ax + b^2$ *ja* $x^2 + b^2 = ax$.

Tunnettu toisen asteen yhtälön kautta ratkeava tehtävä on *kultaisen leikkauksen* konstruointi. Piste C jakaa janan AB kultaisen leikkauksen suhteesssa, jos

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}.$$

Jos $AB = a$ ja $AC = x$, niin

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \quad \text{eli} \quad x^2 = a^2 - ax \quad \text{eli} \quad x^2 + ax = a^2.$$

Kultaisen leikkauksen määritys palautuu yllä käsiteltyyn tehtävään.

3 Euklidisen tasogeometrian lauseita

Rakenneltuamme geometrian perustyökalut, kolmioiden yhtenevyyden ja yhdenmuotoisuuden, alamme päästä kiinni mielenkiintoisempiin asioihin. Ensin liitämme kuitenkin työkaluihimme vielä trigonometrian peruskäsitteet.

3.1 Sini- ja kosinilauseet

Jos suorakulmaisissa kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ kulmat $\angle BCA$ ja $\angle B'C'A'$ ovat suoria ja $\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha$, niin kolmiot ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} \quad \text{ja} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

Koska suhteet riippuvat vain kulman α suuruudesta, on mahdollista kutsua niitä kulmasta α riippuviksi suureiksi, edellistä kulman α *siniksi* ja jälkimmäistä kulman α *kosiniksi* ja merkitä niitä symboleilla $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$. Jos α on tylppä kulma, niin sen vieruskulma ϕ on terävä. Sovimme, että tässä tapauksessa $\sin\alpha = \sin\phi$ ja $\cos\alpha = -\cos\phi$. Lisäksi sovitaan, että jos α on suora kulma, niin $\sin\alpha = 1$ ja $\cos\alpha = 0$.

Lause 3.1.1. *Kaikille kulmille α pätee*

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Todistus. Jos αn terävä, väite seuraa suoraan Pythagoraan lauseesta (harjoituksen 2.2.5 mukaisesti). Jos α on tylppä, niin sen vieruskulmalle ϕ pätee $(\sin\phi)^2 + (\cos\phi)^2 = 1$; koska $\sin\alpha = \sin\phi$ ja $\cos\alpha = -\cos\phi$, väite pätee kaikille kulmille. □

Lause 3.1.2. *Jos kolmion sivut ovat a, b ja c ja sivujen a ja b välinen kulma on γ, niin kolmion ala on*

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Todistus. Jos $BD = h_B$ on kolmion kärjestä B piirretty korkeusjana, niin kolmion ala on $\frac{1}{2}h_Bb$. Mutta kolmio BCD on suorakulmainen ja määritelmän mukaan $\frac{h_B}{a} = \sin\gamma$. (Tämä pätee riippumatta siitä, onko γ tylppä vai terävä kulma.) Väite seuraa. □

Vakiintuneen tavan mukaan merkitsemme $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$.

Palautamme mieleen, että jokaiseen kolmioon ABC liittyy yksi ja vain yksi ympyrä, jolla kaikki kolmion kärjet ovat. Tämän kolmion *ympärysympyrän* sädettä merkitsemme kirjaimella R, ellei muun sekaannuksen vaaraa ole. Seuraavaa lausetta kutsutaan *laajennetuksi sinilauseeksi*.

Lause 3.1.3. *Kolmiossa ABC on*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Todistus. Oletetaan, että kulma $\angle BAC = \alpha$ on terävä. Piirretään kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän halkaisija $A'B$. Thaleen lauseen (1.6.7) perusteella kolmio $A'BC$ on suorakulmainen ja kehäkulmalauseen (1.6.8) perusteella $\angle BA'C = \alpha$. Siis

$$\sin\alpha = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R}.$$

Oletetaan, että $\angle BAC = \alpha$ on tylppä. Silloin A' on eri puolella suoraa BC kuin A. Harjoitustehtävän 1.6.10 perusteella $\angle BA'C = \phi$ ja $\angle BAC$ ovat toistensa vieruskulmia. Kolmio $A'CB$ on suorakulmainen. Siis

$$\sin\alpha = \sin\phi = \frac{BC}{A'B} = \frac{a}{2R}.$$

Muita kolmion sivuja ja kärkiä koskeva todistus on sama. □

Sinilauseen avulla voidaan todistaa *kosinilause*.

Lause 3.1.4. *Kolmiossa ABC on*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että β on terävä. Olkoon D se suoran BC piste, jolle $AD \perp BC$. Jos γ on terävä, D on B:n ja C:n välissä, jos γ on tylppä, C on B:n ja D:n välissä. Kosinin määritelmän mukaan kummassakin tapauksessa $a = c\cos\beta + b\cos\gamma$ eli $c\cos\beta = a - b\cos\gamma$. Siis $c^2\cos^2\beta = a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$. Sinilauseen perusteella $c^2\sin^2\beta = b^2\sin^2\gamma$. Kun edelliset lasketaan yhtälöt puolittain yhteen ja käytetään hyväksi lausetta 3.1.1, saadaan väite. □

Kosinilauseen yksi seuraus on seuraavan tehtävän sisältönä oleva *Stewartin*[1] *lause*.

Harjoitus 3.1.1. *Osoita, että jos X on kolmion ABC sivun BC piste, $BX = m$, $XC = n$ ja $AX = p$, niin*

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

Sini- ja kosinilauseet mahdollistavat "kolmion ratkaisemisen", sen "tuntemattomien osien" laskemisen tunnettujen avulla, jos eri kulmiin α liittyvät suhteet $\sin\alpha$ (tai $\cos\alpha$) ovat tiedossa. Historiallisesti "sinitaulukkojen" määritys on perustunut seuraavaan tulokseen, *Ptolemaioksen*[2] *lauseeseen.*

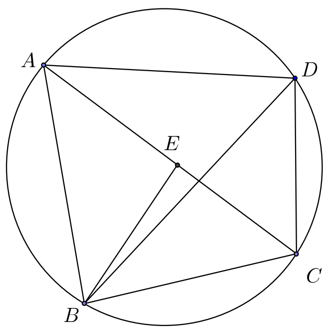
[1] *Matthew Stewart* (1717–85), skotlantilainen matematiikko.

[2] *Klaudios Ptolemaios* (n. 85 – n. 165), hellenistinen tähti- ja maantieteilijä

Lause 3.1.5. *Jos $ABCD$ on jännenelikulmio, niin*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

Todistus. Valitaan AC:ltä piste E siten, että $\angle ABE \cong \angle DBC$. Koska kehäkulmalauseen perusteella $\angle EAB \cong \angle CDB$, kolmiot ABE ja DBC ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis



$$\frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BD} \quad \text{eli} \quad AB \cdot CD = AE \cdot BD.$$

Koska $\angle ADB \cong \angle ACB$ ja (kolmion kulman vieruskulmaa koskevan lauseen ja kehäkulmalauseen perusteella) $\angle BEC \cong \angle BAC + \angle ABE \cong \angle BAC + \angle DBC \cong \angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$, kolmiot EBC ja ABD ovat yhdenmuotoiset (kk).
Siis

$$\frac{EC}{BC} = \frac{DA}{BD} \quad \text{eli} \quad BC \cdot DA = EC \cdot BD$$

ja $AB \cdot CD + BC \cdot DA = (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD$. $\square$

Harjoitus 3.1.2. *Osoita, että jos pisteet A, B, C ja D eivät ole samalla ympyrällä, niin*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA > AC \cdot BD.$$

Harjoitus 3.1.3. *Johda Ptolemaioksen lauseesta "sinin ja kosinin yhteen- ja vähennyslaskukaavat".*

Jos kolmion sivut ovat a, b ja c, niin suuretta $\frac{1}{2}(a+b+c)$ on tapana merkitä kirjaimella p. (Anglosaksisissa kirjoituksissa on useimmiten s.) Tätä symbolia käyttäen voidaan kolmion alalle muodostaa lauseke, jossa esiintyy vain kolmion sivuista suoraan laskettavia suureita. Lauseketta kutsutaan *Heronin*[1] *kaavaksi*.

Lause 3.1.6. *Jos T on kolmion ABC ala, niin*

$$T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Todistus. Kerrotaan lauseke 16:lla eli 2^4:llä ja muotoillaan sitä. Hyödynnetään lopuksi kosinilausetta: $16p(p-a)(p-b)(p-c) = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = (-a^2+(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2) = (2bc-(a^2-(b^2+c^2)))(2bc+(a^2-(b^2+c^2))) = 4b^2c^2 - (a^2-(b^2+c^2))^2 = 4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2 = 4b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = 16\left(\frac{1}{2}bc\sin\alpha\right)^2 = 16T^2$. $\square$

[1] *Heron Aleksandrialainen* (n. 10 – n. 75), hellenistisen ajan matemaatikko ja insinööri.

Heronin kaavaa vastaava pinta-alan lauseke on voimassa myös jännenelikulmioille. Lauseketta kutsutaan *Brahmaguptan*[1] *kaavaksi*.

Harjoitus 3.1.4. *Osoita, että jos jännenelikulmion $ABCD$ sivut ovat a, b, c ja d, $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, ja nelikulmion ala on S, niin*

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

3.2 Klassisia lauseita kolmioista ja ympyröistä

Kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste I on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste; tämän ympyrän sädettä on tapana merkitä kirjaimella r. Tarkastellaan nyt kolmion ABC kulmien $\angle ABC$ ja $\angle ACB$ vieruskulmien $\angle DBC$ ja $\angle ECB$ kulmanpuolittajia. Nämä leikkaavat pisteessä I_A ja pisteen I_A kohtisuorat projektiot suorilla AC, CB ja BD ovat Y, Z ja X. Yhtenevistä kolmioista I_AYC ja I_AZC saadaan $I_AZ = I_AY$. Vastaavasti $I_AZ = I_AX$. Tästä seuraa, että I_A on kolmion ABC kulman $\angle BAC$ puolittajalla ja I_A-keskinen X:n kautta kulkeva ympyrä sivuaa kolmion ABC sivua BC ja sivujen AB ja AC jatkeita. Se on yksi kolmion kolmesta *sivuympyrästä*. Merkitään sivuympyröiden keskipisteitä symbolein I_A, I_B ja I_C ja niiden säteitä r_A, r_B ja r_C.

Sanomme kolmiota, jonka kärjet ovat kolmion ABC korkeusjanojen kantapisteet, kolmion ABC *ortokolmioksi*.

Lause 3.2.1. *Kolmio ABC on kolmion $I_AI_BI_C$ ortokolmio.*

Todistus. Kulma $\angle I_AAI_B$ on kulmien $\frac{1}{2}\angle BAC$ ja (kolmion kulman vieruskulman suuruutta koskevan lauseen perusteella) $\angle ABC + \angle ACB$ summa. Mutta kulma $\angle I_AAI_C$ on samoin perustein sama summa. Siis $\angle I_AAI_B$ on suora. I_AA on kolmion $I_AI_BI_C$ korkeusjana. Samoin korkeusjanoja ovat I_BB ja I_CC. □

Kolmion ABC sivut ovat a, b ja c. Olkoon, kuten Heronin kaavassa, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Suureiden a, b, c, p, r, r_A, r_B ja r_C kesken vallitsee erinäisiä mielenkiiintoisia relaatioita.

Lause 3.2.2. *Jokainen lausekkeista pr, $(p-a)r_A$, $(p-b)r_B$, $(p-c)r_C$ on kolmion ABC alan lauseke.*

Todistus. Kolmioiden ABI, BCI ja CAI alat ovat $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}ar$ ja $\frac{1}{2}br$; kolmion ala on näiden summana $\frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$. Kolmioiden ABI_A, CBI_A ja CAI_A alat ovat $\frac{1}{2}cr_A$, $\frac{1}{2}ar_A$ ja $\frac{1}{2}br_A$. Kolmion ABC ala saadaan vähentämällä kolmion CBI_A ala kolmioiden ABI_A ja CAI_A alojen summasta; se on siis $\frac{1}{2}(c-a+b)r_A = (p-a)r_A$. Kaksi muuta lauseketta muodostuu samalla tavalla. □

[1] *Brahmagupta* (598–670), intialainen matemaatikko.

Harjoitus 3.2.1. *Kolmion ABC sisäympyrä sivuaa kolmion sivua BC pisteessä D ja kulman $\angle CAB$ aukeamassa oleva sivuympyrä sivuaa BC:tä pisteessä E. Osoita, että $BD = CE = p - b$.*

Harjoitus 3.2.2. *Olkoot kolmion ABC kärjistä A, B ja C piirretyt korkeusjanat h_A, h_B ja h_C. Osoita, että*

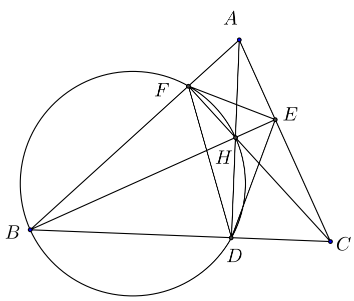
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C}.$$

Harjoitus 3.2.3. *Nelikulmion sivut ovat a, b, c ja d. Osoita, että nelikulmion sisään voidaan piirtää ympyrä jos ja vain jos $a + c = b + d$.*

Esitämme vielä muutaman tunnetun kolmiota koskevan lauseen.

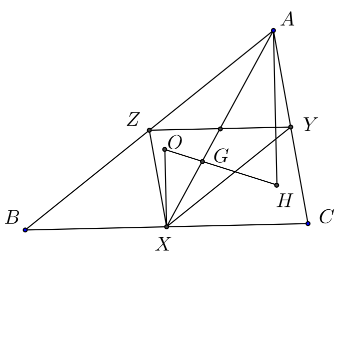
Lause 3.2.3. *Teräväkulmaisen kolmion ortokeskus on sen ortokolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.*

Todistus. Olkoon DEF kolmion ABC ortokolmio ja H ABC:n ortokeskus. H on ABC:n sisäpuolella. Piirretään ympyrä Γ, jonka halkaisija on BH. Koska kulmat BFH ja BDH ovat suoria, pisteet D ja F ovat ympyrällä Γ. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle ABH \cong \angle FDH$. Samalla tavoin, tarkastelemalla ympyrää, jonka halkaisija on CH, voidaan osoittaa, että $\angle ADE \cong \angle HCA$. Mutta kolmiot ABE ja ACF ovat yhdenmuotoisia (kk). Siis $\angle ABH \cong \angle ACH$. Mutta nyt onkin $\angle FDH \cong \angle HDE$. Piste H on siis kolmion DEF kulman $\angle FDE$ puolittajalla. Samoin osoitetaan, että H on kolmion muiden kulmien puolittajilla. Koska kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste, väite on todistettu. □



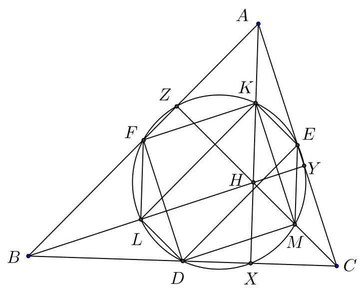
Lause 3.2.4. *Kolmion painopiste, ortokeskus ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ovat samalla suoralla.*

Todistus. Olkoot X, Y ja Z kolmion ABC sivujen BC, CA ja AB keskipisteet, O sen ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, G painopiste ja H ortokeskus. Kolmio XYZ on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa ja $BC = 2 \cdot YZ$. Piste O on kolmion XYZ korkeusjanojen leikkauspiste. Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinkärkien ja korkeusjanojen leikkauspisteen etäisyyksien suhde on sama kuin sivujen pituuksien suhde. Siis $AH = 2 \cdot OX$. Harjoitustehtävän 2.3.10 perusteella $AG = 2 \cdot XO$. Koska $AH \| OX$, $\angle OXG = \angle HAG$. Kolmiot OXG ja HAG ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis $\angle OGX = \angle HGA$. Mutta tämä merkitsee, että O, G ja H ovat samalla suoralla. □



Suora OGH on kolmion ABC *Eulerin suora*.

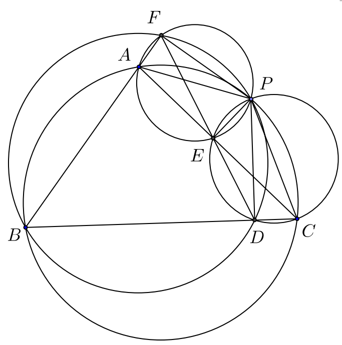
Lause 3.2.5. *Kolmion ABC sivujen AB, BC ja CA keskipisteet D, E ja F, korkeusjanat AX, BY ja CZ, ortokeskus H ja janojen AH, BH ja CH keskipisteet K, L ja M. Pisteet D, E, F, X, Y, Z, K, L ja M ovat samalla ympyrällä.*



Todistus. Kolmiot AFK ja ABH ovat yhdenmuotoiset (sks), samoin kolmiot CMD ja CHB. Siis $FK \| BH \| DM$. Kolmiot BDF ja BCA ovat yhdenmuotoiset (sks), samoin kolmiot HMC ja HCA. Siis $FD \| AC \| KM$. Nelikulmio $FDMK$ on siis suunnikas. Mutta $BH \perp AC$, joten $KF \perp KM$. Suunnikas $FDMK$ on siis suorakulmio, ja $\angle DMK$ ja $\angle KFD$ ovat suoria kulmia. Samoin osoitetaan, että $KLDE$ on suorakulmio ja että $\angle DEK$ ja $\angle DLK$ ovat suoria kulmia. Myös kulma $\angle DXK$ on suora. Piirretään ympyrä Γ, jonka halkaisija on DK. Thaleen lauseen nojalla pisteet F, L, D, X, M, E ja K ovat tällä ympyrällä. Myös LE on Γ:n halkaisija. Koska $\angle LYE$ on suora, Y on ympyrällä Γ. Koska edelleen FM on Γ:n halkaisija ja $\angle FZM$ on suora, Z on ympyrällä Γ. □

Edellisen lauseen mukaista ympyrää kutsutaan kolmion *yhdeksän pisteen ympyräksi* tai *Feuerbachin*[1] *ympyräksi*.

Lause 3.2.6. *Olkoot D, E ja F kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteen P kohtisuorat projektiot suorilla BC, CA ja AB. Pisteet D, E ja F ovat samalla suoralla.*



Todistus. Tarkastellaan tilannetta, jossa P on kulman CBA aukeamassa. Koska kulmat $\angle PEC$ ja $\angle PDC$ ovat suoria, pisteet E ja D ovat ympyrällä, jonka halkaisija on PC. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle DEC \cong \angle DPC$. Samalla tavalla osoitetaan, että $\angle AEF \cong \angle APF$. Koska $ABCP$ on jännenelikulmio, kulmat $\angle ABC$ ja $\angle CPA$ ovat toistensa vieruskulmia (harjoitustehtävä 35). Mutta koska kulmat $\angle PFB$ ja $\angle PDB$ ovat suoria, $FBDP$ on myös jännenelikulmio, ja kulmat $\angle DPF$ ja $\angle ABC$ ovat toistensa vieruskulmia. Kulmat $\angle APC$ ja $\angle FPD$ ovat yhteneviä, joten $\angle APF \cong \angle CPD$ ja myös $\angle FEA \cong \angle CED$. Mutta tästä seuraa, että $\angle CED$ on kulman $\angle FEA$ ristikulma ja FED on suora. □

Suoraa DEF sanotaan kolmion ABC *Simsonin suoraksi*. Nimi tulee *Robert Simsonista* (1687–1768); mitään todisteita tämän Simsonin ja ko. suoran yhteydestä ei kuitenkaan ole. Suora keksittiin vasta vuonna 1797.

Harjoitus 3.2.4. *Osoita, että kolmion yhdeksän pisteen ympyrän keskipiste on kolmion Eulerin suoralla.*

[1] *Karl Feuerbach* (1800–34), saksalainen matemaatikko.

Harjoitus 3.2.5. *Todista Simsonin lauseen käänteislause: jos pisteen P projektiot D, E ja F suorilla BC, CA ja AB ovat samalla suoralla, niin P on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä.*

3.3 Säännölliset monikulmiot

Sanomme, että n-kulmio $A_1A_2 \dots A_n$ on *säännöllinen monikulmio*, jos se on kokonaan jommassakummassa jokaisen suoran A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 määräämässä puolitasossa, jos $A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \dots \cong A_{n-1}A_n \cong A_nA_1$ ja jos $\angle A_1A_2A_3 \cong \angle A_2A_3A_4 \cong \dots \cong \angle A_{n-1}A_nA_1$.

Lause 3.3.1. *Säännöllisen monikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.*

Todistus. Olkoon Γ kolmion $A_1A_2A_3$ ympäri piirretty ympyrä. Kolmiot $A_1A_2A_3$ ja $A_2A_3A_4$ ovat tasakylkisiä ja yhteneviä (sks). Siis $\angle A_2A_1A_3 \cong \angle A_2A_4A_3$. Koska A_1 ja A_4 ovat samalla puolella suoraa A_2A_3, A_4 kuuluu ympyrään Γ. Prosessia voidaan jatkaa ja todeta, että kaikki n-kulmion kärkipisteet kuuluvat ympyrään Γ. $\square$

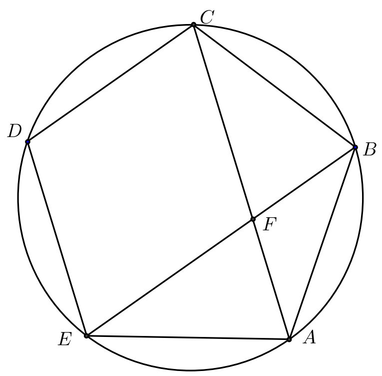
Kolmio ABC on tasasivuinen, jos $AB \cong BC \cong CA$. Koska tasasivuinen kolmio on (kolmella eri tavalla) tasakylkinen, sen kaikki kulmat ovat yhteneviä. Tasasivuinen kolmio on siis säännöllinen kolmikulmio. Neliö on säännöllinen nelikulmio.

Säännöllisen kuusikulmion rakentamiseksi lähdetään tasasivuisesta kolmiosta OAB. Konstruoidaan sen kanssa yhtenevät kolmiot OBC, OCD, OFA ja OEF. Silloin $\angle BOD \cong 2 \cdot \angle AOB$. Kulman $\angle AOB$ vieruskulma on myös yhtenevä kulman $2 \cdot \angle AOB$ kanssa. Tästä seuraa, että A ja D ovat samalla suoralla. Samoin osoitetaan, että B ja E ovat samalla suoralla. Tästä seuraa, että $\angle DOE \cong \angle AOB$ (ristikulmat), joten kolmiot OAB ja ODE ovat yhteneviä (sks). Siis $DE \cong AB$. Kuusikulmiossa $ABCDEF$ ovat kaikki sivut yhteneviä ja jokainen kulma on kahden tasasivuisen kolmion kulman summana jokaisen muun kanssa yhtenevä. $ABCDEF$ on säännöllinen kuusikulmio.

Säännöllisen viisikulmion konstruointi on hiukan mutkikkaampaa. Se perustuu viisikulmion ja kultaisen leikkauksen väliseen yhteyteen.

Lause 3.3.2. *Jos $ABCDE$ on säännöllinen viisikulmio ja lävistäjien AC ja BE leikkauspiste on F, niin*

$$\frac{BF}{FE} = \frac{FE}{BE}.$$



Todistus. Piirretään viisikulmion ympäri ympyrä. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle AEB \cong \angle ABE \cong \angle BAC$. Tasakylkiset kolmiot ABE ja BFA ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis

$$\frac{BF}{BA} = \frac{AE}{BE}.$$

Koska kehäkulma- ja vieruskulmalauseiden perusteella $\angle CAE = 2 \cdot \angle DAE \cong \angle ABE +$

$\angle BAC \cong \angle AFE$, kolmio AFE on tasakylkinen, $AE \cong FE$. Siis

$$\frac{BF}{FE} = \frac{FE}{BE}.$$

□

Säännöllisen viisikulmion olemassaolon osoitus ja kuvion konstruointi tehdään edellisen lauseen osviittojen mukaisesti. Jaetaan annettu jana EB kultaisen leikkauksen suhteeseen pisteellä F, niin että EF on jako-osista suurempi. Piirretään tasakylkinen kolmio BEA, jossa $AE \cong EF$.Piirretään tasakylkinen kolmioo ABC niin, että $BC \cong BA$. Koska konstruktion mukaan

$$\frac{BF}{BA} = \frac{BA}{BE},$$

niin $BFA \sim BAE$ ja $\angle FAB \cong \angle BEA$. Kolmiot BEA ja BCA ovat yhteneviä tasakylkisiä kolmoioita, piste F on myös janalla AC ja se jakaa myös AC:n samoin kuin EB:n. Edelleen CEF on kolmion ABF kanssa yhdenmuotoinen tasakylkinen kolmio, ja jakosuhteista seuraa, ettö $CE \cong EB$. Konstruoidaan vielä tasakylkinen kolmio ECD, missä $CD = DE = AB$. Syntyneessä viisikulmiossa $ABCDE$ ovat kaikki sivut yhtä kitkiä ja jokainen kulma on $3 \cdot \angle BEA$.

Kysymykset säännöllisten monikulmioiden konstruoitavuudesta ovat vaikeita. Gauss osoitti, että säännöllinen n-kulmio on konstruoitavissa harpilla ja viivottimella vain silloin, kun $n = 2^p$, $p \geq 2$, tai $n = 2^p(2^{2^k} + 1)$, $p \geq 0$, $k \geq 0$ ja $2^{2^k} + 1$ on alkuluku. Täten säännöllinen 17-kulmio on konstruoitavissa harpilla ja viivoittimella, samoin säännöllinen 257-kulmio ja säännöllinen 65537-kulmio.

Harjoitus 3.3.1. *Piirrä harpilla ja viivoittimella säännöllinen viisikulmio, jonka yksi sivu on annettu jana AB.*

Harjoitus 3.3.2. *Selvitä, miten konstruoidaan säännöllinen kahdeksankulmio.*

Harjoitus 3.3.3. *Selvitä, miten konstruoidaan säännöllinen kuusikulmio.*

4 Geometriset kuvaukset

Eräs tapa lähestyä geometriaa on rakentaa jokin pohja ("avaruus") ja määritellä siihen geometrisia objekteja sen mukaan, minkälaiset joukot ovat invariantteja tiettyjen avaruuden kuvausten suhteen. Tässä esityksessä omaksutun tavan mukaan määrittelemme kuitenkin keskeiset geometriset kuvaukset jo rakentamiemme ominaisuuksien varaan.

4.1 Yhtenevyyskuvaukset

Merkitsemme aksioomiemme kautta määriteltyä euklidista tasoa kirjaimella τ. Kuvaus $f : \tau \to \tau$ on *yhtenevyyskuvaus*, jos jokaisen τ:n suoran a kuvajoukko $f(a)$ sisältyy johonkin suoraan, jos jokainen jana AB on yhtenevä janan $f(A)f(B)$ kanssa ja jos jokainen kulma $\angle ABC$ on yhtenevä kulman $f(A)f(B)f(C)$ kanssa.

Janan ja kulman yhtenevyyden transitiivisuudesta seuraa, että kahdesta yhtenevyyskuvauksesta yhdistetty kuvaus on edelleen yhtenevyyskuvaus.

Lause 4.1.1. *Janan AB kuvajoukko yhtenevyyskuvauksessa f on jana $f(A)f(B)$.*

Todistus. Jos C on janan AB piste, niin $f(C)$ on joka tapauksessa suoralla $f(A)f(B)$. Jos $f(C)$ ei olisi $f(A)$:n ja $f(B)$:n välissä, olisi joko $f(B)$ $f(A)$:n ja $f(C)$:n välissä tai $f(A)$ $f(B)$:n ja $f(C)$:n välissä. Edellisessä tapauksessa olisi $f(A)f(B) < f(A)f(C) \cong AC < AB \cong f(A)f(B)$. Ristiriita! Jälkimmäisestä tapauksesta päädytään samalla tavalla ristiriitaan. Jos C' on janalla $f(A)f(B)$, janalla AB on piste C niin, että $AC \cong f(A)C'$. Silloin $f(C')$ on janan $f(A)f(B)$ piste ja $f(A)f(C') \cong AC \cong f(A)C'$. Siis $C' = f(C)$. $\square$

Lause 4.1.2. *Yhtenevyyskuvaus on bijektio.*

Todistus. Janan kuvautumisominaisuuden perusteella yhtenevyyskuvaus on injektio. Olkoon Y mielivaltainen piste. Olkoot A ja B kaksi tason pistettä. Jos Y on suoralla $f(A)f(B)$, niin edellisen lauseen perusteella Y on jonkin janan AB pisteen kuva. Olkoon sitten Y suoran $f(A)f(B)$ ulkopuolella. On kaksi kulmaa $\angle ABX_1$ ja $\angle ABX_2$, jotka ovat yhteneviä $\angle f(A)f(B)Y$:n kanssa. Tästä seuraa, että joko suoran BX_1 tai suoran BX_2 kuvajoukko sisältyy suoraan $f(B)Y$; voidaan osoittaa samoin kuin edellä, että Y itse asiassa on $f(X)$ jollain suoran BX_1 tai BX_2 pisteellä X. $\square$

Harjoitus 4.1.1. *Osoita, että yhtenevyyskuvauksen käänteiskuvaus on yhtenevyyskuvaus.*

Edellisen harjoituksen tuloksesta ja siitä, että identtinen kuvaus on yhtenevyyskuvaus, seuraa, että tason yhtenevyyskuvaukset muodostavat ryhmän, kun laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen.

Jokaisen kolmion ABC kuva $f(A)f(B)f(C)$ yhtenevyyskuvauksessa on ABC:n kanssa yhtenevä kolmio. Ympyrän, jonka keskipiste on O, kuva on samasäteinen ympyrä, jonka keskipiste on $f(O)$.

Lause 4.1.3. *Jos kaikilla kolmioilla ABC $f(A)f(B)f(C) \cong ABC$, niin f on yhtenevyyskuvaus.*

Todistus. Olkoot A ja B kaksi tason pistettä. Olkoon C suoran AB piste ja D suoran AB ulkopuolella. Jos C on janalla AB, kulmat $\angle ACD$ ja $\angle BCD$ ovat vieruskulmia. Koska kolmiot $f(A)f(C)f(D)$ ja $f(D)f(C)f(B)$ ovat yhteneviä kolmioiden ACD ja DCB kanssa, kulmat $\angle f(A)f(C)f(D)$ ja $\angle f(D)f(C)f(B)$ ovat toistensa vieruskulmia. Tästä seuraa, että $f(C)$ on suoralla $f(A)f(B)$. Samoin todistetaan, että $f(C)$ on suoralla $f(A)f(B)$ tapauksissa, joissa C ei ole janalla AB. f kuvaa siis suoran suoralle. On selvää, että f kuvaa janan yhtenevällä janalle. Että f kuvaa kulman yhtenevälle kulmalle seuraa siitä, että kulmaan voidaan rakentaa kolmio, joka kuvautuu yhtenevälle kolmiolle. □

Tarkastellaan seuraavaksi eräitä yhtenevyyskuvausten lajeja ja niiden käyttöä geometristen ongelmien ratkaisemisessa. Tällaisissa tehtävissä ratkaisun perusajatus on siirtää jokin geometrinen objekti yhtenevyyskuvauksella toisen geometrisen objektin ”päälle”.

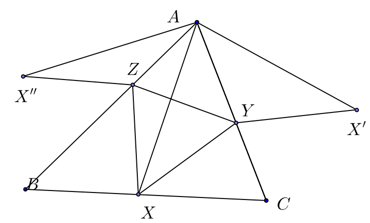
Peilaus yli suoran. Olkoon a suora. Määritellään $f_a : \tau \to \tau$ seuraavasti: jos $P \in a$, niin $f_a(P) = P$. Jos $P \notin a$, on olemassa yksi ja vain yksi piste $Q \in a$ niin, että $PQ \perp a$. Asetetaan $f_a(P)$:ksi se suoran PQ piste, jolle $f(P)Q \cong PQ$ ja Q on $f_a(P)$:n ja P:n välissä. Kuvaus f_a on *peilaus suoran a yli.* Kuvausta f_a kutsutaan myös *symmetriaksi suoran a suhteen* ja kuviota sekä sen f_a:n avulla tuotettua kuvaa *symmetrisiksi*.

Harjoitus 4.1.2. *Osoita, että peilaus yli suoran a on yhtenevyyskuvaus.*

Esimerkkinä peilauksen käytöstä esitetään *Fagnanon*[1] *ongelman* ratkaisu. Ongelmassa kysytään sitä teräväkulmaisen kolmion ABC sisään piirrettyä kolmiota, jonka piiri on mahdollisimman pieni. Huomattakoon, että ”sisään piirretty kolmio” on kolmio, jonka kärjet ovat ABC:n eri sivuilla.

Lause 4.1.4. *Ortokolmion piiri on lyhin kaikkien kolmion ABC sisään piirrettyjen kolmioiden piirien joukossa.*

Todistus. Tarkastellaan ensin mielivaltaisia sivujen BC, CA ja AB pisteitä X, Y ja Z. Kun taso peilataan suoran AC yli, X kuvautuu pisteeksi X' ja Y pysyy paikallaan. Lisäksi $XY = X'Y$ ja $\angle XAC \cong \angle CAX'$. Kun taso peilataan suoran AB yli, X kuvautuu pisteeksi X'', Z pysyy paikallaan, $XZ = X''Z$ ja $\angle XAB \cong \angle BAX''$. Kolmion XYZ piiri on yhtä pitkä kuin murtoviiva $X'YZX''$ ja $\angle X'AX'' = 2 \cdot \angle BAC$. Kolmioepäyhtälöä kahdesti soveltamalla nähdään, että $X'YZX''$ on pitempi tai yhtä pitkä kuin jana $X'X''$. Mutta $X'X''$ on kanta tasakylkisessä kolmiossa, jonka huippukulma on $2 \cdot \angle BAC$ ja kylki $AX' = AX''$. Kaikki tällaiset tasakylkiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia, joten $X'X''$ on pienin silloin, kun AX on pienin. Tämä taas tapahtuu silloin, kun $AX \perp BC$. Symmetrian vuoksi lyhimmän piirin kolmiossa myös $BY \perp CA$ ja $CZ \perp AB$. Minimipiirikolmio on siis ABC:n ortokolmio. □



[1] *Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi* (1715–97), italialainen pappi ja harrastelijamatemaatikko. Myös lause 3.2.3 on peräisin häneltä.

Harjoitus 4.1.3. *Olkoot A ja B samalla puolen suoraa a. Määritä murtoviivoista ACB, missä $C \in a$, lyhin.*

Harjoitus 4.1.4. *Konstruoi annetun pisteen kautta suora, joka leikkaa kaksi annettua suoraa samassa kulmassa.*

Harjoitus 4.1.5. *Kolmiosta ABC tunnetaan c, $a - b$ $(a > b)$ ja $\angle ABC = \beta$. Konstruoi ABC.*

Siirto. Olkoot A ja B kaksi tason eri pistettä. Kuvaus f_{AB} kuvaa pisteen P, joka ei ole suoralla AB, suoran AB suuntaiselle suoralle niin, että $ABf(P)P$ on suunnikas. Jos P on suoralla AB, niin $f(P)$ on sellainen suoran AB piste, että $Pf(P) \cong AB$ ja joko $\overrightarrow{AB}$ on $\overrightarrow{Pf(P)}$:n osa tai $\overrightarrow{Pf(P)}$ on $\overrightarrow{AB}$:n osa. f_{AB} on janan AB määrittämä *siirto*. Huomataan, että $f_{AB}(A) = B$.

Harjoitus 4.1.6. *Osoita, että f_{AB}:llä on ominaisuudet $Pf_{AB}(P) \| AB$ ja $Pf_{AB}(P) \cong AB$ kaikilla $P \in \tau$.*

Siirto voidaan aina palauttaa kahdesta peilauksesta yhdistetyksi kuvaukseksi.

Lause 4.1.5. *Olkoon a janan AB keskinormaali ja $b \| a$ B:n kautta kulkeva suora. Silloin $f_{AB} = f_b \circ f_a$.*

Todistus. Janat $Pf_a(P)$ ja $f_a(P)f_b(f_a(P))$ ovat a:ta ja b:tä vastaan kohtisuorassa ja siis AB:n suuntaisia. Käymällä läpi P:n eri etäisyydet suorista a ja b vakuuttuu siitä, että $Pf(P) = AB$ ja että P ja $f(P)$ ovat oikeassa järjestyksessä. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, että siirto on yhtenevyyskuvaus.

Harjoitus 4.1.7. *Olkoon Γ O-keskinen r-säteinen ympyrä ja AB jana, jonka pituus on $a < 2r$. Konstruoi sellainen ympyrän Γ sisään piirretty suorakaide, jonka yksi sivu on AB:n suuntainen ja a:n pituinen.*

Harjoitus 4.1.8. *Suorat a ja b ovat yhdensuuntaiset ja c leikkaa ne. Jana AB on pitempi kuin suorien a ja b kohtisuora etäisyys. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka sivu on AB:n pituinen ja jonka kärjet ovat suorilla a, b ja c.*

Harjoitus 4.1.9. *On annettu ympyrät Γ_1 ja Γ_2 sekä suora a. Konstruoi a:n suuntainen suora, josta Γ_1 ja Γ_2 erottavat yhtä pitkät jänteet.*

Harjoitus 4.1.10. *On annettu neljä pistettä A, B, C ja D. Konstruoi näiden pisteiden kautta yhdensuuntaiset suorat a, b, c ja d niin, että a:n ja b:n etäisyys on sama kuin c:n ja d:n etäisyys.*

Kierto. Merkittävän lajin yhtenevyyskuvauksia muodostavat *kierrot*. Kierron määrittelemiseksi on tarkasteltava kulmien *suunnistusta*. Olkoon $\overrightarrow{AB}$ puolisuora. Suora AB jakaa tason kahdeksi puolitasoksi. Sovitaan, että näistä toinen on $\overrightarrow{AB}$:n *vasen puoli* ja toinen $\overrightarrow{AB}$:n *oikea puoli*. $\overrightarrow{AB}$:n vasen puoli on $\overrightarrow{BA}$:n oikea puoli ja $\overrightarrow{AB}$:n oikea puoli on $\overrightarrow{BA}$:n vasen puoli. Jos B ja C ovat samalla A:sta lähtevällä puolisuoralla ja B on A:n ja C:n välissä, niin $\overrightarrow{AB}$:n vasen puoli on $\overrightarrow{AC}$:n vasen puoli. Jos $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ muodostavat kulman ja jos $\overrightarrow{AC}$ on $\overrightarrow{AB}$:n vasemmalla puolella, niin se AC:n määrittämistä puolitasoista, jossa $\overrightarrow{AB}$ on, on $\overrightarrow{AC}$:n oikea puoli. Jos kulman $\angle AOC$ aukeama on $\overrightarrow{OA}$:n vasemman puolen osa (jolloin se on samalla $\overrightarrow{OC}$:n oikean puolen osa), niin $\overrightarrow{OA}$ on $\angle AOC$:n *oikea kylki* ja $\overrightarrow{OC}$ on $\angle AOC$:n *vasen kylki*.

Edellä sanotusta seuraa, että kahden toisiaan leikkaavan suoran muodostamissa ristikulmissa sama suora on kummankin kulman oikea kylki ja sama suora on kummankin vasen kylki. Samoin, jos $a\|b$ ja jos a on b:n vasemmalla puolella, niin b on a:n oikealla puolella.

Kolmio ABC on *positiivisesti suunnistettu,* jos C on $\overrightarrow{AB}$:n vasemmalla puolella. Silloin myös A on $\overrightarrow{BC}$:n vasemmalla puolella ja B $\overrightarrow{CA}$:n oikealla puolella. Kolmio, joka ei ole positiivisesti suunnistettu, on *negatiivisesti suunnistettu.* Jos A ja D ovat eri puolilla suoraa BC, niin kolmiot ABC ja DBC ovat *vastakkaisesti suunnistettuja.*

Harjoitus 4.1.11. *Olkoon $f = f_a$ peilaus yli suoran. Osoita, että kolmiot ABC ja $f(A)f(B)f(C)$ ovat vastakkaisesti suunnistetut.*

Olkoon O tason piste ja α kulma. Kuvaus $f = f_{O,\alpha,+}$ on *kierto pisteen O ympäri kulman α verran positiiviseen kiertosuuntaan* eli *vastapäivään,* jos $f(O) = O$ ja kaikille $P \neq O$ OP ja $Of(P)$ ovat yhtenevät, $\angle POf(P) = \alpha$ ja OP on tämän kulman oikea kylki. Vastaavasti kuvaus $f = f_{O,\alpha,-}$ on kierto pisteen O ympäri *negatiiviseen kiertosuuntaan* eli *myötäpäivään,* jos $f(O) = O$, $\angle POf(P) = \alpha$ ja $Of(P)$ on kulman $\angle POf(P)$ oikea kylki.

Samoin kuin siirto, myös kierto voidaan esittää kahdesta suorassa tehtävän peilauksesta muodostettuna yhdistettynä kuvauksena.

Lause 4.1.6. *Olkoot a ja b kaksi tason suoraa, jotka eivät ole yhdensuuntaiset eivätkä kohtisuorassa toisiaan vastaan. Oletetaan, että a ja b leikkaavat toisensa pisteessä O. Olkoon α se leikkauspisteeseen syntyvistä vieruskulmista, joka on pienempi kuin suora kulma. Jos tämän kulman oikea kylki kuuluu suoraan a, niin kuvaus $f = f_b \circ f_a$ on kierto kulman 2α verran pisteen O ympäri positiiviseen kiertosuuntaan.*

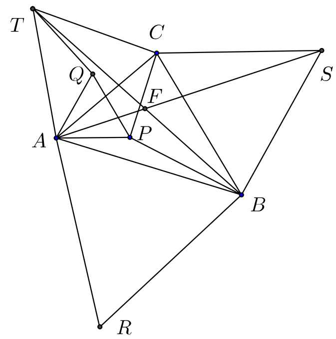
Todistus. Olkoon P on sellainen piste, että $\overrightarrow{OP}$:n ja a:n välinen kulma on $\beta < \alpha$. Silloin $\overrightarrow{Of_a(P)}$:n ja b:n välinen kulma on $\alpha - \beta$ samoin kuin $\overrightarrow{O(f_b \circ f_a)(P)}$:n ja b:n välinen kulma. Kulma $\angle PO(f_b \circ f_a)(P)$ on siis $\beta + \alpha + (\alpha - \beta) = 2\alpha$. Siitä, että $f_b \circ f_a$ yhtenevyyskuvauksena säilyttää kulmat, seuraa, että $\angle (f_b \circ f_a)(P)OP = 2\alpha$ kaikilla $P \neq O$. □

Edellisestä lauseesta seuraa, että kierto on yhtenevyyskuvaus.

Esimerkkinä kierron käytöstä tarkastellaan *Fermat'n ongelmaa.* Tässä ongelmassa etsitään kolmion ABC sisäpistettä P, jolle $AP + BP + CP$ on mahdollisimman pieni.

Lause 4.1.7. *Janat, jotka yhdistävät kolmion ABC kärjet vastakkaiset sivut kantana piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden kärkiin, leikkaavat toisensa samassa pisteessä F. $FA + FB + FC$ on pienin kaikista summista $PA + PB + PC$, missä P on kolmion P sisäpiste.*

Todistus. Yhdistetään mielivaltainen ABC:n sisäpiste P kolmion kärkiin. Olkoon α tasasivuisen kolmion kulma. Kierto $f_{A,\alpha,+}$ kuvaa janan AC janaksi AT. Kolmio ACT on tasasivuinen. Piste P kuvautuu pisteeksi Q ja myös kolmio APQ on tasasivuinen. Siis $AP+BP+CP=QP+BP+TQ$. Mutta murtoviiva $BPQT$ on pitempi tai yhtä pitkä kuin jana TB. Jos P sijaitsee tällä janalla ja $\angle APT=\alpha$, niin Q:kin on samalla janalla. Aloittamalla tarkastelu kolmion muista kärjistä saadaan kaksi muuta kolmion kärjen (C tai A) ja sitä vastassa olevalle sivulle rakennetun tasasivuisen kolmion (CBS tai BAR) kärjen yhdistävää janaa (AS, CR), joilla Fermat'n ongelman ratkaisupiste myös on. Näiden janojen on siis leikattava toisensa pisteessä F. $\square$



Piste F on kolmion ABC *Fermat'n piste*. Huomataan, että kierrot $f_{A,\alpha,+}$, $f_{B,\alpha,+}$ ja $f_{C,\alpha,+}$ kuvaavat janat CR:n TB:ksi, AS:n RC:ksi ja TB:n AS:ksi.

Harjoitus 4.1.12. *Suunnikkaan $ABCD$ sivut sivuina piirretään neliöt suunnikkaan ulkopuolelle. Todista, että näiden neliöiden keskipisteet ovat erään neliön kärjet.*

Harjoitus 4.1.13. *Tasossa on annettu neljä eri pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että on olemassa neliö, jonka sivut tai niiden jatkeet sisältävät kukin yhden näistä pisteistä.*

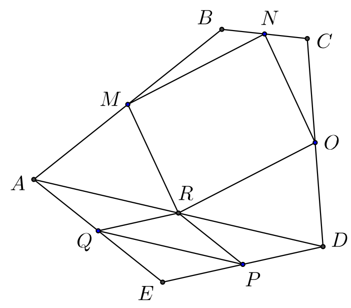
Peilaus pisteessä. Olkoon O kiinteä piste. Kuvaus $f=f_O$, jossa jokainen $P\neq O$ kuvautuu puolisuoran $\overrightarrow{OP}$ vastakkaiselle puolisuoralle niin, että $Of(P)\cong OP$, on *peilaus pisteessä* O. Kuvausta kutsutaan myös *symmetriaksi pisteen* O *suhteen* ja kuviota ja sen kuvaa keskeissymmetrisiksi.

Selvästi $f_O(f_O(P))=P$ kaikilla P, joten $f_O^{-1}=f_O$: f_O on oma käänteiskuvauksensa. Jos $A\neq B$, niin AB on kolmion $Pf_A(P)f_B(f_A(P))$ sivujen $Pf_A(P)$ ja $f_A(P)f_B(f_A(P))$ keskipisteiden yhdysjana. Siis $A(f_B\circ f_A)(P)\|AB$ ja $A(f_B\circ f_A)(P)=2AB$. Yhdistetty kuvaus $f_B\circ f_A$ on siis siirto AB:n suuntaisen ja kaksi kertaa AB:n pituisen janan suuntaan.

Lause 4.1.8. *Siirrosta f_{AB} ja peilauksesta f_O yhdistetty kuvaus $f_O\circ f_{AB}$ on peilaus pisteen C yli, missä CO ja AB ovat yhdensuuntaisia ja $AB=2CO$ ja A ja C ovat samalla puolen suoraa BO (tai jos A, B ja O ovat samalla suoralla, $\overrightarrow{CO}$ ja $\overrightarrow{AB}$ määrittävät saman suunnan).*

Todistus. Jos $Q=f_{AB}(P)$ ja $R=f_O(Q)$, niin O on kolmion PQR sivun QR keskipiste ja $OC\|PQ$, $OC=\dfrac{1}{2}PQ$. Tämä on mahdollista vain, jos C on PR:n keskipiste. Siis $R=f_C(P)$. $\square$

Sovelletaan symmetriaa pisteen suhteen tehtävään, joosa on konstruoitava tuntematon viisikulmio $ABCDE$, kun tunnetaan sen sivujen keskipisteet M, N, O, P ja Q. Koska peilaus janan keskipisteen yli vaihtaa janan päät keskenään, on $D = (f_O \circ f_N \circ f_M)(A)$ ja $D = (f_P \circ f_Q)(A)$. Mutta $f_N \circ f_M$ on janan $2MN$ määrittämä siirto, ja edellisen lauseen perusteella $f_O \circ (f_N \circ f_M)$ on peilaus pisteessä R, joka saadaan neljäntenä kärkenä siitä suunnikkaasta, jonka muut kärjet ovat M, N ja O. Toisaalta $f_P \circ f_Q$ on janan $2PQ$ määrittämä siirto. Pisteet A ja D ovat sellaisen janan päätepisteet, joka on QP:n suuntainen ja jonka keskipiste on R. Kun A ja D on löydetty, B, C ja E löytyvät helposti.



Harjoitus 4.1.14. *Osoita: jos $a \perp b$ ovat kaksi O:ssa toisensa leikkaavaa suoraa, niin $f_O = f_b \circ f_a$.*

Harjoitus 4.1.15. *Olkoot $A \neq B$ kaksi pistettä. Selvitä, mikä on kuvaus $f_B \circ f_A$.*

Edellä käsitellyt tapaukset kattavat olennaisesti kaikki yhtenevyyskuvaukset.

Lause 4.1.9. *Jokainen yhtenevyyskuvaus on yhdiste siirrosta ja kierrosta tai siirrosta, kierrosta ja peilauksesta.*

Todistus. Olkoon f yhtenevyyskuvaus. Oletetaan, että $f(A) = A$ ja $f(B) = B$ joillain $A \neq B$. Silloin $f(P) = P$ kaikilla suoran AB pisteillä P. Olkoon C suoran AB ulkopuolella. Koska ABC ja $ABf(C)$ ovat yhteneviä, niin joko $f(C) = C$ tai $CAf(C)$ on tasakylkinen kolmio, AB tämän kolmion sivun $Cf(C)$ keskinormaali ja $f(C)$ C:n peilikuva suorassa AB. f kuvaa kaikki suoran AB rajoittaman puolitason pisteet samaan puolitasoon, joten f on joko identtinen kuvaus tai peilaus suorassa AB. Oletetaan sitten, että f:llä on vain yksi kiintopiste $O = f(O)$. Koska $PO \cong f(P)O$ kaikilla $P \neq O$ ja koska f säilyttää kulmat, niin f on joko peilaus pisteessä O tai kierto pisteen O ympäri. Jos f:llä ei ole yhtään kiintopistettä, voidaan valita mielivaltainen piste A. On olemassa translaatio $f_{f(A)A}$. Yhtenevyyskuvauksella $f_{f(A)A} \circ f$ on A kiintopisteenä, joten siihen voidaan soveltaa todistuksen alkuosaa. □

4.2 Yhdenmuotoisuuskuvaukset

Kuvaus $f : \tau \to \tau$ on *yhdenmuotoisuuskuvaus*, jos jokaisen τ:n suoran a kuvajoukko $f(a)$ sisältyy johonkin suoraan ja jos jokainen kulma $\angle ABC$ on yhtenevä kulman $f(A)f(B)f(C)$ kanssa. Yhdenmuotoisuuskuvauksista yhdistetty kuvaus on yhdenmuotoisuuskuvaus. Yhtenevyyskuvaus on yhdenmuotoisuuskuvaus.

Lause 4.2.1. *Yhdenmuotoisuuskuvauksessa f jokaisen kolmion ABC kuva $f(A)f(B)f(C)$ on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa.*

Todistus. Väite seuraa kulmien säilymisestä kuvauksessa ja yhdenmuotoisuuslauseesta kk. □

Lause 4.2.2. *Yhdenmuotoisuuskuvaus kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisille suorille.*

Todistus. Väite seuraa kulmien säilymisestä. □

Lause 4.2.3. *Jos f on yhdenmuotoisuuskuvaus ja AB ja CD ovat janoja, niin*

$$\frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{f(C)f(D)}{CD}.$$

Todistus. AB ja CD voidaan yhdistää ketjulla kolmioita, joilla on yhteisiä sivuja. f kuvaa nämä kolmiot yhdenmuotoisille kolmioille, ja yhteisten sivujen ansioista vastinsivujen suhde on jokaisessa parissa, jonka muodostaa kolmio ja sen kuva, sama. □

Edellisen lauseen mukainen suhde $k = \dfrac{f(A)f(B)}{AB}$ on yhdenmuotoisuuskuvauksen f *yhdenmuotoisuussuhde*. Yhdenmuotoisuuskuvauksen kulmansäilymisominaisuudesta seuraa, että kolmion korkeusjana kuvautuu kuvakolmion korkeusjanaksi. Koska kolmion ala on puolet kolmion sivun ja sitä vastaan kohtisuoran korkeusjanan tulosta, kuvakolmion ala saadaan lähtökolmion alasta kertomalla se k^2:lla.

Olkoon k jana-aritmetiikan alkio, ja tulkitaan k suhteeksi. Olkoon O kiinteä piste. Kuvaus $f = f_{O,k}$, jonka määrittelevät ehdot $f_{O,k}(O) = O$, $f_{O,k}(P)$ on puolisuoran $\overrightarrow{OP}$ piste ja

$$\frac{Of_{O,k}(P)}{OP} = k,$$

on O-keskinen *homotetia* eli *venytys* eli *keskeissymmetria*. k on kuvauksen *homotetiasuhde* ja O sen *homotetiakeskus*. Kuviot, jotka voidaan kuvata toisilleen homotetialla, ovat *homoteettisia*.

Lause 4.2.4. *Homotetia $f_{O,k}$ on yhdenmuotoisuuskuvaus.*

Todistus. Jos O, A ja B ovat samalla suoralla a, niin O, $f_{O,k}(A)$ ja $f_{O,k}(B)$ ovat myös suoralla a. Jos A, B ja C ovat samalla suoralla, mutta O ei ole tällä suoralla, niin kolmiot AOB ja $f_{O,k}(A)Of_{O,k}(B)$ ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $\angle OAB \cong \angle Of_{O,k}(A)f_{O,k}(B)$ ja $AB \| f_{O,k}(A)f_{O,k}(B)$. Samoin näytetään, että $BC \| f_{O,k}(B)f_{O,k}(C)$. Tämä merkitsee, että $f_{O,k}(A)$, $f_{O,k}(B)$ ja $f_{O,k}(C)$ ovat samalla suoralla. Jos $\angle ABC$ on kulma, niin yhdenmuotoisista kolmioista AOB, $f_{O,k}(A)Of_{O,k}(B)$ jne. saadaan

$$\frac{f_{O,k}(A)f_{O,k}(B)}{AB} = \frac{f_{O,k}(B)f_{O,k}(C)}{BC} = \frac{f_{O,k}(C)f_{O,k}(A)}{CA} = k,$$

joten kolmiot ABC ja $f_{O,k}(A)f_{O,k}(B)f_{O,k}(C)$ ovat yhdenmuotoiset (sss). Siis $\angle ABC \cong \angle f_{O,k}(A)f_{O,k}(B)f_{O,k}(C)$. □

On tapana kutsua myös kuvausta $f = f_O \circ f_{O,k}$, joka kuvaa pisteen P puolisuoran $\overrightarrow{OP}$ vastakkaiselle puolisuoralle niin, että

$$\frac{Of(P)}{OP} = k,$$

homotetiaksi. Homotetiasuhteen sanotaan tällöin olevan $-k$; merkitään $f = f_{O,-k}$. Tällaista kuvausta kutsutaan myös *käänteiseksi keskeissymmetriaksi* ja kuvioita, jotka ovat kuvattavissa toisilleen käänteiselle keskeissymmetrialla *käänteisesti keskeissymmetrisiksi.* Huomataan, että $f_{O,-1} = f_O$.

Homotetian käänteiskuvaus on homotetia: $(f_{O,k})^{-1} = f_{O,1/k}$.

Harjoitus 4.2.1. *Osoita, että toisiaan sivuavat ympyrät ovat homoteettisia.*

Harjoitus 4.2.2. *Osoita, että toisiaan sivuamattomat erisäteiset ympyrät ovat sekä keskeissymmetriset että käänteisesti keskeissymmetriset.*

Harjoitus 4.2.3. *Piste A on kiinteä ympyrän Γ sisäpiste. Määritä kaikkien janojen AP, missä $P \in \Gamma$, keskipisteiden joukko.*

Harjoitus 4.2.4. *Konstruoi teräväkulmaiseen kolmioon ABC neliö, jonka kaksi kärkeä on sivulla BC ja kaksi muuta sivuilla AB ja CA.*

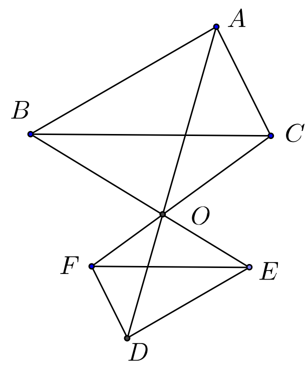
Harjoitus 4.2.5. *Piste M on kulman $\angle ABC$ aukeamassa. Konstruoi jana, jonka päätepisteet ovat kulman kyljillä ja jonka M jakaa suhteessa $1:2$.*

Harjoitus 4.2.6. *Kulman $\angle\alpha$ kyljet ovat suorilla a ja b. Niistä vain sellainen osa, joka ei sisällä kulman kärkeä, mahtuu paperiarkille $\mathcal{A}$. Selvittäkää, miten kulman $\angle\alpha$ puolittaja voidaan määrittää piirroksin, jotka tapahtuvat arkilla $\mathcal{A}$.*

Lause 4.2.5. *Jos kolmioissa ABC ja DEF on $AB \| DE$, $BC \| EF$ ja $CA \| FD$, niin kolmiot ovat homoteettiset tai yhtenevät.*

Todistus. Oletetaan, että kolmiot eivät ole yhtenevät. Silloin ne ovat yhdenmuotoiset (kk). Olkoon

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k.$$



Leikatkoot BE ja CF pisteessä O. Kolmiot OCB ja OFE ovat yhdenmuotoiset (kk). Siis

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OF} = k$$

ja O on joko molemmilla janoilla BE ja CF tai ei kummallakaan. Kolmioissa AOC ja DOF on

$$\frac{AC}{DF} = \frac{OC}{OF} = k$$

ja $\angle ACO = \angle ACB + \angle BCO \cong \angle EFD + \angle OFE = \angle OFD$. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis $\angle AOC \cong \angle FOD$, eli A, O ja D ovat samalla suoralla, ja

$$\frac{AO}{OD} = k.$$

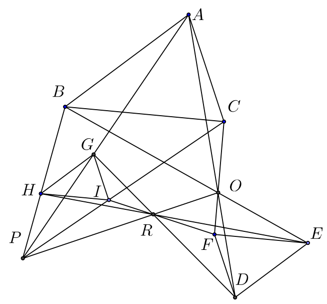
Siis $F = f_{O,k}(C)$, $D = f_{O,k}(A)$ ja $E = f_{O,k}(B)$. $\square$

Lause 4.2.6. *Jokainen yhdenmuotoisuuskuvaus on yhtenevyyskuvauksista ja homotetiasta yhdistetty kuvaus.*

Todistus. Olkoon f yhdenmuotoisuuskuvaus. Olkoon $f(A) = B$ ja kuvatkoon f A:n kautta kulkevan suoran a B:n kautta kulkevalle suoralle b. Jos a:n ja b:n välinen kulma on α, kierto $f_{A,\alpha,+}$ tai $f_{A,\alpha,-}$ mahdollisesti peilaukseen yli suoran yhdistettynä kuvaa tason suorat niiden suorien suuntaisiksi, jotka ovat kyseisten suorien kuvasuoria kuvauksessa f. Tämän jälkeen voidaan tehdä siirto tai homotetia, joka kuvaa kierretyn tason kolmiot samoille kolmioille kuin f kuvaa alkuperäiset kolmiot. □

Todistetaan vielä yksi homotetioiden yhdistämistä koskeva mielenkiintoinen tulos, jonka todistus samalla valaisee kuvausten todistuksissa käyttämisen yleistä tekniikkaa.

Lause 4.2.7. *Olkoot kolmiot ABC ja DEF homoteettiset, homotetiakeskuksena O, ja kolmiot ABC ja GHI homoteettiset, homotetiakeskuksena P. Silloin kolmiot DEF ja GHI ovat joko yhtenevät tai homoteettiset. Jos ne ovat homoteettiset, niin homotetiakeskus R on suoralla OP.*



Todistus. Oletuksista seuraa, että kolmioiden DEF ja GHI vastinsivut ovat yhdensuuntaiset, joten kolmiot ovat yhtenevät tai homoteettiset lauseen 4.2.5 nojalla. Olkoon homotetian välittävä yhdenmuotoisuuskuvaus $f_{R,k}$. Jos kolmioiden ABC ja DEF homotetian määrittää kuvaus f_{O,k_1} ja ABC:n ja GHI:n kuvaus f_{P,k_2}, niin $f_{R,k} = f_{P,k_2} \circ (f_{O,k_1})^{-1} = f$. Molemmat kuvaukset ovat yhdenmuotoisuuskuvauksia ja vievät kolmion DEF kolmiolle GHI. Kulmien ja pituussuhteiden säilyminen osoittaa, että kuvaukset vievät tason jokaisen pisteen samalle pisteelle. Tarkastellaan pistettä $Q = f(O)$. Koska O on f_{O,k_1}:n kiintopiste, $Q = f_{P,k_2}(O)$. Q on siis suoralla OP. Toisaalta Q on myös suoralla OR. Mutta tästä seuraa, että R on suoralla OQ ja siten myös suoralla OP. □

4.3 Inversio

Alkeisgeometrisiin kuvauksiin luetaan yleensä vielä peilaus ympyrässä eli *inversio*. Se tulee myöhemmin käyttöön, kun selvitellään mahdollisuutta tehdä harpilla ja viivoittimella suoritettavat piirustustehtävät pelkällä harpilla ja silloin, kun tarkastellaan epäeuklidisen geometrian ns. *Poincarén mallia.*

Olkoon Γ ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde r. Määritellään kuvaus $f = f_\Gamma : \tau \setminus O \to \tau \setminus O$ seuraavasti: jos $P \neq O$, niin $f(P)$ on se puolisuoran $\overrightarrow{OP}$ piste, jolle $OP \cdot Of(P) = r^2$. Kuvaus f_Γ on *inversio* eli *ympyräpeilaus*.

Määritelmän perusteella on selvää, että f:n kiintopisteitä ovat täsmälleen kaikki Γ:n pisteet, että f kuvaa Γ:n ulkopuoliset pisteet Γ:n sisäpuolisiksi pisteiksi ja Γ:n sisäpuoliset pisteet Γ:n ulkopuolisiksi pisteiksi ja että f kuvaa jokaisen O:n kautta kulkevan suoran, josta O on poistettu, itselleen. Selvää on myös, että f_Γ on joukon $\tau \setminus O$ bijektio itselleen ja että $f_\Gamma = f_\Gamma^{-1}$.

Jos A on ympyrän Γ sisäpuolella ja B ulkopuolella, molemmat samalla O:sta lähtevällä puolisuoralla, ja jos C on sellainen Γ:n piste, että $AC = OC$ ja $BC = OB$, niin tasakylkiset kolmiot OAC ja COB ovat yhdenmuotoiset. Koska $OC = r$, on

$$\frac{OA}{r} = \frac{r}{OB}.$$

Tämä merkitsee, että A ja B kuvautuvat toisilleen inversiossa f_Γ. Havainnon perusteella A ja B ovat konstruoitavissa toisistaan.

Lause 4.3.1. *Inversiossa* $f = f_\Gamma$

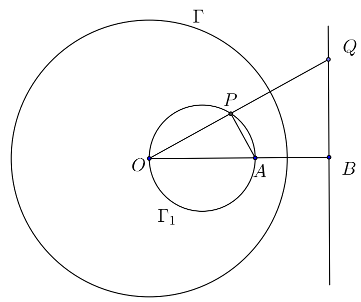
(1) *Jokainen* O*:n kautta kulkeva ympyrä* Γ_1 *kuvautuu suoraksi, joka on kohtisuorassa sitä* Γ_1*:n halkaisijaa vastaan, jonka toinen päätepiste on* O*.*

(2) *Jokainen* O*:n kautta kulkematon ympyrä* Γ_2 *kuvautuu ympyräksi.* O *ja ympyröiden* Γ_2 *ja* $f(\Gamma_2)$ *keskipisteet ovat samalla suoralla.*

(3) *Jokainen* O*:n kautta kulkematon suora* a *kuvautuu* O*:n kautta kulkevaksi ympyräksi, jonka se halkaisija, jonka toinen päätepiste on* O*, on kohtisuorassa* a*:ta vastaan.*

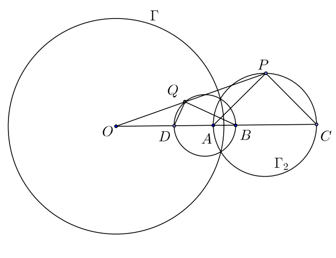
Todistus. (1) Olkoon OA Γ_1:n halkaisija ja P jokin Γ_1:n piste. Thaleen lauseen nojalla kolmio OAP on suorakulmainen. Olkoon $B = f(A)$ ja $Q = f(P)$. Tarkastetaan kolmiota OQB. Koska $OA \cdot OB = OP \cdot OQ$, on

$$\frac{OA}{OQ} = \frac{OP}{OB}.$$



Koska molemmissa kolmioissa on $\angle PAO$ yhteinen, kolmiot ovat yhdenmuotoiset (sks). Siis $\angle OBQ$ on suora kulma. Mutta näin on näytetty, että jokainen $f(P)$ on $f(A)$:n kautta kulkevalla ja OA:ta vastaan kohtisuoralla suoralla.

(2) Olkoon AC se Γ_2:n halkaisija, joka sisältyy O:n ja Γ_2:n keskipisteiden kautta kulkevaan suoraan. Oletetaan, että O ei ole janalla AC. (Todistus on helposti muunnettavissa tapaukseen, jossa näin on.) Olkoon taas $B = f(A)$, $Q = f(P)$ ja $D = f(C)$. Samoin kuin edellä todetaan kolmiot OAP ja OQB yhdenmuotoisiksi (sks), samoin kuin kolmiot OCP ja OQD. Kulmat $\angle OPA$ ja $\angle OBQ$ ovat yhtenevät, samoin kulmat $\angle OPC$ ja $\angle ODQ$. Koska $\angle APC$ on suora kulma, kulmien $\angle APC$ ja $\angle CPQ$ summa on suora kulma.



Kulmat $\angle QPC$ ja $\angle QDB$ ovat yhtenevien kulmien $\angle OPC$ ja $\angle ODQ$ vieruskulmina yhtenevät. Kulmien $\angle QDB$ ja $\angle QBD$ summa on siis myös suora kulma, joten $\angle DQB$ on suora kulma. Piste Q on siis sellaisella puoliympyrällä, jonka halkaisija on BD.

(3) Kolmas väite saadaan kääntämällä todistuksen kohta (1) toisin päin. □

Inversiokuvaus on, niin kuin yhdenmuotoisuuskuvauskin, kulmat säilyttävä eli *konformikuvaus*. Määritellään kahden pisteessä A toisensa leikkaavan ympyrän Γ_1 (keskipiste O_1) ja

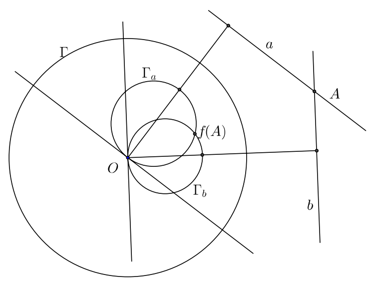
Γ_2 (keskipiste O_2) leikkauskulmaksi ympyröiden pisteeseen A piirrettyjen tangenttien välinen kulma. (Kulman ja vieruskulman erottamiseksi määritelmä voidaan tarkentaa niin, että valitaan kummastakin tangenteista ne A:sta alkavat puolisuorat $\overrightarrow{AX_i}$, joille AX_i on suoran kulman $\angle X_iAO_i$ vasen kylki. Peilaus suoran O_1O_2 yli osoittaa, että ympyröiden molempiin leikkauspisteisiin A ja B muodostuu yhtenevät leikkauskulmat. Ympyrän ja suoran leikkauskulma on suoran ja ympyrän tangentin välinen kulma. Suoran ja ympyrän molempiin leikkauspisteisiin muodostuu yhtenevät leikkauskulmat.

Lause 4.3.2. *Jos ympyrät Γ_1 ja Γ_2 sivuavat toisiaan, niin niiden kuvat inversiossa f_Γ sivuavat toisiaan. Jos Γ_1 sivuaa suoraa a, niin Γ_1:n ja a:n kuvat sivuavat toisiaan.*

Todistus. Lauseessa mainittujen objektien kuvat ovat suoria tai ympyröitä; jos lähtöjoukoilla on yksi yhteinen piste, on kuvajoukoilla yksi yhteinen piste. □

Lause 4.3.3. *Suorien ja ympyröiden leikkauskulmat säilyvät inversiokuvauksessa $f = f_\Gamma$.*

Todistus. Leikkaustilanteissa, joissa ainakin toinen osapuolista on ympyrä, ympyrä voidaan korvata leikkauskulman määrityksessä tangentillaan, koska ympyrä ja sen tangentti kuvautuvat toisiaan sivuaviksi ympyröiksi, joilla on sivuamispisteessä sama tangentti (tai ympyräksi ja sen tangentiksi). Tästä seuraa, että riittää, kun selvitetään, miten toisensa pisteessä A leikkaavien suorien a ja b välinen kulma säilyy. Mutta a kuvautuu Γ:n keskipisteen O kautta kulkevaksi ympyräksi Γ_a, jonka keskipiste O_a on O:sta a:lle piirretyllä kohtisuoralla, ja b kuvautuu O kautta kulkevaksi ympyräksi Γ_b, jonka keskipiste O_b on O:sta b:lle piirretyllä kohtisuoralla. Γ_a:n O:hon piirretty tangentti on kohtisuorassa sädettä O_aO vastaan ja siis a:n suuntainen. Samoin Γ_b:n O:hon piirretty tangentti on b:n suuntainen. O_a:n ja O_b:n leikkauskulma O:ssa ja siis myös $f(A)$:ssa on sama kuin a:n ja b:n välinen kulma. □



Harjoitus 4.3.1. *Todista lauseen 4.3.1 osa (2) tapauksessa, jossa O on janalla AC.*

Harjoitus 4.3.2. *Konstruoi harpilla ja viivoittimella annetun pisteen kuvapiste inversiossa f_Γ.*

Harjoitus 4.3.3. *Piirrä ympyrän Γ sisään- ja ympäri piirrettyjen neliöiden kuvat inversiossa f_Γ.*

Neljän pisteen A, B, C ja D *kaksoissuhde* on

$$\frac{\dfrac{AC}{AD}}{\dfrac{BC}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Harjoitus 4.3.4. *Osoita, että kaksoissuhde säilyy inversiossa.*

Edellinen tulos on keskeisessä asemassa, kun rakennetaan ns. hyperbolisen geometrian Poincarén mallia. Myös seuraavan tehtävän tulosta joudutaan tuolloin käyttämään hyväksi.

Harjoitus 4.3.5. *Ympyrä* Γ_1 *leikkaa ympyrän* Γ *kohtisuorasti. Osoita, että* f_Γ *kuvaa* Γ_1*:n itselleen.*

5 Arkhimedeen aksiooma ja mittaluvut

5.1 Arkhimedeen aksiooma ja janan mittaluku

Totunnainen tapa varustaa geometrisia suureita, pituuksia, aloja, kulmia jne., mittaluvuilla vaatii tuekseen vielä yhden aksiooman. Tähän asti käyttöön otetuista aksioomista ei seuraa, että jollakin mitalla, esim. yksikköjanalla, voitaisiin mitata mielivaltainen suure siinä mielessä, että tietty äärellinen määrä suureita riittäisi kattamaan mitattavan suureen, esim. janan. Tämä mittaamisen kannalta hyödyllinen ominaisuus kulkee *Arkhimedeen*[1] *aksiooman* nimellä.

Janojen yhteenlasku johtaa luonnollisella tavalla janojen kertomiseen luonnollisella luvulla: induktiomääritelmä olisi $1 \cdot AB \cong AB$ ja jos $n \cdot AB = AC$, niin $(n+1) \cdot AB = AC + AB$.

Aksiooma 15. *(Arkhimedeen aksiooma.) Jos AB ja CD ovat mielivaltaisia janoja, on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $n \cdot AB > CD$.*

Arkhimedeen aksiooma tuntuu – samoin kuin muutkin esittämämme aksioomat – vastaavan mielikuvaamme maailmasta. On kuitenkin mahdollista rakentaa euklidisen geometrian järjestelmiä, joissa Arkhimedeen aksiooma ei ole voimassa. Aksiooma on riippumaton muista esittämistämme aksioomista.

Arkhimedeen aksiooma mahdollistaa reaalisen mittaluvun liittämisen jokaiseen janaan. Perustana on jokin jana AB, jolle annetaan mittaluku 1. Jos AB jaetaan k:hon yhtenevään osaan, jokaiselle näistä annetaan mittaluku $\frac{1}{k}$. Jos janalla CD on mittaluku a, niin janalla $n \cdot CD$ on mittaluku na. Näin saadaan mittaluvut kaikille janoille, jotka ovat jonkin AB:n tasaosan monikertoja, ts. muotoa $q \cdot AB$, missä q on positiivinen rationaaliluku. Jos CD on mielivaltainen jana, Arkhimedeen aksiooman mukaan $CD < n \cdot AB$ jollain $n \in \mathbb{N}$. Niiden rationaalilukujen q joukko $\mathcal{E}$, joilla $q \cdot AB < CD$ tai $q \cdot AB \cong CD$ on siis rajoitettu, joten joukolla on reaalilukujen joukossa pienin yläraja. Janan CD *pituus* $|CD|$ on tämä reaaliluku $\sup \mathcal{E}$.

Se, että näin määritelty pituus vastaa normaalia pituuden mielikuvaa esim. janojen laskutoimitusten suhteen, vaatii periaatteessa samat tarkastelut kuin ne, joita tehdään, kun rationaalilukujen joukko laajennetaan reaalilukujen joukoksi liittämällä siihen ylhäältä rajoitettujen rationaalilukujoukkojen pienimmät ylärajat. On osoitettavissa, että näin määritelty mittaluku on yhteensopiva aikaisemmin määritellyn jana-aritmetiikan kanssa. Olennaisin kohta tässä todistuksessa on

[1] *Arkhimedes Syrakusalainen* (287–212 eaa), antiikin ajan merkittävin matemaatikko. Arkhimedes esitti aksiooman ”lemmana” mm. paraabelin pinta-alaa käsittelevissä kirjoituksissaan.

Lause 5.1.1. *Olkoon OA jana-aritmetiikan yksikköjana. Jos $|OA| = 1$, niin kaikilla janoilla a ja b on $|a \cdot b| = |a||b|$.*

Todistus. Piirretään suorakulmainen kolmio OAB, jossa $AB = a$. Mitataan janaa AB janalla OA_n, jonka mitta on $\frac{1}{n}$. Arkhimedeen aksiooman perusteella on olemassa m_n siten, että joko $m_n \cdot OA_n \cong AB$ tai $m_n \cdot OA_n < AB < (m_n + 1) \cdot OA_n$. Piirretään suorakulmainen kolmio OCD, jossa $OC = b$ ja $\angle COD \cong \angle BOA$. On olemassa p_n siten, että joko $p_n \cdot OA_n \cong OC$ tai $p_n \cdot OA_n < OC < (p_n + 1) \cdot OA_n$. Valitaan pisteet $C_0 = O$, C_1, C_2, …, C_p puolisuoralta $\overrightarrow{OC}$ siten, että $C_jC_{j+1} \cong OA_n$. Piirretään pisteiden C_j kautta OD:n suuntaiset suorat, jotka leikkaavat CD:n pisteissä D_j. Jos D_{j+1}:n kautta piirretty OC:n suuntainen suora leikkaa C_jD_j:n pisteessä E_j, niin kolmiot OAB ja $E_jD_{j+1}D_j$ ovat yhdenmuotoiset, yhdenmuotoisuussuhteena $1 : n$. Jana $D_{j+1}D_j$ tulee siis mitatuksi janalla, jonka mittaluku on $\frac{1}{n^2}$, ja näitä janoja sisältyy $D_{j+1}D_j$:hin ainakin m_n, muttei $m_n + 1$ kappaletta. Koska janoja $D_{j+1}D_j$ on yhtä monta kuin janoja C_jC_{j+1}, eli p_n kappaletta, on $p_n m_n \frac{1}{n^2} \leq |CD|$. Koska $|a|$ on lukujen $\frac{m_n}{n}$ ja $|b|$ lukujen $\frac{p_n}{n}$ pienin yläraja, on $|a||b| \leq |CD| = |ab|$. Toisaalta $CD < (p_n + 1)(m_n + 1)\frac{1}{n^2}$. Supremumin määritelmästä seuraa, että jonoilla (m_n) ja (p_n) on yhteinen osajono n_i, jolle

$$\lim_{i\to\infty} \frac{m_{n_i}}{n_i} = |a|, \quad \lim_{i\to\infty} \frac{p_{n_i}}{n_i} = |b|.$$

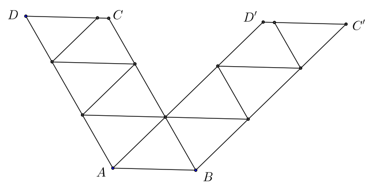
Tälle jonolle

$$\lim_{i\to\infty} \left(\frac{p_{n_i}}{n_i} + \frac{1}{n_i}\right)\left(\frac{m_{n_i}}{n_i} + \frac{1}{n_i}\right) = |b||a|.$$

Tästä seuraa, että $|CD| = |ab| \leq |a||b|$. □

Arkhimedeen aksiooman vallitessa pätee pinta-aloille seuraava aikaisempaa tulosta, lausetta 2.4.1, täydentävä tulos.

Lause 5.1.2. *Kaksi suunnikasta, joilla on sama kanta ja sama korkeus, ovat samaosaisia.*



Lauseen todistus perustuu siihen, että suunnikkaat $ABCD$ ja $ABC'D'$ voidaan jakaa – Arkhimedeen aksiooman perusteella – tasavälisin yhdensuuntaisin suorin äärelliseen määrään sellaisia suunnikkaita, jotka ovat keskenään samaosaisia. Kuvio osoittaa todistuksen idean.

Koska kolmio on aina samaosainen sellaisen suunnikkaan kanssa, jonka kanta on sama kuin kolmion kanta ja jonka korkeus on puolet kolmion korkeudesta, seuraa edellisestä lauseesta, että – Arkhimedeen aksiooman voimassa ollessa – samakantaiset ja samakorkeuksiset kolmiot eivät ole ainoastaan samasisältöiset vaan myös samaosaiset.

5.2 Kulman mittaluku

Arkhimedeen aksiooman kulmaversiossa on otettava huomioon, että olemme määritelleet kulman vain "konveksin joukon reunana". Seuraavan lauseen muotoiluun on johtanut sen teknisen ongelman kiertäminen, joka tulisi tilanteesta, jossa "pienen" kulman n-kerta ylittäisi suoran kulman.

Lause 5.2.1. *Olkoon $\angle AOB$ ja $\angle AOC$ kulmia. Silloin on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku n siten, että $\angle AOC - n \cdot \angle AOB < \angle AOB$.*

Todistus. $\frac{1}{2}\angle AOC$ on suoraa kulmaa pienempi. Piirretään suorakulmainen kolmio OAD, missä $\angle OAD$ on suora ja $\angle DOA = \frac{1}{2}\angle AOC$. Valitaan puolisuoralta $\overrightarrow{AD}$ piste B niin, että $\angle AOB$ on lauseessa mainittu kulma. On olemassa luonnollinen luku k, jolle $k \cdot AB > AD$. Olkoot $B_1 = B, B_2, \ldots, B_k$ puolisuoran $\overrightarrow{AD}$ pisteitä, joille $B_jB_{j+1} \cong AB$. Havaitaan, että jokainen $\angle OB_jB_{j+1}$ on tylppä, mistä seuraa, että OB_{j+1} on kolmion OB_jB_{j+1} pisin sivu. Esimerkiksi soveltamalla kolmion kulmanpuolittajaa koskevaa lausetta 2.3.1 kolmioon OB_jB_{j+2} nähdään, että $\angle B_jOB_{j+1} > \angle B_{j+1}OB_{j+2}$. Kulmaa $\angle DOA - \frac{1}{2}\angle AOB$ suurempi kulma saadaan enintään k:n kulman $\angle AOB$ summana. Täten kulmaa $\angle AOC - \angle AOB$ suurempi kulma saadaan enintään $2k$:n kulman $\angle AOB$ summana. $\square$

Geometriselta kannalta kulman mittaus poikkeaa janan mittauksesta. Kulmaa ei voi jakaa mielivaltaisiin tasaosiin. Kulman jakaminen 2^k:ksi yhteneväksi kulmaksi onnistuu kulmanpuolituksella. Looginen tapa valita kulmalle yksikkö olisi lähteä jostakin konstruoitavasta kulmasta, esim. suorasta kulmasta tai jostain tasasivuisen kolmion tai säännöllisen viisikulmion kulmasta, ottaa se tai sen jokin tasaosa kulman yksiköksi, ja määritellä muiden kulmien mittaluvut samalla periaatteella kuin janojen mittaluvut. Historiallisesti kulman yksiköksi on kuitenkin vakiintunut suoran kulman 90. osa eli *aste*, $1°$. Kulman $\angle AOB$ mittaluku $|\angle AOB|$ määritetään selvittämällä, kuinka monta $1°$ suuruista kulmaa, kuinka monta asteen 60.-osan eli *minuutin* suuruista kulmaa, kuinka monta minuutin 60.-osan eli *sekunnin* suuruista kulmaa jne. $\angle AOB$:hen tasan sisältyy.

Harjoitus 5.2.1. *Osoita, että kuperan n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$ ja että säännöllisen n-kulmion kulma on $\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180°$.*

Harjoitus 5.2.2. *Osoita, että* $\sin(54°) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On sopimusasia nimittää kahden vastakkaisen puolisuoran yhdistettä *oikokulmaksi* ja antaa sille mittaluku $180°$. Usein on tapana liittää puolisuorapariin $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ kulman $\angle AOB$ ohella toinenkin "kulma AOB" ja kutsua $\angle AOB$:n vasenta kylkeä tämän toisen "kulman" oikeaksi kyljeksi. Merkitään tätä objektia $\overline{\angle}OAB$. Tämä laajennettu kulmakäsite mahdollistaa kahden mielivaltaisen kulman $\angle AOB$ ja $\angle CPD$ yhteenlaskun. Olkoon $\overrightarrow{OB}$ $\angle AOB$:n oikea kylki. Näiden kulmien summa ei ehkä ole määritelty, mutta eri puolella suoraa OA kuin B oleva puolisuora $\overrightarrow{OE}$, jolle $\angle AOE \cong \angle CPD$, on olemassa. Jos nyt $\overrightarrow{OB}$ on kulman

EOB:n vasen kylki, sovitaan, että $\angle AOB + \angle CPD = \overline{\angle} EOB$. Jos $\angle EOF$ on kulman $\angle EOB$:n vieruskulma, sovitaan, että $|\overline{\angle} EOB| = 180^\circ + |\angle EOB|$.

Laajennetun kulman aukeaman määrittelyksi ei kelpaa aikaisemmin antamamme kulman aukeaman määrittely. Noudatetaan jatkossa seuraavaa sopimusta: jos $\overline{\angle} AOB$ on edellä sanotun mielessä laajennettu kulma, niin sen aukeama on se tason τ osa, joka jää jäljelle, kun tasosta poistetaan kulman $\angle AOB$ aukeama ja tämän kulman kyljet.

Laajennettu kulmakäsite tekee mahdolliseksi liittää kahteen puolisuoraan $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ kaksi "kulmaa". Ne määrittyvät siitä, onko $\overrightarrow{OA}$ kulman vasen vai oikea kylki. Ellei sekaannuksen vaaraa tule, molempia kulmia merkitään $\angle AOB$.

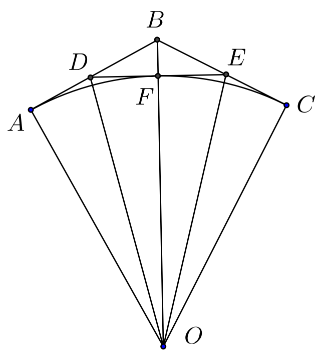
Harjoitus 5.2.3. *Osoita, että kulman $\overline{\angle} AOB$ aukeama on sen $\overrightarrow{OA}$:n määrittämän puolitason, johon B ei kuulu, ja sen $\overrightarrow{OB}$:n määrittämän puolitason, johon A ei kuulu, yhdiste.*

5.3 Ympyrän mittaaminen

Olkoon Γ O-keskinen ja 1-säteinen ympyrä. Olkoon AB Γ:n halkaisija. Tarkastellaan murtoviivaa $AP_1P_2 \ldots P_{n-1}B$, missä P_i:t ovat Γ:n pisteitä, samalla puolen AB:tä. Olkoon $ABCD$ suorakaide, $BC = 1$. Jos OP_i leikkaa murtoviivan $BCDA$ pisteessä Q_i, niin kolmioista OP_iP_{i+1} ja OQ_iQ_{i+1} nähdään helposti, että $P_iP_{i+1} < Q_iQ_{i+1}$ (missä Q_iQ_{i+1} ymmärretään murtoviivan pituudeksi, jos C tai D on janalla Q_iQ_{i+1}. Tästä seuraa, että murtoviivan $m = AP_1P_2 \ldots P_nB$ pituus on < 4. m on siis ylhäältä rajoitettu. Määritellään puoliympyrän AB pituudeksi π kaikkien murtoviivojen m pituuksien pienin yläraja. Jos mielivaltaisen r-säteisen puoliympyrän pituus määritellään samoin sen sisään piirrettyjen murtoviivojen pituuksien pienimpänä ylärajana, saadaan kolmioiden yhdenmuotoisuuden avulla osoitettua, että kyseinen pituus on πr.

Jos edellä 1-säteisien puoliympyrän ympäri piirretty suorakaide korvataan säännöllisen 2^n-kulmion puolikkaalla, ja jos tämän murtoviivan pituus on P_n, niin voidaan todeta samoin kuin edellä, että mielivaltaisen ympyrän sisään piirretyn murtoviivan pituus on $< P_n$. Siis $\pi \leq P_n$. Jos p_n on ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 2^n-kulmion puolikkaan pituus, niin $p_n \leq \pi$. Selvästi $p_n < p_{n+1}$ ja $P_{n+1} < P_n$.

Olkoot S_n ja s_n edellä käsiteltyjen ympyrän ympäri ja ympyrän sisään piirrettyjen säännöllisten 2^n-kulmioiden alat. Koska monikulmiot voidaan jakaa tasakylkisiksi kolmioiksi, joiden yhteinen kärki on ympyrän keskipiste, on $S_n = P_n$ ja $s_n = p_nr_n$, missä r_n on ympyrän keskipisteen etäisyys sisään piirretyn monikulmion sivuista. (Tätä etäisyyttä kutsutaan säännöllisen monikulmion *apoteemaksi*; se on säännöllisen monikulmion sisäympyrän säde.)



Tarkastellaan suuretta $S_n - s_n$. Jos A on O-keskisen 1-säteisen ympyrän ympäri piirretyn 2^n-kulmion kärki ja B ja C ympyrän sisään piirretyn 2^n-kulmion kärkiä, jotka on sijoitettu niin, että ne yhtyvät pisteisiin, joissa ympyrän ympäri piirretty 2^n-kulmio sivuaa ympyrää, niin $S_n - s_n$ on 2^n kertaa kolmion ABC ala. Jos D ja E ovat ympyrän ympäri piirretyn 2^{n+1}-kulmion kärkiä ja A, F ja C ovat ympyrän sisään piirretyn 2^{n+1}-kulmion kärkiä, niin $S_{n+1} - s_{n+1}$ on 2^{n+1} kertaa kolmion EFC ala. Koska OE on kulman $\angle BOC$ puolittaja ja $OB > OC$, niin $EC < \dfrac{1}{2}BC$. Lisäksi $\angle FEC > \angle ABC \geq 90°$. Kolmion ABC ala on $\dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC)$ ja kolmion FEC ala on $\frac{1}{2}FE \cdot EC \cdot \sin(\angle FEC)$. Edellisten vertailujen perusteella kolmion FEC ala on $< \dfrac{1}{4}$ kertaa kolmion ABC ala. Mutta tästä seuraa, että $S_{n+1} - s_{n+1} < \dfrac{1}{2}(S_n - s_n)$. Siis

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0.$$

Koska $r_n < 1$, on $0 < P_n - p_n = S_n - \dfrac{1}{r_n} \cdot s_n < S_n - s_n$. Siis $P_n - p_n \to 0$, kun $n \to \infty$. Tästä seuraa $\pi = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n$.

Ympyrän Γ pinta-alaksi S voidaan sopia kaikkien ympyrän sisään piirrettyjen monikulmioiden alojen pienin yläraja. Jokainen tällainen ala on $\leq S_n$ ja $s_n \leq S$. Edelliset raja-arvotarkastelut johtavat tulokseen $S = \pi$. Vastaava tarkastelu tilanteessa, jossa ympyrän säde on r, johtaa kolmioiden yhdenmuotoisuuden kautta siihen, että tällaisen ympyrän ala on πr^2.

Harjoitus 5.3.1. *Osoita, että*

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \cos\left(\frac{1}{2^{n-1}} \cdot 90°\right).$$

Harjoitus 5.3.2. *Laske suureiden S_n ja s_n antamat π:n likiarvot, kun $n = 2$, 3, 4 ja 5.*

Harjoitus 5.3.3. *Osoita oikeaksi Vietan*[1] *kaava*

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots.$$

Olkoon $\angle AOB$ kulma. Oletetaan, että $OA = OB = r$. O-keskinen r-säteinen ympyrä, josta A ja B on poistettu, jakautuu kahdeksi osajoukoksi, joista toinen on kulman $\angle AOB$ aukeamassa ja toinen kulman $\overline{\angle}AOB$:n aukeamassa. Osajoukot ovat A:n ja B:n määrittämät Γ:n pienempi ja suurempi *kaari*. Kaaret voi yksilöidä liittämällä niiden nimiin yksi kaarella sijaitseva piste. Se kulmista $\angle AOB$, jonka aukeamassa kaari ACB sijaitsee, on kaarta ACB vastaava *keskuskulma*.

[1] *François Viète* eli *Vieta* (1540–1604), ranskalainen juristi ja matemaatikko.

Jos samaa pituudenmäärittelyn prosessia kuin mitä edellä käytettiin puoliympyrän pituuden määritykseen, sovelletaan O-keskisen ja r-säteisen ympyrän kaariin, nähdään, että kaaren AB pituus on verrannollinen keskuskulman $\angle AOB$ suuruuteen. Koska 180° kaarta vastaava kaarenpituus on πr, on kaaren ACB pituus $s = \dfrac{\pi r}{180^\circ}|\angle AOB|$, kun $|\angle AOB|$ mitataan asteissa. Tämä relaatio mahdollistaa myös suhteen $\dfrac{s}{r}$ käyttämisen keskuskulman ja yleisemminkin kulman mittalukuna; suhdetta kutsutaan *absoluuttiseksi kulmamitaksi*. Kulman, jolle $s = r$, sanotaan olevan yhden *radiaanin* suuruinen.

5.4 Konstruktiot pelkällä harpilla

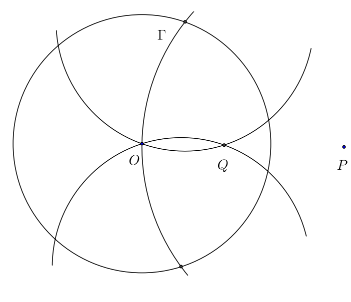
Arkhimedeen aksiooma yhdistettynä inversiokuvaukseen antaa keinon suorittaa euklidiset konstruktiot pelkällä harpilla. Harpilla ei voi piirtää suoraa, mutta sen sijaan ratkaista tehtävän, jossa on määritettävä pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran ja pisteiden C ja D kautta kulkevan suoran leikkauspiste samoin kuin etsiä suoran, joka kulkee A:n ja B:n kautta sekä C-keskisen ja D:n kautta kulkevan ympyrän leikkauspiste. "Harppigeometriaa" kutsutaan tanskalaisen *Georg Mohrin* (1640–97) ja italialaisen *Lorenzo Mascheronin*[1] (1750–1800) mukaan *Mohrin–Mascheronin geometriaksi.*

Lause 5.4.1. *Se puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ piste C, jolle $AC = 2\cdot AB$, on konstruoitavissa pelkällä harpilla.*

Todistus. Piirretään B-keskinen ympyrä Γ A:n kautta. Piirretään A-keskinen ympyrä B:n kautta. Se leikkaa Γ:n pisteessä D. Kolmio ABD on tasasivuinen. Piirretään D-keskinen ympyrä A:n (ja B:n) kautta. Se leikkaa Γ:n myös pisteessä E. Kolmio BED on tasasivuinen. Piirretään vielä E-keskinen ympyrä D:n kautta. Se leikkaa Γ:n myös pisteessä C. Kolmio BCE on tasasivuinen. Tasasivuisten kolmioiden yhdenmuotoisuuden nojalla $\angle DBC = \angle DBE + \angle EBD \cong \angle DAB + \angle ADB$. Tästä seuraa, että $\angle ABD$ ja $\angle DBC$ ovat vieruskulmia ja C on suoralla AB. Koska $BC = AB$, $AC = 2\cdot AB$. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, että myös se puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ piste C, jolle $AC = n\cdot AB$ on konstruoitavissa harpilla, kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause 5.4.2. *Pisteen P kuva inversiossa f_Γ on konstruoitavissa pelkällä harpilla.*



Todistus. Olkoon Γ O-keskinen r-säteinen ympyrä. Osoitetaan ensin, että jos $OP > \dfrac{1}{2}r$, niin pisteen P kuva Q inversiossa f_Γ voidaan konstruoida pelkällä harpilla. Piirretään ympyrä keskipisteenä P pisteen O kautta. Tämä ympyrä leikkaa Γ:n pisteissä A ja B. Piirretään A ja B keskipisteinä ympyrät pisteen O kautta. Ne leikkaavat toisensa myös pisteessä Q. Konstruktion mukaan O, Q ja P ovat samalla suoralla, janan AB keskinormaalilla. Kolmiot PAO ja AOQ ovat tasakylkisiä ja

[1] Mascheronin 1797 ilmestynyt *Geometria del compasso* oli omistettu Napoleon Bonapartelle.

niillä on yhteinen kulma $\angle AOQ$. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{OA}{OP}$$

eli $OP \cdot OQ = OA^2 = r^2$. Q on siis $f_\Gamma(P)$. Jos $OP < \frac{1}{2}r$, P-keskinen O:n kautta kulkeva ympyrä ei leikkaa Γ:aa. Mutta Arkhimedeen aksiooman nojalla on olemassa n siten, että $n \cdot OP > \frac{1}{2}r$. Piste S, jolle $OS = n \cdot OP$, on konstruoitavissa harpilla, samoin $T = f_\Gamma(S)$. Konstruoidaan vielä piste Q, jolle $OQ = n \cdot OT$. Koska $OS \cdot OT = r^2$, on myös $\frac{1}{n} \cdot OS \cdot (n \cdot OT) = OP \cdot OQ = r^2$. Pisteen P kuva inversiossa f_Γ on Q. $\square$

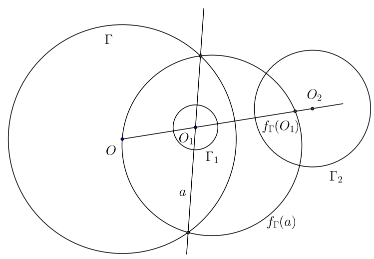
Harjoitus 5.4.1. *Selvitä, miten etsitään annetun janan AB keskipiste pelkällä harpilla.*

Geometristen konstruktioiden suorittaminen edellyttää seuraavien tehtävien ratkaisemista: 1) etsi kahden ympyrän leikkauspiste; 2) etsi kahden suoran leikkauspiste; 3) etsi suoran ja ympyrän leikkauspiste.

Tehtävistä ensimmäinen on luonnollisesti suoritettavissa pelkän harpin avulla. Kahden jälkimmäisen suorittamista varten tarvitaan pari havaintoa inversioista. Harjoitustehtävän 4.3.5 mukaan pätee

Lause 5.4.3. *Jos ympyrät Γ ja Γ_1 leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteissä A ja B, niin $f_\Gamma(\Gamma_1) = \Gamma_1$.*

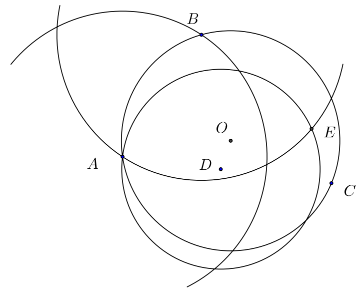
Lause 5.4.4. *Olkoon O_1 ympyrän Γ_1 keskipiste ja O ympyrän Γ keskipiste ja $\Gamma_2 = f_\Gamma(\Gamma_1)$. Silloin $f_\Gamma(O_1) = f_{\Gamma_2}(O)$.*



Todistus. Pisteen O_1 kautta kulkevat suorat ovat Γ_1:n halkaisijoina kohtisuorassa Γ_1:tä vastaan. Olkoon a jokin tällainen halkaisija. Koska inversio säilyttää kulmat, $f_\Gamma(a)$ on O:n kautta kulkeva ympyrä, joka on kohtisuorassa $f_\Gamma(\Gamma_1)$:tä vastaan. $f_\Gamma(O_1)$ on puolisuoralla $\overrightarrow{OO_1}$ ja ympyrällä $f_\Gamma(a)$ eli sen on oltava se suoran OO_1 ja ympyrän $f_\Gamma(a)$ leikkauspisteistä, joka ei ole O. Myös ympyrän $\Gamma_2 = f_\Gamma(\Gamma_1)$ keskipiste O_2 on tällä puolisuoralla. Koska f_{Γ_2} kuvaa γ_2:ta vastaan kohtisuoran ympyrän $f_\Gamma(a)$ samaksi ympyräksi ja pisteen O puolisuoralle $\overrightarrow{O_2O}$, on $f_{\Gamma_2}(O)$:n oltava suoran OO_1 ja $f_\Gamma(a)$:n leikkauspiste. $\square$

Kahden suoran leikkauspisteen määrittäminen pelkällä harpilla tapahtuu niin, että suorat invertoidaan ympyröiksi.

Edellinen lause mahdollistaa kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän Γ_1 keskipisteen O konstruoimisen harpilla. Olkoon Γ A-keskinen B:n kautta kulkeva ympyrä. Olkoon $D = f_\Gamma(C)$. Koska Γ_1 kulkee A:n kautta, $f_\Gamma(\Gamma_1)$ on B:n ja D:n kautta kulkeva suora a. Edellisen lauseen perusteella $f_\Gamma(O)$ on sama kuin A:n kuva E peilauksessa yli suoran a. O on siis $f_\Gamma(E)$. – Konstruktioon sisältyvä A:n peilaus yli suoran a toteutuu luonnollisesti harpilla, kun piirretään B- ja D-keskiset A:n kautta kulkevat ympyrät; niiden toinen leikkauspiste on E. Muut toimenpiteet ovat inversioita.



Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran ja pisteiden C ja D kautta kulkevan suoran leikkauspiste löydetään tämän jälkeen invertoimalla pisteet O-keskisessä ympyrässä pisteiksi A', B', C' ja D', määrittämällä kolmioiden $OA'B'$ ja $OC'D'$ ympäri piirretyt ympyrät ja niiden leikkauspiste, ja invertoimalla tämä leikkauspiste. Samaa tekniikkaa voidaan käyttää ympyrän ja suoran leikkauspisteen määrittämiseen. Edellisten tarkastelujen perusteella on siis voimassa

Lause 5.4.5. *Kaikki pisteet, jotka voidaan annetuista pisteistä lähtien konstruoida harpin ja viivoittimen avulla, voidaan konstruoida myös pelkän harpin avulla.*

Mohrin–Mascheronin geometrian ohella on euklidisten konstruktioiden suorittamista pohdittu erilaisin rajoittein. Esimerkiksi:

Harjoitus 5.4.2. *Käytössä on viivoitin ja harppi, joka on ruostunut kiinni. Selvitä, miten näillä työkaluilla voidaan piirtää suoraa a vastaan kohtisuora suora pisteen A kautta.*

6 Geometria koordinaatistossa

Rakentamamme euklidisen tasogeometrian järjestelmä, vaikka se pyrkiikin mallintamaan havaintomaailmaa, on sinänsä abstrakti ja muusta matematiikasta irrallaan. Perusjoukko τ, taso, ja perusobjekti, suora, sekä perusrelaatiot ”välissä”, ”yhtenevä” on otettu käyttöön sellaisinaan. Emme esimerkiksi tiedä, ovatko aksioomamme siinä mielessä mahdollisia, että niihin ei sisälly ristiriitoja. Geometrialle voidaan esittää erilaisia malleja, matemaattisia järjestelmiä, joiden objektit toteuttavat geometrian aksioomat. Tärkein tällainen malli on koordinaattigeometria, ”analyyttinen geometria”. Osoitetaan seuraavassa, että tuttu analyyttinen geometria on todellakin aksioomamme täyttävä geometrian järjestelmä. Näin tulee osoitetuksi, että geometrian aksioomajärjestelmä ei johda ristiriitoihin (ellei sitten reaalilukujen järjestelmässä niin tapahdu). Todistus on suoraviivainen, mutta se vaatii kohtalaisen paljon laskemista.

6.1 Suorat ja janat koordinaattigeometriassa

Olkoon $\tau = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Jokaiset neljä reaalilukua x_0, y_0, a, b, joille $a^2 + b^2 \neq 0$, määrittävät *suoran* $\ell = \ell(x_0, y_0, a, b) = \{(x, y) \mid x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Lause 6.1.1. *$\ell(x_0, y_0, a, b) = \ell(x_1, y_1, c, d)$ jos ja vain jos $ad = bc$ ja $b(x_0 - x_1) = a(y_0 - y_1)$.*

Todistus. Oletetaan, että $\ell(x_0, y_0, a, b) = \ell(x_1, y_1, c, d) = \ell$. Mielivaltaisella $(x, y) \in \ell$ on olemassa reaaliluvut t ja u niin, että $x = x_0 + at = x_1 + cu$ ja $y = y_0 + bt = y_1 + du$. Siis $x_0 - x_1 = cu - at$ ja $y_0 - y_1 = du - bt$. Jos $a = 0$, edellinen yhtälö voi toteutua eri u:n arvoilla vain, jos $c = 0$ ja $x_0 - x_1 = 0$. Samoin, jos $b = 0$, jälkimmäinen yhtälö voi toteutua vain, jos $d = 0$ ja $y_0 - y_1 = 0$. Kummassakin tapauksessa lauseessa väitetyt yhtälöt toteutuvat. Olkoon sitten $ab \neq 0$. Kun yhtälöistä $x_0 - x_1 = cu - at$ ja $y_0 - y_1 = du - bt$ eliminoidaan t, saadaan $b(x_0 - x_1) - a(y_0 - y_1) = (bc - ad)u$. Jotta tämä pätisi kaikilla u, on oltava $b(x_0 - x_1) = a(y_0 - y_1)$ ja $ad = bc$.

Olkoon sitten $b(x_0 - x_1) = a(y_0 - y_1)$ ja $ad = bc$. Oletetaan, että $(x, y) \in \ell(x_0, y_0, a, b)$. Jos $a = 0$, on $b \neq 0$ ja siis $c = 0$ ja $x_0 = x_1$ ja $d \neq 0$. Silloin $x = x_0 = x_1$ ja $y = y_0 + bt = y_1 + (y_0 - y_1 + bt) = y_1 + d\left(\dfrac{y_0 - y_1 + bt}{d}\right) = y_1 + du$. Siis $(x, y) \in \ell(x_1, y_1, c, d)$. Samoin päätellään tapauksessa $a \neq 0$, $b = 0$. Olkoon sitten $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Silloin myös $c \neq 0$ ja $d \neq 0$. Oletetaan, että $(x, y) \in \ell(x_0, y_0, a, b)$. Silloin

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

ja

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + at = x_1 + c\left(\frac{x_0 - x_1 + at}{c}\right) = x_1 + cu,\\
y &= y_0 + bt = y_1 + d\left(\frac{y_0 - y_1}{d} + \frac{bt}{d}\right) = y_1 + d\left(\frac{b(x_0 - x_1)}{ad} + \frac{a}{c}t\right)\\
&= y_1 + d\left(\frac{x_0 - x_1 + at}{c}\right) = y_1 + du.
\end{aligned}
$$

Siis $(x, y) \in \ell(x_1, y_1, c, d)$ ja $\ell(x_0, y_0, a, b) \subset \ell(x_1, y_1, c, d)$. Samoin osoitetaan $\ell(x_0, y_0, a, b) \supset \ell(x_1, y_1, c, d)$. $\square$

Kahden eri pisteen (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta kulkee ainakin suora $\ell_0 = \ell(x_0, y_0, x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Aksiooma 1 vaatii, että pisteiden kautta ei kulje muita suoria. Oletetaan, että $\ell = \ell(x_2, y_2, a, b)$ kulkee myös pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta. Silloin ovat voimassa yhtälöt

$$
\begin{cases}
x_0 = x_2 + at_0\\
y_0 = y_2 + bt_0\\
x_1 = x_2 + at_1\\
y_1 = y_2 + bt_1,
\end{cases}
$$

missä $t_0 \neq t_1$. Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa $b(x_0 - x_2) = a(y_0 - y_2)$ ja kaikista yhtälöistä $b(x_0 - x_1) = a(y_0 - y_1)$. Lauseesta 6.1.1 seuraa, että $\ell_0 = \ell$. Aksiooma 1 on voimassa. Samoin on selvää, että aksiooma 2 on voimassa.

Relaatio *välissä* määritellään niin, että (x, y) on pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) $((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 > 0)$ välissä, jos $x = (1-t)x_0 + tx_1$ ja $y = (1-t)y_0 + ty_1$ jollakin $t \in (0, 1)$. On helppo nähdä, että aksiooma 3 toteutuu, samoin aksioomat 4 ja 5.

Harjoitus 6.1.1. *Todenna, että koordinaattitasossa ovat voimassa aksioomat 3, 4 ja 5.*

Pisteiden $A = (x_0, y_0)$ ja $B = (x_1, y_1)$ määrittämä jana AB on joukko $\{(x, y) \mid x = (1-t)x_0 + tx_1,\, y = (1-t)y_0 + ty_1,\, 0 \le t \le 1\}$.

Aksiooman 6, Paschin aksiooman, voimassaolon tarkastamiseksi katsotaan kolmiota ABC, missä $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ ja $C = (x_3, y_3)$. Suora ℓ, joka leikkaa janan AB, on $\ell((1-t_0)x_1 + t_0x_2, (1-t_0)y_1 + t_0y_2, a, b)$. Eri tapauksissa voidaan laskea, että ℓ leikkaa joko janan AC ta BC. Lasketaan esimerkiksi tapaus $a > 0$, $x_2 > x_0 = (1-t_0)x_1 + t_0x_2$, $x_3 > x_0$ ja

$$
\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} < \frac{b}{a} < \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}.
$$

Oletuksista seuraa

$$
\begin{aligned}
0 &< \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} - \frac{b}{a} = \frac{a(y_3 - y_0) - b(x_3 - x_0)}{a(x_3 - x_0)},\\
0 &< \frac{b}{a} - \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{b(x_2 - x_0) - a(y_2 - y_0)}{a(x_2 - x_0)},
\end{aligned}
$$

eli $a(y_3 - y_0) - b(x_3 - x_0) > 0$, $b(x_2 - x_0) - a(y_2 - y_0) > 0$. Kun edelliset yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan vielä $a(y_3 - y_2) - b(x_3 - x_2) > 0$. Kun yhtälöistä

$$\begin{cases} x_0 + at = x_2 + (x_3 - x_2)u \\ y_0 + bt = y_2 + (y_3 - y_2)u \end{cases}$$

ratkaistaan u, saadaan

$$u = \frac{b(x_2 - x_0) - a(y_2 - y_0)}{a(y_3 - y_2) - b(x_3 - x_2)} \quad \text{ja} \quad 1 - u = \frac{a(y_3 - y_0) - b(x_3 - x_0)}{a(y_3 - y_2) - b(x_3 - x_2)}.$$

Edellä sanotun perusteella $u > 0$, $1 - u > 0$, joten yhtälöryhmän ratkaisun tuottama piste $(x_0 + at,\, y_0 + bt)$ on janalla BC.

Harjoitus 6.1.2. *Todenna Paschin aksiooman paikkansa pitävyys muuten yllä olevin oletuksin, mutta olettaen, että*

$$\frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} < \frac{b}{a}.$$

Pisteiden $A = (x_1,\, y_1)$ ja $B = (x_2,\, y_2)$ määrittämä *puolisuora* $\overrightarrow{AB}$ on joukko

$$\{(x,\, y)| x = x_1 + t(x_2 - x_1),\, y = y_1 + t(y_2 - y_1),\, t \geq 0\}.$$

Suoran $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ määrittelemät puolitasot voidaan löytää erikseen tapauksissa $a = 0$ (joukot, joissa $x < x_0$ ja $x > x_0$) ja $b = 0$ (joukot, joissa $y > y_0$ ja $y < y_0$) sekä tapauksissa $ab \neq 0$ (joukot, joissa $bx - ay < bx_0 - ay_0$ ja $bx - ay > bx_0 - ay_0$).

Harjoitus 6.1.3. *Totea, että yllä annettu puolitason määritelmä on sopusoinnussa aikaisemmin annetun kanssa: kahta saman puolitason pistettä yhdistävä jana ei leikkaa puolitason reunasuoraa, kahta vastakkaisissa puolitasoissa olevaa pistettä yhdistävä jana leikkaa puolitasojen yhteisen reunan.*

6.2 Kulmat ja yhtenevyys

Janojen yhtenevyys on määriteltävissä "pythagoralaisesti". Jos $A = (x_1,\, y_1)$, $B = (x_2,\, y_2)$, $C = (x_3,\, y_3)$ ja $D = (x_4,\, y_4)$, niin $AB \cong CD$ silloin ja vain silloin, kun $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$. Merkitään $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = c^2$. Olkoon $O = (x_0,\, y_0)$ ja $\{(x_0 + at,\, y_0 + bt)|t \geq 0\}$ O:sta alkava puolisuora. Tällä puolisuoralla on tasan yksi piste $P = (x_3,\, y_3)$, jolle $OP \cong AB$; P on yhtälön $(a^2 + b^2)t^2 = c^2$ ainoan positiivisen juuren t generoima piste. Aksiooma 7 on voimassa. Aksiooma 8 on triviaalisti tosi.

Aksiooman 9 todentamiseksi merkitään $A = (x_1,\, y_1)$, $C = (x_2,\, y_2)$ ja $B = ((1 - t)x_1 + tx_2,\, (1 - t)y_1 + ty_2)$; $A' = (x_1',\, y_1')$, $C' = (x_2',\, y_2')$ ja $B' = ((1 - u)x_1' + ux_2',\, (1 - u)y_1' + uy_2')$, $0 < t < 1$, $0 < u < 1$. Merkitään vielä $c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, $c'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2$. Oletus $AB \cong A'B'$ on sama kuin $t^2c^2 = u^2c'^2$ ja oletus $BC \cong B'C'$ on sama kuin $(1 - t)^2c^2 = (1 - u)^2c'^2$. Jos $t \neq u$, saadaan helposti ristiriita. Siis $t = u$, joten $c^2 = c'^2$ ja $AC \cong A'C'$.

Kulma on puolisuorien $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ ja $x = x_0 + ct$, $y = y_0 + dt$ muodostama pari. Ei merkitse olennaista rajoitusta, jos nyt oletetaan, että $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Määritellään tämän ja puolisuorien $x = x_1 + a't$, $y = y_1 + b't$ sekä $x = x_1 + c't$, $y = y_1 + d't$ ($a'^2 + b'^2 = c'^2 + d'^2 = 1$) muodostaman kulman yhtenevyys ehdolla $ac + bd = a'c' + b'd'$. Huomataan, että $(ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ad-bc)^2 \le 1$, ja että yhtä suuruus pätee vain, kun $ad = bc$. Tällöin on, kuten helppo lasku osoittaa, joko $a = c$ ja $b = d$ tai $a = -c$, $b = -d$. Kulmien yhtenevyyden määrittää siis välin $(-1, 1)$ luku r, suureen $ac + bd$ arvo.

Annetun kulman kanssa yhtenevän kulman piirtäminen annettu suora toisena kylkenä, siis aksiooma 10, edellyttää, että yhtälöparilla

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = r \end{cases}$$

on kaksi ratkaisua (c, d), kun $a^2+b^2 = 1$. Näin todella on. Voidaan olettaa, että $b \ne 0$. Kun d ratkaistaan jälkimmäisestä yhtälöstä ja sijoitetaan ensimmäiseen, saadaan c:lle toisen asteen yhtälö

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)c^2 - \frac{2ra}{b^2}c + \frac{r^2}{b^2} - 1 = 0$$

eli

$$c^2 - 2arc + r^2 - b^2 = 0.$$

Ratkaisukaavan mukaan

$$c = ar \pm \sqrt{a^2r^2 - r^2 + b^2} = ar \pm b\sqrt{1 - r^2}.$$

Yhtälöllä on siis kaksi reaalista ratkaisua. d:n arvoiksi saadaan

$$d = br \mp a\sqrt{1 - r^2}.$$

Helppo lasku osoittaa, että puolisuorat $x = x_0 + (ar + b\sqrt{1 - r^2})t$, $y = y_0 + (br - a\sqrt{1 - r^2})t$ ja $x = x_0 + (ar - b\sqrt{1 - r^2})t$, $y = y_0 + (br + a\sqrt{1 - r^2})t$ ($t > 0$) todella ovat eri puolilla suoraa $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$.

Harjoitus 6.2.1. *Suorita yllä mainittu "helppo lasku"; yksinkertaisuuden vuoksi oleta, että* $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Harjoitus 6.2.2. *Osoita, että puolisuorat* $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$ *ja* $x = x_0 + ct$, $y = y_0 + dt$ *muodostavat suoran kulman, jos ja vain jos* $ac + bd = 0$.

Harjoitus 6.2.3. *Osoita, että kulmien yhtenevyyden välittävä lauseke* $ac + bd$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, *on kulman kosini. (Valitse kulman kärjeksi* $(0, 0)$ *ja toisen kyljen pisteeksi* $(1, 0)$.*)*

Harjoitus 6.2.4. *Osoita laskemalla, että kolmion korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

On vielä tarkastettava yhtenevyysaksiooman 12 eli sks:n paikkansapitävyys. Olkoon $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$ ja $A' = (x_0', y_0')$, $B' = (x_1', y_1')$, $C' = (x_2', y_2')$. Oletetaan, että $AB \cong A'B'$ eli $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (x_1' - x_0')^2 + (y_1' - y_0')^2 = D_1^2$ ja että $AC \cong A'C'$ eli $(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (x_2' - x_0')^2 + (y_2' - y_0')^2 = D_2^2$, $D_1 > 0$, $D_2 > 0$. Merkitään vielä

$$a = \frac{x_1 - x_0}{D_1}, \quad b = \frac{y_1 - y_0}{D_1}, \quad c = \frac{x_2 - x_0}{D_2}, \quad d = \frac{y_2 - y_0}{D_2},$$
$$a' = \frac{x_1' - x_0'}{D_1}, \quad b' = \frac{y_1' - y_0'}{D_1}, \quad c' = \frac{x_2' - x_0'}{D_2}, \quad d' = \frac{y_2' - y_0'}{D_2}.$$

Silloin $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = a'^2 + b'^2 = c'^2 + d'^2 = 1$. Oletetaan, että $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Tämä merkitsee yhtälöä $ac + bd = a'c' + b'd'$. Silloin pisteiden B, C ja B', C' etäisyyksille saadaan

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (cD_2 - aD_1)^2 + (dD_2 - bD_1)^2 \\ &= (c^2 + d^2)D_2^2 + (a^2 + b^2)D_1^2 - 2(ac + bd)D_1D_2 \\ = (c'D_2 - a'D_1)^2 + (d'D_2 - b'D_1)^2 &= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = D_3^2.\end{aligned}$$

Siis $BC \cong B'C'$. Osoitetaan vielä, että $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Puolisuorat BC ja $B'C'$ ovat $x = x_1 + et$, $y = y_1 + ft$, $x = x_1' + e't$, $y = y_1 + f't$, missä

$$e = \frac{cD_2 - aD_1}{D_3}, \quad f = \frac{dD_2 - bD_1}{D_3}, \quad e' = \frac{c'D_2 - a'D_1}{D_3}, \quad f' = \frac{d'D_2 - b'D_1}{D_3}.$$

Puolisuorat BA, $B'A'$ puolestaan ovat $x = x_1 - at$, $y = y_1 - bt$. On osoitettava, että $ae + bf = a'e' + b'f'$. Tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $acD_2 - a^2 + bdD_2 - b^2D_1 = a'c'D_2 - a'^2D_1 + b'd'D_2 - b'^2D_1$ kanssa. Koska $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = 1$ ja $ac + bd = a'c' + b'd'$, yhtälö on voimassa. Kolmiot ABC ja $A'B'C'$ ovat todellakin yhtenevät.

6.3 Yhdensuuntaiset suorat, ympyrä ja Arkhimedeen aksiooma

Aksiooman 13, paralleeliaksiooman Playfairin version, todentamiseksi lähdetän suorasta $\ell = \ell(x_0, y_0, a, b)$ ja pisteestä $(x_1, y_1) \notin \ell$. Jotta pisteen (x_1, y_1) kautta kulkevilla suorilla $\ell_1 = \ell(x_1, y_1, c, d)$ ja $\ell_2 = \ell(x_1, y_1, e, f)$ ei olisi yhteisiä pisteitä ℓ:n kanssa, ei yhtälöpareilla

$$\begin{cases} x_0 + at = x_1 + cu \\ y_0 + bt = y_1 + du \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_0 + at = x_1 + ev \\ y_0 + bt = y_1 + fv \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} at - cu = x_1 - x_0 \\ bt - du = y_1 - y_0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} at - ev = x_1 - x_0 \\ bt - fv = y_1 - y_0 \end{cases}$$

saa olla ratkaisuja. Välttämätön ehto edellisen yhtälöryhmän ratkeamattomuudelle on $-ad + bc = 0$. Vastaavasti välttämätön ehto jälkimmäisen yhtälöryhmän ratkeamattomuudelle on $-af + be = 0$. Koska ainakin toinen luvuista a ja b on $\neq 0$, saadaan $fc = de$. Lauseen 6.1.1 perusteella $\ell_1 = \ell_2$. Tämä osoittaa, että koordinaattigeometriassa pätee paralleeliaksiooma.

Piste (x_0, y_0) keskipisteenä pisteen (x_1, y_1) kautta piirretty ympyrä Γ on janojen yhtenevyyden määritelmän mukaan niiden pisteiden (x, y) joukko, joille

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

missä $r^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$. Ympyrän sisäosan pisteissä $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$.

Tarkistetaan aksiooman 13 voimassaolo. Olkoon Γ r-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on (x_0, y_0) ja olkoon Γ_1 r_1-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on (x_1, y_1). Ympyrän Γ_1 pisteet ovat muotoa $x = x_1 + tr_1$, $|t| \leq 1$, $y = y_1 \pm r_1\sqrt{1 - t^2}$. Oletetaan, että jokin ympyrän Γ_1 piste on ympyrän Γ sisäpuolella ja jokin ympyrän Γ_1 piste on ympyrän Γ ulkopuolella. Se merkitsee, että seuraavista neljästä epäyhtälöparista ainakin yksi on tosi joillain t, u, $-1 \leq t, u \leq 1$:

$$\begin{cases} (x_1 + tr_1 - x_0)^2 + (y_1 + r_1\sqrt{1 - t^2} - y_0)^2 < r^2 \\ (x_1 + ur_1 - x_0)^2 + (y_1 + r_1\sqrt{1 - u^2} - y_0)^2 > r^2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x_1 + tr_1 - x_0)^2 + (y_1 - r_1\sqrt{1 - t^2} - y_0)^2 < r^2 \\ (x_1 + ur_1 - x_0)^2 + (y_1 - r_1\sqrt{1 - u^2} - y_0)^2 > r^2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x_1 + tr_1 - x_0)^2 + (y_1 - r_1\sqrt{1 - t^2} - y_0)^2 < r^2 \\ (x_1 + ur_1 - x_0)^2 + (y_1 + r_1\sqrt{1 - u^2} - y_0)^2 > r^2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x_1 + tr_1 - x_0)^2 + (y_1 + r_1\sqrt{1 - t^2} - y_0)^2 < r^2 \\ (x_1 + ur_1 - x_0)^2 + (y_1 - r_1\sqrt{1 - u^2} - y_0)^2 > r^2. \end{cases}$$

Reaalimuuttujan funktioiden $s \mapsto (x_1 + sr_1 - x_0)^2 + (y_1 + r_1\sqrt{1 - s^2} - y_0)^2 - r^2$ ja $s \mapsto (x_1 + sr_1 - x_0)^2 + (y_1 - r_1\sqrt{1 - s^2} - y_0)^2 - r^2$ jatkuvuuden ja Bolzanon lauseen nojalla kahdessa ensimmäisessä tapauksessa on olemassa s, jolle $(x_1 + sr_1 - x_0)^2 + (y_1 + r_1\sqrt{1 - s^2} - y_0)^2 = r^2$. Kahdessa jälkimmäisessä tapauksessa voidaan käyttää hyödyksi sitä, että molemmat edellä mainitut funktiot saavat saman arvon, kun $s = \pm 1$. Jos esimerkiksi $(x_1 + tr_1 - x_0)^2 + (y_1 - r_1\sqrt{1 - t^2} - y_0)^2 < r^2$ ja $(x_1 + ur_1 - x_0)^2 + (y_1 + r_1\sqrt{1 - u^2} - y_0)^2 > r^2$ sekä $(x_1 - r_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < r^2$, sovelletaan Bolzanon lausetta funktioon $s \mapsto (x_1 + sr_1 - x_0)^2 + (y_1 - r_1\sqrt{1 - s^2} - y_0)^2 - r^2$ välillä $[-1, u]$.

Harjoitus 6.3.1. *Osoita laskemalla, että suora ℓ, joka kulkee ympyrän Γ sisäpuolisen pisteen kautta, leikkaa ympyrän Γ.*

Harjoitus 6.3.2. *Määritä ympyrän $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ pisteeseen (x_1, y_1) asetetun tangentin yhtälö.*

Aksioomistamme viimeinen, Arkhimedeen aksiooma, on koordinaatistossa triviaali. Jos $A = (x_0, y_0)$ ja $B = (x_0 + a, y_0 + b)$, niin $n \cdot AB = AE$, missä $E = (x_0 + na, y_0 + nb)$. Jos $C = (x_1, y_1)$ ja $D = (x_1 + c, y_1 + d)$, niin $n \cdot AB > CD$ on yhtäpitävää ehdon

$(na)^2 + (nb)^2 > c^2 + d^2$ kanssa. Koska luonnollisten lukujen joukko ei ole rajoitettu, on olemassa kokonaisluku n, jolle

$$n^2 > \frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2}.$$

Olemme verifioineet kaikki aksioomamme; koordinaattigeometriassa kaikki esittämämme lauseet ovat siis myös tosia.

6.4 Algebran hyödyntäminen geometriassa

Geometrinen konstruointi koostuu operaatioista, joissa haetaan kahden suoran leikkauspiste, suoran ja ympyrän leikkauspiste tai kahden ympyrän leikkauspiste. Algebrallisesti ensimmäistä tehtävää vastaa lineaarisen yhtälöparin ratkaisu. Toisessa tehtävässä on ratkaistava yhtälöryhmä, jossa on yksi ensimmäisen ja yksi toisen asteen yhtälö. Tällainen tehtävä palautuu toisen asteen yhtälön ratkaisuksi. Kahden ympyrän leikkauspisteen ratkaisemisessa tarvittavat kaksi yhtälöä voidaan aina sieventää niin, että niiden erotus on ensimmäisen asteen yhtälö. Yhtälöpari redusoituu siis samaksi kuin suoran ja ympyrän leikkauspisteen etsiminen. Jokainen geometrinen konstruktio voidaan siis palauttaa ketjuksi ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöiden ratkaisuja.

Irrationaaliluku on algebrallinen luku, jos se on jonkin kokonaislukukertoimisen algebrallisen yhtälön ratkaisu. Jos yhtälöiden parametrit ovat rationaalilukuja, yhtälöiden ratkaisut ovat algebrallisia lukuja. Koska π ei ole algebrallinen luku, ei ole mahdollista geometrisin keinoin muodostaa sellaisen neliön sivua, joka olisi pinta-alaltaan sama kuin 1-säteinen ympyrä.

7 Kolmiulotteista geometriaa

Havaintojen mukaan meitä ympäröi kolmiulotteinen maailma. Tähän asti tarkastelemamme objekti, taso, ei siis riitä geometrian alustaksi, jos geometriaa ajatellaan todellisuuden ilmentäjänä. Geometriaa, jossa tarkastelukohteet ovat kolmiulotteisia, sanotaan *avaruusgeometriaksi* tai *stereometriaksi*[1]

Avaruusgeometriassa perusjoukko on *avaruus*, jonka alkiot ovat *pisteitä*. Avaruuden (epätyhjinä) osajoukkoina on mm. tasoja ja suoria. Kaikki se, mikä on aksioomien kautta otettu käyttöön tasogeometriassa, on totta jokaisessa avaruuden tasossa, ja kaikki sellaiset asiat, jotka liittyvät pelkästään suoraan, ovat tosia kaikilla avaruuden suorilla. Mutta tasojen keskinäisiä suhteita samoin kuin tasojen ja suorien suhteita säätelemään tarvitaan muutamia lisäaksioomia.

7.1 Avaruusgeometrian aksioomia

Aksiooma 16. *Jos pisteet A, B ja C eivät ole samalla suoralla, on olemassa yksi ja vain yksi taso τ, johon pisteet A, B ja C kuuluvat.*

Tason τ sanotaan kulkevan pisteiden A, B ja C kautta; τ:ta voidaan myös kutsua tasoksi ABC.

Aksiooma 17. *Jos suoran a pisteet A ja B kuuluvat tasoon τ, niin $a \subset \tau$.*

Tällöin sanotaan, että suora a on tasossa τ tai tason τ suora. Aksioomista 16 ja 17 seuraa välittömästi, että on yksi ja vain yksi taso τ, joka sisältää suoran a ja pisteen $C \notin a$.

Aksiooma 18. *Jos tasoilla τ_1 ja τ_2 on yhteinen piste, niillä on ainakin yksi muu yhteinen piste.*

Lause 7.1.1. *Tasoilla $\tau_1 \neq \tau_2$ on yhteinen suora tai niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä. Suoralla a, joka ei sisälly tasoon τ, on yksi tai ei yhtään yhteistä pistettä tason τ kanssa.*

Todistus. Jos $A \in \tau_1$ ja $A \in \tau_2$, niin on olemassa ainakin yksi piste B, niin että $B \in \tau_1$ ja $B \in \tau_2$. Aksiooman 17 nojalla suora AB sisältyy sekä tasoon τ_1 että tasoon τ_2. Jos olisi piste C, joka ei kuulu suoraan AB, mutta joka kuuluisi tasoihin τ_1 ja τ_2, niin tasoilla τ_1 ja τ_2 olisi yhteisenä kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Aksiooman 16 perusteella olisi $\tau_1 = \tau_2$. Jälkimmäinen väite on välitön seuraus aksioomasta 17. $\square$

Aksiooma 13, paralleeliaksiooma, on tarkennettava muotoon

Aksiooma 13'. *Suoran a ja sen ulkopuolella olevan pisteen A määrittämässä tasossa on enintään yksi suora b, joka kulkee A:n kautta eikä leikkaa a:ta.*

[1] Kreikan $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon o\sigma$ tarkoittaa jäykkää, lujaa; vrt. *solid geometry*.

Suorat a ja b ovat yhdensuuntaiset, $a \| b$, jos ne ovat sama suora tai jos ne ovat samassa tasossa eivätkä leikkaa toisiaan. Suorat voivat olla leikkaamatta toisiaan olematta yhdensuuntaisia; tällöin niitä sanotaan *ristikkäisiksi* suoriksi. Koska yhdensuuntaisia suoria koskevat tulokset on tähän asti todistettu tasoon sisältyville suorille, osa todistuksista on tehtävä uudestaan avaruudessa. Esimerkiksi:

Lause 7.1.2. *Jos $a \| b$ ja $b \| c$, niin $a \| c$.*

Todistus. Jos a, b ja c ovat samassa tasossa, väite seuraa yhdensuuntaisuuden transitiivisuudesta tasossa. Oletetaan siis, että a, b ja c eivät ole samassa tasossa. Määritelmän mukaan a ja b ovat tasossa τ_1 ja b ja c tasossa τ_2. Jos a ja c leikkaisivat toisensa pisteessä A, niin tasoilla τ_1 ja τ_2 olisi muita yhteisiä pisteitä kuin suoran b pisteet, joten olisi $\tau_1 = \tau_2$, vastoin juuri tehtyä oletusta. a ja c eivät siis leikkaa toisiaan. Väitteen todistamiseksi on nyt osoitettava, että a ja c ovat saman tason suoria. Asetetaan taso τ_3 suoran a pisteiden A ja B ja suoralla c olevan pisteen C kautta. Tasoilla τ_2 ja τ_3 on yhteinen piste C, joten niillä on yhteinen suora d. Oletetaan, että $d \neq c$. Koska b, d ja c ovat kaikki tasossa τ_2 ja $b \| c$, niin paralleeliaksiooman perusteella d leikkaa suoran b pisteessä D. Silloin tasoilla τ_3 ja τ_1 on kolme yhteistä, ei kuitenkaan samalla suoralla olevaa pistettä A, B ja D, joten ne ovat sama taso: $\tau_3 = \tau_1$. Edelleen tasossa τ_2 on kaksi leikkaavaa tasoon $\tau_1 = \tau_3$ kuuluvaa suoraa b ja d, joten on oltava $\tau_2 = \tau_1 = \tau_3$. Suorat a, b ja c ovat siis samassa tasossa, vastoin tehtyä oletusta. Ristiriita osoittaa, että tasojen τ_3 ja τ_2 leikkaussuora d on sama kuin suora c. Olemme näyttänet, että suorat a ja c ovat samassa tasossa eivätkä leikkaa toisiaan. Siis $a \| c$. $\square$

Lause 7.1.3. *Seuraavat objektit määrittelevät yhden ja vain yhden tason:*

Suora ja sen ulkopuolella oleva piste.
Kaksi toisensa leikkaavaa suoraa.
Kaksi yhdensuuntaista suoraa.

Todistus. Suoran a pisteet A ja B sekä suoran a ulkopuolinen piste C määrittävät tason ABC; koska suora AB sisältyy kokonaan tähän tasoon, saman tason määrittävät mitkä tahansa muut kaksi suoran AB pistettä A' ja B' sekä C.

Jos a ja b leikkaavat toisensa pisteessä C ja jos $A \in a$, $B \in b$ ovat muita pisteitä kuin C, niin taso ABC tulee määritetyksi. Suorat AC ja BC ovat kokonaan tasossa ABC, joten samaan tasoon päädytään myös muilla valinnoilla $A' \in a$, $B' \in b$.

Yhdensuuntaisuuden määritelmä sisältää jo sen, että yhdensuuntaiset suorat ovat samassa tasossa. $\square$

Aksiooma 19. *On olemassa ainakin neljä pistettä, jotka eivät ole samassa tasossa.*

Aksiooma 19 pitää sisällään ajatuksen siitä, että avaruus on ainakin kolmiulotteinen; aksiooma 18 puolestaan sen, että avaruus on enintään kolmiulotteinen.

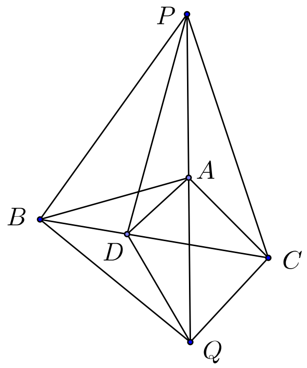
Voidaan osoittaa, että taso τ komplementti voidaan jakaa kahdeksi *puoliavaruudeksi* niin, että samaan puoliavaruuteen kuuluvat pisteet voidaan yhdistää kokonaan tässä puoliavaruudessa kulkevalla janalla, kun taas eri puoliavaruuksiin kuuluvat pisteet voidaan yhdistää janalla, joka leikkaa tason τ.

Emme ryhdy rakentamaan avaruusgeometriaa samalla huolellisuudella kuin tasogeometriaa. Muutamia peruslauseita on kuitenkin todistettava, jotta esimerkiksi monitahokkaista puhuminen onnistuisi.

7.2 Avaruusgeometrian käsitteitä ja lauseita

Suora a on *kohtisuorassa* tasoa τ vastaan, jos se leikkaa tason τ pisteessä A ja jos kaikille suorille $AB \subset \tau$ on voimassa $a \perp AB$. Suoran a ja tason τ kohtisuorassa olon relaatiota merkitään $a \perp \tau$.

Lause 7.2.1. *Leikatkoon suora a tason τ pisteessä A. Jos tasossa τ on kaksi eri suoraa AB ja AC niin, että $a \perp AB$ ja $a \perp AC$, niin $a \perp \tau$.*



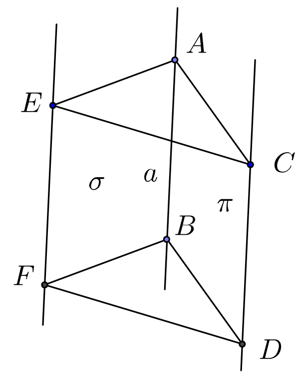
Todistus. Olkoon $AD \neq AB, AC$ mielivaltainen tason τ suora. Voidaan olettaa, että D on suoran BC ja suoran AD leikkauspiste. Valitaan suoralta a pisteet P ja Q eri puolilta pistettä A niin, että $AP \cong AQ$. Silloin AB ja AC ovat tasoissa PBQ ja PCQ janan PQ keskinormaaleja, joten $PB \cong QB$ ja $PC \cong QC$. Kolmiot PBC ja QBC ovat yhtenevät (sss). Siis $\angle PBC \cong \angle QBC$. Oletetaan, että D on janalla BC. Kolmiot PBD ja QBD ovat yhtenevät (sks). Tästä seuraa, että $PD \cong QD$. Siis kolmiot PDA ja QDA ovat yhtenevät (sss). Kulma $\angle PAD$ on vieruskulmansa QAD:n suuruinen, joten $\angle PAD$ on suora. Jos D ei ole janalla BC, se voi sijaita niin, että B on janalla CD, Kulmien $\angle PBC$ ja $\angle QBC$ yhtenevyydestä seuraa niiden vieruskulmien $\angle PBD$ ja $\angle QBD$ yhtenevyys. Kolmioiden PBD ja QBD yhtenevyys perustuu nytkin yhtenevyyslauseeseen sks, ja loppupäätelmä on sama kuin edellä. $\square$

Edelliseen lauseeseen perustuen voidaan todeta, että mielivaltaisen pisteen P kautta voidaan aina asettaa taso, joka on kohtisuorassa annettua suoraa a vastaan. Tällaisia tasoja on vain yksi. Jos $P \in a$, voidaan asettaa a:n kautta kaksi tasoa τ_1 ja τ_2 ja piirtää kumpaankin a:ta vastaan kohtisuorat suorat PA ja PB. Suora a on edellisen lauseen nojalla kohtisuorassa tasoa PAB vastaan. Jos $P \notin a$, voidaan asettaa taso τ_1 P:n ja a:n kautta ja asettaa a:n kautta jokin toinen taso τ_2. Tasossa τ_1 voidaan piirtää P:n kautta a:ta vastaan kohtisuora suora PA ja tasossa τ_2 a:ta vastaan kohtisuora suora AB. a on kohtisuorassa tasoa PAB vastaan.

Olkoot τ_1 ja τ_2 tasoja, joiden leikkaussuora on a. a jakaa molemmat tasot puolitasoiksi, joilla on yhteisenä suora a. Kumpi hyvänsä a:n määräämistä τ_1:n puolitasoista π_1 ja σ_1 ja kumpi hyvänsä a:n määräämistä τ_2:n puolitasoista π_2 ja σ_2 muodostaa *diedrin* eli *kaksitahokkaan*. Suora a on diedrin *särmä* ja puolitasot π ja σ sen *kyljet*.

Lause 7.2.2. *Olkoon diedrin särmä a ja sen kyljet π ja σ. Jos A ja B ovat särmän a pisteitä ja AC, BD a:ta vastaan kohtisuorassa olevia π:n puolisuoria sekä AE, BF a:ta vastaan kohtisuorassa olevia σ:n puolisuoria, niin $\angle CAE \cong \angle DBF$.*

Todistus. Voidaan olettaa, että $AC \cong BD$ ja $AE \cong BF$. Silloin $ACDB$ ja $ABFE$ ovat suorakaiteita, joten $EF \cong AB \cong CD$ ja $CD \| AB$, $EF \cong AB$. Lauseen 7.1.2 perusteella $CD \| EF$. Tästä seuraa, että $CDFE$ on suunnikas. Siis $CE \cong DF$. Mutta nyt kolmiot ACE ja BDE ovat yhtenevät (sss). Siis $\angle CAE \cong \angle DBF$. □



Edellinen lause oikeuttaa pitämään kulman $\angle CAE$ suuruutta diedrin suuruutena. Tätä kulmaa kutsutaan diedrin *kaltevuuskulmaksi* tai *diedrikulmaksi*.

Jos tasojen muodostamien diedrien kaltevuuskulma on suora kulma, tasot ovat *kohtisuorassa toisiaan vastaan.* Lauseista 7.2.1 ja 7.2.2 seuraa heti, että jos suora a on kohtisuorassa tasoa τ vastaan, niin jokainen taso, joka sisältää suoran a, on kohtisuorassa tasoa τ vastaan.

Lause 7.2.3. *Jos taso τ on kohtisuorassa toisensa leikkaavia tasoja τ_1 ja τ_2 vastaan, niin tasojen τ_1 ja τ_2 leikkaussuora a on kohtisuorassa tasoa τ vastaan.*

Todistus. Olkoon A a:n ja τ:n leikkauspiste. Olkoon ℓ_1 tasojen τ ja τ_1 leikkaussuora ja ℓ_2 tasojen τ ja τ_2 leikkaussuora. Diedrikulman määritelmän mukaan se τ:n suora AB, joka on kohtisuorassa ℓ_1:tä vastaan, on kohtisuorassa myös erästä τ_1:n suoraa vastaan. Mutta lauseen 7.2.1 perusteella $AB \perp a$. Jos AC on se τ:n suora, joka on kohtisuorassa ℓ_2:ta vastaan, niin samoin kuin edellä nähdään, että $AC \perp a$. Mutta nyt a on kohtisuorassa kahta τ:n suoraa vastaan, joten lauseen 7.2.1 nojalla $a \perp \tau$. □

Harjoitus 7.2.1. *Todista, että pisteen P kautta voidaan asettaa vain yksi suoraa a vastaan kohtisuora taso.*

Harjoitus 7.2.2. *Olkoon P tason τ ulkopuolella oleva piste ja a tason τ suora. Osoita, että P:n kautta voidaan asettaa tasoa τ ja suoraa a vastaan kohtisuora taso.*

Harjoitus 7.2.3. *Olkoon P tason τ ulkopuolella oleva piste. Osoita, että tasosta τ voidaan löytää piste P', niin että $PP' \perp \tau$. Piste P' on pisteen P kohtisuora projektio tasolla τ.*

Harjoitus 7.2.4. *Miten löydetään suora, joka leikkaa kahta ristikkäistä suoraa ja on kohtisuorassa molempia vastaan?*

Janan PQ keskipisteen kautta kulkeva suoraa PQ vastaan kohtisuora taso on janan PQ *keskinormaalitaso.*

Harjoitus 7.2.5. *Osoita, että janan keskinormaalitaso on niiden pisteiden joukko, joiden etäisyys janan päätepisteistä on sama.*

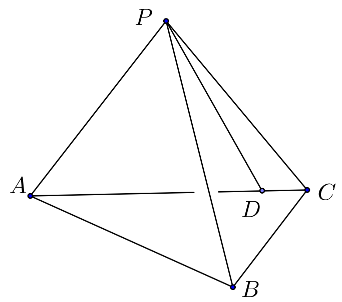
Tasot, joilla ei ole yhteisiä pisteitä, ovat *yhdensuuntaisia*. On mukavinta sopia, että taso on yhdensuuntainen itsensä kanssa. Suora, joka kulkee tason ulkopuolisen pisteen kautta eikä leikkaa tasoa, on *tason suuntainen*.

Lause 7.2.4. *Tason τ ulkopuolella olevan pisteen P kautta voidaan asettaa yksi ja vain yksi τ:n suuntainen taso.*

Todistus. Piirretään pisteestä P kohtisuora PQ tasolle τ. Olkoot a ja b kaksi toisensa pisteessä Q leikkaavaa τ:n suoraa. Silloin P:n ja a:n kautta voidaan asettaa taso τ_1 ja piirtää tässä tasossa P:n kautta suoran a suuntainen suora a'. Samoin P:n ja b:n kautta voidaan asettaa taso τ_2 ja piirtää tässä tasossa suoran b suuntainen suora b'. Suorien a' ja b' kautta asetetaan taso τ'. Suorat a' ja b' ovat kohtisuorassa suoraa PQ vastaan. Jos nyt tasoilla τ ja τ' on yhteinen piste A, niin kulmat APQ ja AQP ovat suoria. Tämä ei ole mahdollista, joten yhteistä pistettä ei ole. □

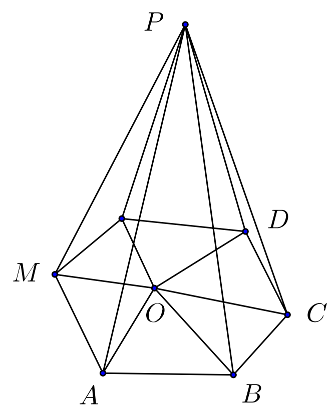
Jos kolme tai useampi taso kulkee saman pisteen P kautta, niin tason määrittämien puoliavaruuksien konveksi leikkausjoukko on *soppi*. Tasojen leikkaussuorat ovat sopen *särmät* ja piste P sopen *kärki*. Soppea rajoittavat tasonosat ovat sopen sivutahkot. Ne muodostavat keskenään diedrejä. Samaan sivutahkoon liittyvien särmien väliset kulmat ovat sopen *tasokulmat*. Soppi, jossa on kolme sivutahkoa, on *triedri*.

Lause 7.2.5. *Triedrissä jokainen tasokulma on pienempi kuin muiden kahden summa.*



Todistus. Olkoon P triedrin kärki ja olkoon A, B ja C sen särmien pisteitä. Oletetaan, että $\angle APC$ on suurempi kuin kumpikaan muista triedrin tasokulmista. Silloin janalla AC on piste D niin, että $\angle APD \cong \angle APB$. Valitaan piste B niin, että $PB \cong PD$. Silloin kolmiot APB ja APD ovat yhteneviä (sks). Kolmioepäyhtälön perusteella $AD + DC \cong AC < AB + BC \cong AD + BC$, joten $DC < BC$. Kolmioissa PDC ja PBC on kaksi yhtä suurta sivua, mutta edellisessä kolmas sivu on pienempi. Tästä seuraa, että $\angle CPD < \angle CPB$, mistä väite seuraakin. □

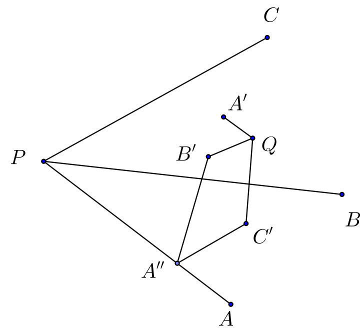
Lause 7.2.6. *Sopen tasokulmien summa on vähemmän kuin* $360°$.



Todistus. Olkoon P sopen kärki. Olkoon sopella n sivutahkoa. Leikatkoon taso τ kaikki sopen särmät; olkoot leikkauspisteet A, B, $\ldots$, M. $ABC\ldots M$ on kupera tasomonikulmio. Olkoon O jokin piste tämän monikulmion sisällä. Jokainen monikulmion $ABC\ldots M$ kärki on erään triedrin kärki. Edellisen lauseen nojalla esimerkiksi $\angle ABC < \angle ABP + \angle PBC$. Kolmion kulman summaa koskevan lauseen nojalla sopen tasokulmien summa on $n \cdot 180°$ vähennettynä kulmien $\angle PAB$, $\angle PBA$, $\ldots$, $\angle PAM$ summalla. Viimeksi mainittu summa on suurempi kuin kulmien $\angle ABC$, $\ldots$, $\angle MAB$ summa, joka puolestaan on sama kuin $n \cdot 180°$ vähennettynä kulmien $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\ldots$, $\angle MOA$ summalla. Tämä viimeinen summa on $360°$. Väite seuraa. □

Tämä lause mahdollistaa triedrissä esiintyvien kulmien suuruuden arvioinnin. Käytetään seuraavaksi monissa soppiin liittyvissä tehtävissä käypää tekniikkaa, missä diedrikulmien tarkastelussa siirrytään tasojen normaalien avulla rakennetun uuden triedrin tasokulmiin.

Lause 7.2.7. *Triedrin diedrikulmien summa on enemmän kuin* $180°$.



Todistus. Olkoon triedrin kärki P ja sen särmät PA, PB ja PC. Valitaan triedrin aukeamasta piste Q ja piirretään Q:n kohtisuorat projektiot QC' tasolle PAB, QA' tasolle PBC ja QB' tasolle PCA. Leikatkoon taso $QB'C'$ suoran PA pisteessä A'', taso $QC'A'$ suoran PB pisteessä B'' ja taso $QA'B'$ suoran PC pisteessä C''. Lauseen 7.2.3 nojalla tasojen PAB ja PAC leikkaussuora PA on kohtisuorassa tasoa $QB'C'$ vastaan. Siis erityisesti $\angle PA''C'$ ja $\angle PA''B'$ ovat suoria kulmia ja $B'A''C'$ on tasojen PAB ja PAC välinen diedrikulma. Kaksi muuta diedrikulmaa saadaan samoin. Nelikulmiossa $QB'A''C'$ kulmat $\angle QB'A''$ ja $\angle QC'A''$ ovat suoria, joten nelikulmio on jännenelikulmio. Siis $\angle B'A''C' = 180° - \angle B'QC'$. Samoin todistetaan, että $\angle C'B''A' = 180° - \angle C'QA'$ ja $\angle A'C''B' = 180° - \angle A'QB'$. Kun edellistä lausetta sovelletaan siihen triedriin, jonka kärki on Q ja särmät QA', QB' ja QC', saadaan diedrikulma samaksi kuin $540°$ vähennettynä triedrin tasokulmien summalla, joka on vähemmän kuin $360°$. Diedrikulmien summa ylittää siis $180°$. □

7.3 Pallo

Niiden avaruuden pisteiden P joukko, joille $OP = r$, on O-keskinen ja r-säteinen *pallo* Σ.

Lause 7.3.1. *Jos tasolla ja pallolla on enemmän kuin yksi yhteinen piste, niin niiden yhteisten pisteiden joukko on ympyrä.*

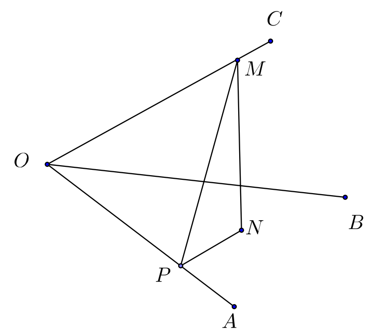
Todistus. Olkoon P tason τ ja pallon Σ yhteinen piste. Asetetaan pallon keskipisteen O:n kautta τ:n suuntainen taso. Piirretään O:n kautta tasoa τ vastaan kohtisuora OQ, $Q \in \tau$. Silloin $QP \perp OQ$, ja Pythagoraan lauseen mukaan $PQ^2 = r^2 - OP^2$. Piste P on Q-keskisellä ja $r^2 - OQ^2$-säteisellä ympyrällä. Toisaalta kaikille tason τ pisteille X on $XQ \perp QO$. Jos siis τ:n piste X on Q-keskisellä $r^2 - OQ^2$-säteisellä ympyrällä, $OX^2 = r^2$. joten X on pallollakin. □

Pallon keskipisteen kautta kulkevan tason ja pallon leikkaus on pallon *isoympyrä.* Isoympyrän halkaisija ja säde ovat pallon halkaisija ja säde. Triedri, jonka kärki on pallon keskipiste O, erottaa pallon pinnalta kuvion, jota rajaa kolme isoympyrän kaarta. Tällainen kuvio on *pallokolmio.* Olkoot A, B ja C triedrin särmien ja pallon pinnan leikkauspisteet. Triedrin kolme diedrikulmaa ovat pallokolmion ABC kulmat ja triedrin kolme tasokulmaa ovat pallokolmion sivut. Merkitään pallokolmion kulmia (siis diedrikulmia) $\angle A$:lla, $\angle B$:llä ja $\angle C$:llä ja sivuja, siis tasokulmia, $\angle a$:lla, $\angle b$:llä ja $\angle c$:llä. (Tämä on vakiintunut merkintätapa; pallotrigonometria lienee ollut niin käytännöllinen oppi, että se on karttanut kreikkalaisia kirjaimia.) Pallokolmioille on voimassa kaksi tasokolmioiden trigonometrisia perusidentiteettejä vastaavaa tulosta. Ensimmäistä kutsutaan *pallotrigonometrian sinilauseeksi*, jälkimmäistä *pallotrigonometrian (ensimmäiseksi) kosinilauseeksi.*

Lause 7.3.2. *Pallokolmion sivuille a, b ja c sekä kulmille A, B ja C pätee*

$$\frac{\sin \angle a}{\sin \angle A} = \frac{\sin \angle b}{\sin \angle B} = \frac{\sin \angle c}{\sin \angle C}.$$

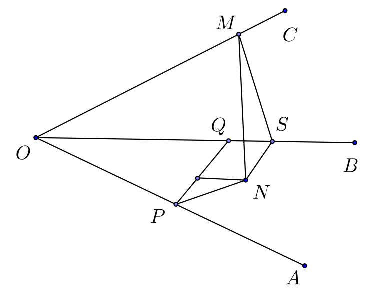
Todistus. Olkoon M suoran OC piste ja $OM = 1$. Asetetaan M:n kautta OA:ta vastaan kohtisuora taso τ. Se leikkaa OA:n pisteessä P. Olkoon N M:n kohtisuora projektio tasolla BOA. MN sisältyy tasoon τ. Koska $MP \perp OA$ ja $NP \perp OA$, $\angle MPN = \angle A$. Toisaalta $\angle COA = \angle b$. Suorakulmaisista kolmioista MOP ja MPN saadaan $MN = \sin \angle b \sin \angle A$. Jos MN lasketaan käyttämällä M:n kautta asetettua OB:tä vastaan kohtisuoraa tasoa, päästään vastaavasti tulokseen $MN = \sin \angle a \sin \angle B$. Väitöksen ensimmäinen yhtälö saadaan tästä. Toinen johdetaan vastaavasti. $\square$



Lause 7.3.3. *Pallokolmion sivuille a, b, c ja kulmalle A pätee*

$$\cos \angle a = \cos \angle b \cos \angle c + \sin \angle b \sin \angle c \cos \angle A.$$

Todistus. Olkoot M ja P kuten edellisen lauseen todistuksessa. Leikatkoon OB:tä vastaan kohtisuora M:n kautta kulkeva taso OB:n pisteessä S. Olkoon Q pisteen P projektio suoralla OS. Suorakulmaisesta kolmiosta MOS nähdään, että $OS = \cos \angle a$. Suorakulmaisista kolmioista MOP ja OPQ saadaan $OQ = \cos \angle b \cos \angle c$. Kolmiosta MOP ja kolmiosta MPN saadaan $PN = \sin \angle b \cos \angle A$. Koska $PN \perp OA$ ja $PQ \perp OB$, on $\angle QPN \cong \angle BOA = \angle c$. Saadaan $QS = PN \cdot \sin \angle c = \sin \angle b \sin \angle c \cos \angle A$. Koska $OS = OQ + QS$, saadaan väite. $\square$



Pallotrigonometrian sini- ja kosinilauseista seuraa, että pallokolmion kuudesta osasta $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle C$ kolme voidaan ratkaista, jos kolme tunnetaan. Lauseiden merkitys maantieteelle, tähtitieteelle ja navigoinnille on ilmeinen.

Harjoitus 7.3.1. *Määritä etäisyys maapallon isoympyrää pitkin Oulun lentokentältä Shanghain lentokentälle. Oulun lentokentän sijainti on $64^\circ\,56'N$, $25^\circ\,22'E$ ja Shanghain $31^\circ\,8'N$, $121^\circ\,48'E$. Nojaudu pallokolmioon, jonka kärjet ovat pohjoisnapa, Oulu ja Shanghai.*

Harjoitus 7.3.2. *Mekan sijainniksi ilmoitetaan* $21° \, 25'$ *pohjoista leveyttä ja* $39° \, 49'$ *itäistä pituutta. Linnanmaan sijainti on* $65° \, 4'$ *pohjoista leveytä ja* $25° \, 28'$ *itäistä pituutta. Mikä on etelän ja Mekan suunnan välinen kulma Linnanmaalla?*

Emme puutu tarkemmin siihen, miten pallon pinnan tai sen osan pinta-ala määritellään. Ympyränmitannon kanssa analogisin menetelmin voidaan osoittaa, että pallon pinnan ala on neljä kertaa sen isoympyrän ala. Jos pallon säde on r, sen ala on siis $4\pi r^2$. Kaksi pallon isoympyrää jakaa pallon pinnan neljäksi *pallokaksikulmioksi*. Kukin tällainen pallokaksikulmio sisältyy johonkin isoympyröiden tasojen muodostamista diedreistä. Jos tämän diedrin diedrikulman suuruus absoluuttisessa kulmamitassa on A, niin pallokaksikulmion alan suhde koko pallon alaan on $\dfrac{A}{2\pi}$.

Tarkastellaan palloa, jonka säde on 1. Pallolla oleva pallokolmio ABC sisältyy kolmeen eri pallokaksikulmioon, jotka määrittävät ne isoympyrätasot, joiden leikkaussuorat leikkaavat pallon pinnan pisteissä A, B ja C. Leikkaussuorat kohtaavat pallon pinnan myös "antipodipisteissä" A', B' ja C'. Pallokolmion $A'B'C'$ sivut ja kulmat ovat samat kuin ABC:n. Se sisältyy pallokaksikulmioihin, jotka ovat "ristikkäisiä" niihin pallokaksikulmioihin nähden, joihin ABC sisältyy. Mainittujen kuuden pallokaksikulmion yhteenlasketun pinta-alan suhde pallon pinta-alaan on

$$\frac{A+B+C}{\pi};$$

kyseinen ala on siis $4(A+B+C)$. Toisaalta kuusi pallokaksikulmiota peittävät koko pallon niin, että pallokolmioihin ABC, $A'B'C'$ kuulumattomat osat peittyvät kerran ja pallokolmiot kolmesti. Jos T on pallokolmion ABC (ja $A'B'C'$) ala, on siis

$$4(A+B+C) = 4\pi + 4T.$$

Pallokolmion ABC ala on siis $A+B+C-\pi$, kun sen kulmat lausutaan radiaaneina. – Jos pallon säde on r, ala on luonnollisesti $(A+B+C-\pi)r^2$.

Suuretta $A+B+C-\pi$ kutsutaan pallokolmion *palloylijäämäksi*.

Harjoitus 7.3.3. *Osoita, että pallokolmiossa on voimassa kolmioepäyhtälö* $a \leq b + c$.

Pallon pinnan pisteeseen A asetettu pallon sädettä OA vastaan kohtisuora taso on pallon *tangenttitaso*. Se koskettaa palloa vain pisteessä A. A on pallon ja tason *sivuamispiste*.

Harjoitus 7.3.4. *Osoita, että jos O-keskisellä pallolla* Σ *ja tasolla* τ *on tasan yksi yhteinen piste* P, *niin* $OP \perp \tau$.

7.4 Monitahokkaat

Kupera *monitahokas* on ainakin neljän tason määrittämän puoliavaruuden yhteinen rajoitettu osa. Tasojen leikkaussuorien monitahokkaaseen kuuluvat osat ovat monitahokkaan *särmiä*, leikkaussuorien leikkauspisteet ovat monitahokkaan kärjet. Monitahokasta rajoittavat tasomonikulmiot ovat monitahokkaan *sivutahkoja*. Monikulmion kärkien ympärille muodostuu soppia. Jokainen monitahokkaan kärkiä yhdistävä jana, joka ei ole monitahokkaan särmä, on monitahokkaan *lävistäjä*. Lävistäjä on *avaruuslävistäjä*, jos sen sisäpisteet ovat monitahokkaan sisäpisteitä.

Monitahokas on *särmiö* eli *prisma*, jos sillä on kaksi yhdensuuntaista sivutahkoa (pohjat) ja jos sen muut sivutahkot ovat suunnikkaita, joiden toiset sivuparit ovat kaikki keskenään yhdensuuntaisia. Jos särmiön pohjatkin ovat suunnikkaita, se on *suuntaissärmiö*. Jos kaikki sivutahkot ovat suorakulmioita, suuntaissärmiö on *suorakulmainen särmiö*.

Harjoitus 7.4.1. *Määritä suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus, kun särmiön särmät ovat a, b ja c.*

Kupera monitahokas, jonka kaikki sivutahkot mahdollisesti yhtä lukuun ottamatta ovat kolmioita, on *pyramidi*. Pyramidi, jonka pohjakin on kolmio, on *tetraedri* eli *nelitahokas*.

Tetraedrilla on runsaasti ominaisuuksia, jotka ovat analogisia kolmion ominaisuuksien kanssa.

Lause 7.4.1. *Tetraedrin ympäri voidaan piirtää pallo.*

Todistus. Tetraedrin $ABCD$ särmien AB ja BC keskinormaalitasojen leikkaussuoran a jokainen piste on yhtä etäällä pisteistä A, B ja C. Särmän AD keskinormaalitaso leikkaa a:n pisteessä O. O on yhtä etäällä jokaisesta tetraedrin kärjestä, joten O-keskinen pisteen A kautta kulkeva pallo on tetraedrin ympäri piirretty pallo. □

Lause 7.4.2. *Janat, jotka yhdistävät tetraedrin kärjet tetraedrin sivutahkojen painopisteisiin, leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Todistus. Olkoon E tetraedrin $ABCD$ särmän BC keskipiste. Sivutahkojen ABC ja DBC painopisteet F ja G ovat janoilla AE ja DE; F ja G jakavat nämä janat suhteessa $2:1$. Tarkastellaan kolmiota AED. Koska $EF : EA = EG : ED = 1 : 3$, kolmiot EGF ja EDA ovat yhdenmuotoisia (sks). Siis $FG : AD = 1 : 3$ ja $\angle EFG \cong \angle FAD$. Siis $FG \| AD$. Leikatkoot AG ja DF pisteessä M. Koska $FG \| AD$, $\angle FGM \cong \angle MAF$. Kolmiot MFG ja MDA ovat yhdenmuotoisia (kk), joten $FM : MD = GM : MA = FG : AD = 1 : 3$. Samalla tavalla nähdään, että muut tetraedrin kärjen ja sivutahkon painopisteen yhdistävät janat leikkaavat AG:n pisteessä M. □

Piste M on tetraedrin $ABCD$ *painopiste*.

Harjoitus 7.4.2. *Osoita, että tetraedrin sisään voidaan asettaa pallo. (Pallo, jolle kaikki tetraedrin sivutahkot ovat tangenttitasoja.)*

7.5 Säännölliset monitahokkaat

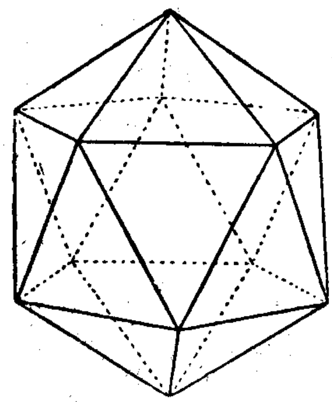
Monitahokas, jonka kaikki sivutahkot ovat keskenään yhteneviä säännöllisiä monikulmioita ja jonka kaikkien soppien sivutahkojen lukumäärä on sama, on *säännöllinen monitahokas*. Lauseesta 7.2.6 seuraa, että säännöllisen monitahokkaan soppi voi olla enintään jonkin seuraavan tyypin mukainen: kolmen, neljän tai viiden tasasivuisen kolmion kulman muodostama; kolmen neliön kulman muodostama tai kolmen viisikulmion kulman muodostama. Tämä havainto on ensimmäinen askel kohti lausetta, jonka mukaan säännöllisiä monitahokkaita eli *Platonin kappaleita* on tasan viisi tyyppiä: säännöllinen tetraedri, kuutio, säännöllinen oktaedri, ikosaedri ja dodekaedri. Säännöllisen oktaedrin sivutahkoina on kahdeksan tasasivuista kolmiota ja joka sopessa yhtyy neljä sivutahkoa. Säännöllisen ikosaedrin sivutahkoina on 20 tasasivuista kolmiota, jotka muodostavat viisitahkoisia soppia.

Säännöllisen dodekaedrin sivutahkoina on 12 säännöllistä viisikulmiota, jotka muodostavat kolmitahkoisia soppia. Eukleides päättää geometrian esityksensä täsmälleen viiden Platonin kappaleen olemassaolon todistamiseen.

Säännöllisten monitahokkaiden olemassaoloa varten tarkastellaan niiden konstruktiota. Jos ABC on tasasivuinen kolmio, jonka sivu = 1, piirretään kolmion keskipisteen O kautta tasoa ABC vastaan kohtisuora suora. Tältä suoralta valitaan piste D niin, että $OD = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Koska $AO = BO = CO = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$, saadaan Pythagoraan lauseesta $AD = BD = CD = 1$. On siis olemassa säännöllinen tetraedri: sen kaikki sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita ja joka sopessa yhtyy kolme sivutahkoa.

Kuution olemassaolo on helppo osoittaa. Kuution sivutahkot ovat säännöllisiä nelikulmioita ja joka sopessa yhtyy kolme sivutahkoa.

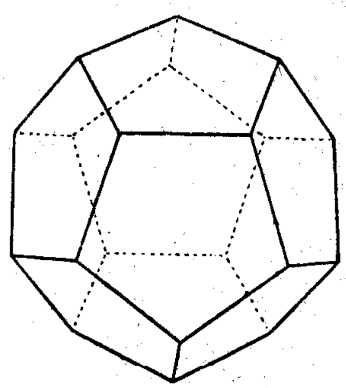
Säännöllisen oktaedrin olemassaolon todistamiseen riittää tarkastella palloa, jonka säde on $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Asetetaan sen keskipisteen O kautta kolme toisiaan vastaan kohtisuoraa suoraa. Ne leikkaavat pallon pinnan kuudessa pisteessä. Kahden eri suoran ja pallon leikkauspisteiden etäisyys on Pythagoraan lauseen perusteella 1. Suorien ja pallon leikkauspisteet kärkinä muodostuvan monitahokkaan kaikki sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita, ja joka sopessa kohtaa neljä sivutahkoa.



Säännöllisen ikosaedrin konstruktiota varten piirretään ensin tasoon säännöllinen viisikulmio $ABCDE$, jonka sivu on 1. Viisikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde on määritettävissä (vrt. harjoitustehtävä 3.3.1), ja niin ollen myös se ympyrän keskipisteen P kautta kulkevan suoran piste F, jolle $FA = FA = \cdots = FE = 1$. Sopessa, jonka kärki on F, yhtyy viisi tasasivuista kolmiota. Suoralta FP löytyy tämän jälkeen piste O, jolle $OF = OA = OB = OC = OD = OF$. Peilataan pisteet A, B, …, F pisteen O yli pisteiksi A', …, F'. Saadaan toinen tasasivuisten kolmioiden muodostama viisitahkoinen soppi. Pythagoraan lausetta toistuvasti soveltamalla saadaan

$$OA = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad \text{ja} \quad \cos\phi = \cos(\angle FOA) = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Taso AFO on janan CD keskinormaalitaso. Tästä seuraa, että tasojen FOC ja FOA' välisen diedrikulman suuruus on puolet säännöllisen viisikulmion sivua vastaavasta keskuskulmasta eli 36°. Pallokolmioon FCA' voidaan soveltaa pallotrigonometrian kosinilausetta: konstruktion perusteella $\angle FOA' = 180° - \angle A'OF'$, joten $\cos(\angle COA') = \cos\phi\cos(180° - \phi) + \sin\phi\sin(180° - \phi)\cos(36°)$. Kun tämä sievennetään, saadaan $\angle COA' = \phi$. Tästä seuraa, että $CA' = 1$. Symmetrian vuoksi kaikki loputkin kärkien $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ muodostaman monitahokkaan särmät ovat yksikön pituisia. Koska jokaisessa kärjessä yhtyy viisi sivutahkoa, jotka kaikki ovat tasasivuisia kolmioita, on todellakin olemassa säännöllisiä ikosaedreja.



Tarkastellaan ikosaedrin sivutahkojen keskipisteitä. Viiden viereisen sivutahkon keskipisteet muodostavat säännöllisen viisikulmion. Tällainen voidaan konstruoida jokaiseen ikosaedrin 12 soppeen. Viisikulmiot ovat yhteneviä ja jokaisessa ikosaedrin sivutahkon keskipisteessä kohtaa kolme tällaista viisikulmiota. On siis olemassa säännöllinen dodekaedri.

Olemme todenneet, että mahdollisuudet rakentaa monitahokas, jonka sivutahkot ovat säännöllisiä monikulmioita ja jonka kaikkia soppia rajoittaa sama määrä sivutahkoja, rajoittuvat tilanteisiin, jossa soppea rajaa kolme, neljä tai viisi kolmiota, kolme neliötä tai kolme säännöllistä viisikulmiota, ja osoittaneet, että kaikki nämä ovat konstruoitavissa. Säännöllisten monitahokkaiden yksikäsitteisyys vaatii vielä sen, että kuvatunlaisia soppirakenteita ei voi esiintyä muilla monitahokkailla kuin nyt käsitellyillä. Tämä on mahdollista tehdä alkamalla yhdestä sopesta ja toteamalla, että siitä lähtien ei voida päätyä muunlaisiin kappaleisiin.

Harjoitus 7.5.1. *Esitä monitahokas, joka ei ole mitään edellä käsiteltyä viittä tyyppiä, mutta jonka kaikki sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita.* (*Vihje: on luovuttava yhdestä säännöllisen monitahokkaan määrittelevästä piirteestä.*)

Harjoitus 7.5.2. *Määritä säännöllisen tetraedrin ristikkäisten särmien etäisyys toisistaan.* (*Ristikkäisten suorien etäisyys on molempia suoria vastaan kohtisuoran ja molempia suoria yhdistävän janan pituus.*)

7.6 Eulerin monitahokaskaava

Palloylijäämän avulla voidaan esittää yksinkertainen johto *Eulerin monitahokaskaavalle*, joka kytkee toisiinsa monitahokkaan kärkien, särmien ja sivutahkojen lukumäärän. Olkoon M mielivaltainen kupera monitahokas, jossa on s sivutahkoa, e särmää ja v kärkeä. Jos piste O on M:n sisäpuolella, niin O:n ja M:n jonkin särmän kautta kulkeva taso leikkaa O-keskisen 1-säteisen pallon pitkin pallon isoympyrää. Syntyneet pallo-n-kulmiot voidaan jakaa, kun $n > 3$, kärjet yhdistävillä isoympyränkaarilla $n-2$:ksi pallokolmioksi. Näin nähdään, että pallo-n-kulmion ala on sen kulmien summa vähennettynä $(n-2)\pi$:llä. Pallon ala 4π on siten kaikkien pallomonikulmioiden kulmien summa K vähennettynä kaikkien pallomonikulmioiden sivujen lukumäärän summalla E, π:llä kerrottuna ja lisättynä luvulla $2\pi s$, missä s on alkuperäisen monitahokkaan sivutahkojen lukumäärä eli pallomonikulmioiden lukumäärä. Mutta koska kulmasumma K kertyy kaikista pallomonikulmioiden yhteisistä kärjistä ja joka kärjen ympärillä on kulma 2π, on $K = 2v\pi$. Toisaalta jokainen pallomonikulmion sivu lasketaan kahdesti, joten $E = 2e$. Saadaan $2v\pi - 2e\pi + 2s\pi = 4\pi$ eli Eulerin monitahokaskaava

$$v - e + s = 2.$$

Kaava on voimassa väljemminkin oletuksin kuin mitä edellä tehtiin. Kaavan voimassa olon edellytys on, että monitahokas on yhdesti yhtenäinen eli että siinä ei ole ”reikiä”.

Harjoitus 7.6.1. *Kuperan monitahokkaan kaikki sivutahkot ovat kolmioita. Osoita, että sivutahkojen lukumäärä on aina parillinen.*

7.7 Nämä sivuutetaan

Kolmiulotteiseen geometriaan kuuluisi lisäksi ainakin oppi yhdenmuotoisuudesta ja kappaleiden koon vertailu eli *tilavuus*. Jälkimmäisen käsittely pelkästään alkeisgeometrisin keinoin ei ole mahdollista: esimerkiksi monitahokkaiden ”samaosaisuus” ei ole määriteltävissä pilkkomalla niitä vaikkapa tetraedreiksi ja kahden tetraedrin ”samankokoisuuden” toteminen ei onnistu alkeisgeometrisesti, vaan tarvitaan matemaattisen analyysin piiriin kuuluvia keinoja.

Kolmiulotteisessa geometriassa on samoin kuin kaksiulotteisessakin joukko kuvauksia, joiden käyttö on analogista, joskin mutkikkaampaa kuin tason kuvausten. Kolmiulotteinen geometria voidaan realisoida joukon $\mathbb{R}^3$ avulla. Nämä tarkastelut ohitetaan tässä kurssissa.

8 Epäeuklidisista geometrioista

Antiikin ajoista lähtien yhdensuuntaisuusaksiooma, tässä esityksessä aksiooma 13, sai vastaansa kritiikkiä. Sen arveltiin olevan todistettavissa oleva lause. Lukuisat Eukleideen kommentaattorit ja editoijat esittivät sille todistuksia, jotka tarkemmassa analyysissä aina osoittautuivat luonteeltaan sellaisiksi, että oletusten joukkoon oli lisätty jokin muu, yleensä paralleeliaksiooman kanssa yhtäpitävä olettamus. Tällaisia olivat esimerkiksi se, että yhdensuuntaiset suorat ovat kaikkialla yhtä etäällä toisistaan, että annetusta suorasta vakioetäisyydellä olevat pisteet muodostavat suoran, että nelikulmiossa $ABCD$, jossa $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ ovat suoria kulmia ja $AC \cong BD$, myös $\angle BDC$ ja $\angle CAD$ ovat suoria tai että kulman aukeamassa olevan pisteen kautta kulkeva suora leikkaa kulman kyljet.

Paralleeliaksiooman varsinainen selvittely tapahtui historiallisesti kolmessa vaiheessa. 1700-luvulla tehtiin merkittäviä tutkimuksia siitä, mitä seurauksia johtuisi paralleeliaksiooman poistamisesta. Näiden tutkimusten tavoite oli todistaa paralleeliaksiooma epäsuorasti. 1800-luvun alussa saksalainen *Carl Friedrich Gauss*, unkarilainen *János Bolyai* ja venäläinen *Nikolai Lobatševski* johtuivat toisistaan riippumatta ajatukseen geometriasta, jossa paralleeliaksiooman korvaisi jokin muu olettamus. He todistivat tällaisen geometrian perusteoreemoja. Samoihin aikoihin kehittynyt *projektiivinen tasogeometria* on järjestelmä, jossa ei ole toisiaan leikkaamattomia suoria. 1800-luvun puolen välin jälkeen esitettiin useita konkreettisia malleja erilaisista epäeuklidista geometrioista.

Nimitystä *epäeuklidinen geometria* voidaan käyttää yleensä geometriasta, jossa jotkin euklidisen geometrian olettamukset on muutettu toisiksi, tai nimenomaan sellaisesta geometriasta, jossa paralleeliaksiooma on korvattu jollain muulla oletuksella. Järjestelmää, josta paralleeliaksiooma puuttuu, mutta joka muuten on euklidinen, kutsutaan *neutraaligeometriaksi*.

Tässä luvussa tyydytään esittämään vain eräitä näytteitä epäeuklidisen geometrian runsaasta maailmasta.

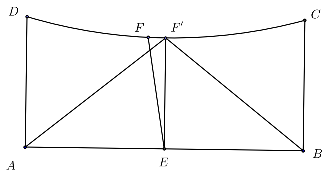
8.1 Paraalleeliaksioomatonta geometriaa

Rakentamassamme geometrian järjestelmässä pätee paralleeliaksioomasta riippumaton lause 1.5.1, jonka mukaan suoran a ulkopuolella olevan pisteen P kautta kulkee ainakin yksi a:ta leikkaamaton suora. Paralleeliaksiooman vaihtoehtona voisi siis tulla kyseeseen ”suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan asettaa useampia kuin yksi suora”. Pidämme kuitenkin myös mahdollisuuden ”suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta ei voida asettaa suoraa leikkaamatonta suoraa” mukana.

Toimimme nyt paralleeliaksioomattomassa neutraaligeometriassa. Sen keskeinen työkalu on *Saccherin*[1] *nelikulmio* $ABCD$. Siinä kulmat $\angle DAB$ ja $\angle ABC$ ovat suoria ja $AD \cong BC$. Ilman paralleeliaksioomaa emme tiedä, että nelikulmio on suorakaide. Sen sijaan voidaan todistaa

Lause 8.1.1. *Saccherin nelikulmiossa on* $\angle ADC \cong \angle BCD$. *Olkoot* E *ja* F *sivujen* AB *ja* CD *keskipisteet. Silloin* $AB \perp EF \perp CD$.

Todistus. Piirretään E:n kautta AB:tä vastaan kohtisuora, joka leikkaa CD:n pisteessä F'. Kolmiot AEF' ja BEF' ovat yhtenevät (sks). Siis $\angle F'AE \cong \angle F'BE$ ja $AF' = BF'$. Edelleen $\angle DAF' \cong \angle CBF'$, mistä seuraa kolmioiden $AF'D$ ja $BF'E$ yhtenevyys (sks). Tästä seuraa $\angle ADC \cong \angle BCD$ ja $DF' = F'C$ ja $F' = F$. Myöskin $\angle DFE = \angle DFA + \angle AFE \cong \angle EFB + \angle BFC = \angle CFE$. Siis $\angle DFE$ on suora kulma. □



Saccherin nelikulmion yhtä suuret kulmat $\angle CDA$ ja $\angle DCB$ voivat olla teräviä, suoria tai tylppiä. Tämän mukaisesti puhutaan *tylpän, suoran* ja *terävän kulman hypoteesista*.

Sanomme, että EF on Saccherin nelikulmion $ABCD$ *keskijana*. Sanomme myös Saccherin nelikulmion kulmia $\angle ADC$ ja $\angle BCD$ sen *yläkulmiksi*.

Lause 8.1.2. *Olkoon* $ABCD$ *nelikulmio jossa* $\angle DAB$ *ja* $\angle ABC$ *ovat suoria. Silloin* $\angle ADC > \angle BCD$, *jos ja vain jos* $AD < BC$.

Todistus. Oletetaan, että $AD < BC$. Olkoon E se janan BC piste, jolle $BE = AD$. Edellisen lauseen nojalla $\angle ADE \cong \angle BED$. Kolmiosta DCE saadaan $\angle ECD < \angle BED$. Mutta $\angle ADC > \angle ADE$. Jos $AD = BC$, on edellisen lauseen nojalla $\angle ADC \cong \angle BCD$. Jos $AD > BC$, voidaan päätellä kuten todistuksen alkuosassa, ja saataisiin $\angle ADC < \angle BCD$. Näin myös lauseen "vain jos" -osa on todistettu. □

Lause 8.1.3. *Olkoon* $ABCD$ *Saccherin nelikulmio ja olkoot* P *ja* Q *sivujen* AB *ja* CD *pisteitä niin, että* $PQ \perp AB$. *Olkoon* $\alpha = \angle ADC$. *Jos* $PQ < BC$, *niin* α *on terävä, jos* $PQ = BC$, *niin* α *on suora ja jos* $PQ > BC$, *niin* α *on tylppä.*

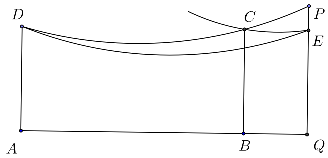
Todistus. Olkoon $\beta = \angle DQP$ ja $\gamma = \angle PQC$. Jos $PQ < BC$, niin $\alpha < \beta$ (nelikulmio $AQPD$) ja $\alpha < \gamma$ (nelikulmio $QBCP$). Vieruskulmien β ja γ summa on kaksi suoraa kulmaa. Koska $2\alpha < \beta + \gamma$, α on terävä. Muut tapaukset todistetaan analogisesti. □

Edellisen lauseen implikaatiot muodostavat ketjun, jonka perusteella ne ovat itse asiassa ekvivalensseja.

Lause 8.1.4. *Olkoon* $ABCD$ *on Saccherin nelikulmio,* $\alpha = \angle ADC$, P *piste suoralla* CD *janan* CD *ulkopuolella ja* Q *sellainen suoran* AB *piste, että* $PQ \perp AB$. *Jos* $PQ > BC$, *niin* α *on terävä, jos* $PQ = BC$, *niin* α *on suora ja jos* $PQ < BC$, *niin* α *on tylppä.*

[1] Italialaisen jesuiitan *Giovanni Saccherin* (1667–1773) yritykset todistaa paralleeliaksiooma tuottivat monia tärkeitä neutraaligeometrian tuloksia.

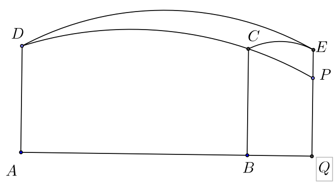
Todistus. Oletetaan, että C on janalla PD. Oletetaan, että $PQ > BC$. Olkoon E janalla QP niin, että $QE = BC$. Silloin $AQED$ ja $BQEC$ ovat Saccherin nelikulmioita. Olkoon $\beta = \angle ADE \cong \angle QED$ ja $\gamma = \angle BCE \cong \angle QEC$. Silloin $\beta < \alpha$ ja $\beta < \gamma$. Lisäksi kolmiosta CDE nähdään $\angle PCE = \delta > \angle CDE = \alpha - \beta$. Kulmien $\angle BCD = \alpha$, $\angle BCE = \gamma$ ja $ECP = \delta$ summa on kaksi suoraa kulmaa. Mutta $\alpha + \gamma + \delta > \alpha + \gamma + \alpha - \beta > 2\alpha$. Jos $PQ = BC$, Saccherin nelikulmioista $ABCD$, $AQPD$ ja $BQPC$ saadaan



$$\angle BCD \cong \angle CDA \cong \angle QPC \cong \angle PCB.$$

Kulma $\angle BCD$ on vieruskulmansa kanssa yhtenevä ja siis suora.

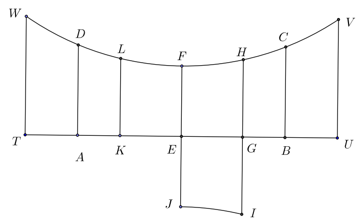
Jos $PQ < BC$, erotetaan puolisuoralta QP jana $QE = BC$. Olkoon taas $\angle ADE \cong \angle QED = \beta$, $\angle QEC \cong \angle BCE = \gamma$ ja $\angle PCE = \delta$. Selvästi $\gamma < \beta$. Kolmiosta CED saadaan $\delta > \angle EDC = \beta - \alpha$. Kulmien $\angle BCD = \alpha$ ja $\angle ECB = \gamma$ summan ja δ:n erotus on kaksi suoraa kulmaa. Mutta $\alpha + \gamma - \delta < \alpha + \gamma - \beta + \alpha < 2\alpha$. $\square$



Tämänkin lauseen implikaatiot muodostavat ketjun, jonka perusteella ne ovat itse asiassa ekvivalensseja.

Lause 8.1.5. *Jos jokin Saccherin nelikulmio toteuttaa terävän kulman hypoteesin, kaikki Saccherin nelikulmiot toteuttavat sen. Jos jokin Saccherin nelikulmio toteuttaa suoran kulman hypoteesin, kaikki Saccherin nelikulmiot toteuttavat sen. Jos jokin Saccherin nelikulmio toteuttaa tylpän kulman hypoteesin, kaikki Saccherin nelikulmiot toteuttavat sen.*

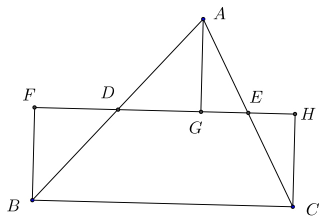
Todistus. Todistetaan lauseen terävän kulman hypoteesia koskeva osa. Tarkastetaan ensin kahta sellaista Saccherin nelikulmiota, joilla on sama keskijana. Voidaan olettaa, että $ABCD$ ja $TUVW$ ovat Saccherin nelikulmioita, A, T, B ja U ovat samalla suoralla, C, V, D ja W samoin ja EF on molempien nelikulmioiden keskijana. Olkoon vielä $AB < TU$. Oletetaan, että $ABCD$ toteuttaa terävän kulman hypoteesin, ts. että $\angle BCD$ on terävä. Lauseen 8.1.4 (tai sen jälkeen tehdyn huomautuksen) mukaan $UV > BC$. Lauseesta 8.1.3 seuraa nyt, että $\angle UVW$ on terävä. Jos $TU < AB$, sama päättely toimii käänteisessä järjestyksessä. Osoitetaan sitten, että jokaista muutakin janaa kohden löytyy teräväkulmainen Saccherin nelikulmio, jonka keskijana on kyseinen jana. Olkoon EG mielivaltainen jana puolisuoralla EB. Piirretään G:n kautta AB:tä vastaan kohtisuora, joka leikkaa CD:n pisteessä H. Olkoot K ja L H:n ja G:n peilikuvat peilauksessa yli EF:n. Lauseen alkuosan todistuksen perusteella



$KGHL$ (jonka keskijana on EF) on teräväkulmainen Saccherin nelikulmio. Peilataan F ja H yli EG:n pisteiksi I ja J. Koska $\angle EFH$ on suora (lause 8.1.1), $FJIH$ on Saccherin nelikulmio ja $\angle FHG$ on jo todettu teräväksi. Jo todistetun mukaan kaikki Saccherin nelikulmiot, joiden keskijana on EG, toteuttavat terävän kulman hypoteesin. □

Lause 8.1.6. *Jokaista kolmiota ABC kohden on olemassa Saccherin nelikulmio, jonka yläkulmien summa on sama kuin kolmion ABC kulmien summa.*

Todistus. Olkoot D ja E AB:n ja AC:n keskipisteet. Olkoot F, G ja H pisteiden B, A ja C kohtisuorat projektiot suoralla DE. Oletetaan, että G on janalla DE. Kolmiot ADG ja BDF ovat yhtenevät (kks), samoin kolmiot AEG ja CEH. Siis $BF = AG = HC$. Siis $HFBC$ on Saccherin nelikulmio. Mutta koska $\angle FBD \cong \angle GAD$ ja $\angle GAE \cong \angle ECH$, on $\angle FBC + \angle HCB$ sama kuin kolmion ABC kulmien summa. Tapauksessa, jossa G on janan DE ulkopuolella päättely on periaatteessa sama, mutta kulmien summan sijasta on tarkasteltava erotusta. □



Lause 8.1.7. *Jos on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa, kaikkien kolmioiden kulmien summa on pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa. Jos on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa, kaikkien kolmioiden kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa. Jos on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on yli kaksi suoraa kulmaa, kaikkien kolmioiden kulmien summa on yli kaksi suoraa kulmaa.*

Todistus. Oletetaan, että jonkin kolmion kulmien summa on pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa. Lauseen 8.1.6 perusteella on olemassa Saccherin nelikulmio, jonka yläkulmien summa on alle kaksi suoraa kulmaa. Silloin jokainen Saccherin nelikulmio toteuttaa terävän kulman hypoteesin. Lauseen 8.1.6 nojalla jokaisen kolmion kulmasumman on oltava alle kaksi suoraa kulmaa. Lauseen muut väittämät todistetaan samoin. □

Edellinen kolmion kulmasumman puolittaista invarianssia koskeva lause jaottelee geometrioita *hyperbolisiin*, *euklidisiin* ja *elliptisiin*. Hyperbolisissa geometrioissa suoraan a ja sen ulkopuoliseen pisteeseen P liittyy kaksi P:stä lähtevää puolisädettä, PP_1 ja PP_2, jotka eivät leikkaa a:ta, mutta jotka ovat sellaisia, että jokainen P:stä alkava kulman P_1PP_2 aukeamassa kulkeva puolisäde leikkaa a:n.

Harjoitus 8.1.1. *Kolmion ABC kulmavaje $\delta(ABC)$ on luku $180°-$ kolmion kulmasumma. Olkoon D sivun BC piste. Osoita, että $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(ADC)$.*

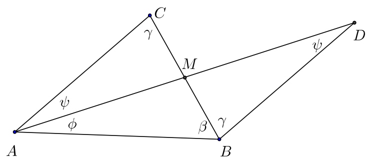
Harjoitus 8.1.2. *Osoita, että hyperbolisessa ja elliptisessä geometriassa kaksi kolmiota, joilla on samat kulmat, ovat yhteneviä.*

Harjoitus 8.1.3. *Olkoon $ABCD$ nelikulmio, jossa kulmat $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle D$ ovat suoria. Osoita, että kulma $\angle C$ on terävä, suora tai tylppä sen mukaan, vallitseeko geometriassa terävän, suoran vai tylpän kulman hypoteesi.*

Harjoitus 8.1.4. *Esimerkkinä epäeuklidisesta geometriasta esitetään usein palloa. Tässä* *geometriassa suoria ovat pallon isoympyrät. Mitkä muut aksioomat kuin paralleeliaksiooma eivät päde tällaisessa mallissa?*

Edellä saatua tietoa voidaan täydentää, kun otetaan huomioon Arkhimedeen aksiooma. Tästä aksioomasta seuraa, (lause 5.2.1), että jos α ja β ovat kaksi kulmaa, niin on olemassa n siten, että $n\alpha > \beta$.

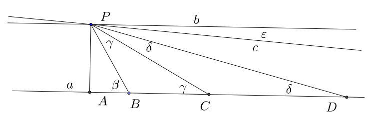
Osoitetaan nyt, että Arkhimedeen aksioomalla lisätyssä neutraaligeometriassa voi olla vain kolmioita, joiden kulmasumma on enintään kaksi suoraa kulmaa. Tämä perustuu sille havainnolle, että jokaista kolmiota kohden löytyy toinen kolmio, jolla on sama kulmasumma, mutta jonka yksi kulma on enintään puolet jostakin alkuperäisen kolmion kulmasta.



Olkoon ε jokin kulma. Olkoon ABC kolmio, M sivun BC keskipiste ja D sellainen piste AM:n jatkeella, että $MA = MD$. Silloin $AMC \cong DMB$ (sks), joten $\angle MDB = \angle MAC = \psi$ ja $\angle DBM = \angle ACM = \gamma$. Olkoon vielä $\angle ABC = \beta$. Jos $\angle MAB = \phi$, niin kolmion ABC kulmien summa on $\phi+\psi+\beta+\gamma$ ja kolmion ABD myös $\phi + \beta + \gamma + \psi$. Koska $\phi + \psi = \angle CAB$, kolmion ABD yksi kulma on enintään puolet kulmasta $\angle CAB$. Samaa menettelyä voidaan soveltaa kolmioon ABD jne., kunnes tullaan tilanteeseen, jossa on kolmio, jossa yksi kulma on pienempi kuin ε.

Jos nyt kolmion ABC kulmien summa ylittää kaksi suoraa kulmaa, se on $2R + \varepsilon$ jollain kulmalla ε. Silloin on olemassa kolmio, jonka yksi kulma on $< \varepsilon$, mutta jonka kulmien summa on sama kuin kolmion ABC. Tässä kolmiossa on kaksi kulmaa, α ja β, joiden summa on $> 2R$. Mutta jos näiden kulmien vieruskulmat ovat α' ja β', niin $\alpha' > \beta$ ja $\beta' > \alpha$. Siis $4R = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') > 4R$. Ristiriita osoittaa, että kolmiota ABC, jossa kulmasumma ylittäisi kaksi suoraa kulmaa, ei ole olemassa.

Osoitetaan vielä, että ”kolmion kulmien summa on aina kaksi suoraa kulmaa” on yhtäpitävä väite paralleeliaksiooman kanssa. Tunnetusti paralleeliaksioomasta seuraa, että kolmion kulmien summa on $2R$. Osoitetaan, että jos paralleeliaksiooma ei ole voimassa, on olemassa kolmio, jonka kulmien summa on $< 2R$. (Silloin kaikkien kolmioiden kulmasumma on $< 2R$.)



Oletetaan, että suoran a ulkopuolisen pisteen P kautta voidaan piirtää useampia kuin yksi a:n suuntainen suora. Olkoon $A \in a$ sellainen, että $PA \perp a$. Piirretään P:n kautta AP:tä vastaan kohtisuora suora b. Silloin $b \| a$. Olkoon sitten $c \neq b$ toinen P:n kautta kulkeva a:ta leikkaamatosn suora. Olkoon ε suorien b ja c välinen kulma. Olkoon sitten $B \neq A$ jokin suoran a piste samalla puolen suoraa AP kuin millä c kulkee a:n ja b:n välissä ja $\angle PBA = \beta$. Olkoon C sellainen a:n piste, että $BC = PB$. Kolmiossa PBC on silloin kaksi yhtä suurta kulmaa γ, ja koska PBC:n kulmien summa on enintään $2R$, on $\beta \geq 2\gamma$. Samaa prosessia jatkaen voidaan tulla kolmioon PXY, jossa $\angle PYX < 2^{-n}\beta < \varepsilon$. Mutta kolmiossa PAY on $\angle APY < R - \varepsilon$, joten kolmion kulmasumma on $R + (R - \varepsilon) + \angle PYX < 2R$.

8.2 Poincarén malli

Inversiokuvaus tekee mahdolliseksi rakentaa melko yksinkertaisesti eräs tavallisimmista epäeuklidisen geometrian malleista. Se on peräisin *Henri Poincarélta*[1] (ja esitetään usein kompleksianalyysin koneiston avulla). Koska inversio ominaisuuksineen on euklidisen geometrian objekti, malli on itse asiassa eräänlainen euklidisen geometrian uusi tulkinta. Tämä malli vaatii pohjakseen euklidisen geometrian.

Palautetaan mieliin *inversiokuvaus*. Jos Γ on O-keskinen r-säteinen ympyrä ja $P \neq O$, niin P:n *inversiopiste* on se puolisuoran OP piste P', jolle $OP \cdot OP' = r^2$. Inversiossa Γ:n pisteet pysyvät paikallaan, Γ:n sisä- ja ulkopuoli vaihtavat paikkaa, jokainen O:n kautta kulkeva ympyrä kuvautuu suoraksi, joka on kohtisuorassa ympyrän O:sta piirrettyä halkaisijaa vastaan ja jokainen ei O:n kautta kulkeva ympyrä kuvautuu ympyräksi, joka ei kulje O:n kautta. Inversiokuvaus on tason, josta O on poistettu, bijektio itselleen. SeSe on *(anti)konforminen*: se säilyttää kulmat, mutta kääntää sunnistuksen. Ympyrä, joka leikkaa Γ:n kohtisuorasti, kuvautuu inversiossa itselleen.

Neljän pisteen A, B, C ja D *kaksoissuhde* on

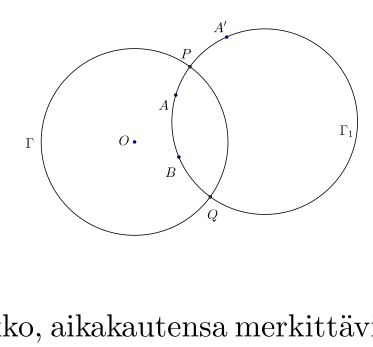
$$[A,\,B,\,C,\,D] = \frac{\dfrac{AC}{AD}}{\dfrac{BC}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Jos A' jne. ovat pisteiden A jne. kuvat inversiossa, niin $[A',\,B',\,C',\,D'] = [A,\,B,\,C,\,D]$ (harjoitus 4.3.4).

Poincarén mallin taso, P-taso Π on O-keskisen (ja r-säteisen) ympyrän Γ sisäpuoli. (Liitämme mallin piiriin kuuluviin käsitteisiin P-kirjaimen erottamaan niitä myös tarvittavista tavallisen euklidisen geometrian vastaavista käsitteistä.) P-tason pisteet, P-pisteet, ovat Π:n pisteet. Tason suorat, P-suorat, ovat Π:hin kuuluvat osat Γ:aa vastaan kohtisuorista ympyröistä ja O:n kautta kulkevista suorista (jotka myös leikkaavat Γ:n kohtisuorasti). Kun seuraavassa puhutaan inversioista, tarkoitetaan, ellei muuta sanota, inversiota ympyrässä Γ. P-suoraa γ määrittävä ympyrä Γ_1 on γ:n *kantaja*.

Selvitellään, miten hyvin P-suorat vastaavat geometrian käsitystä suorasta. Ensimmäinen kysymys on suoran yksikäsitteisyys: kahden P-pisteen kautta tulisi kulkea yksi ja vain yksi P-suora.

Olkoot A ja B kaksi P-pistettä. Jos A, B ja O ovat samalla suoralla, P-suora AB on tämän suoran Π:n sisäpuolelle jäävä osa. Tällaisia suoria on vain yksi. Jos A, B ja O eivät ole samalla suoralla, niin A' olkoon A:n inversiokuva. Pisteiden A, B ja A' kautta kulkee yksi ja vain yksi ympyrä Γ_1. Selvästi tämä ympyrä kuvautuu inversiossa itselleen. Koska inversio säilyttää kulmat, Γ ja Γ_1 leikkaavat toisensa kohtisuorasti.



[1] *Henri Poincaré* (1854–1912), ranskalainen matemaatikko, aikakautensa merkittävimpiä.

Γ_1:n Π:ssä oleva osa on siis pisteiden A ja B kautta kulkeva P-suora. Jokainen A:n ja B:n kautta kulkeva P-suora on osa Γ:aa vastaan kohtisuoraa ympyrää. Tällaisen ympyrän kuva inversiossa on ympyrä itse, siis A:n, B:n ja A':n kautta kulkeva ympyrä, joka on Γ_1. P-suora on siis yksikäsitteinen.

Muut euklidisen geometrian ns. järjestys- ja liittymisaksioomat on melko helppo todeta paikkansapitäviksi. Sen sijaan kahden janan yhtenevyys ei ole itsestään selvä, vaan se on määriteltävä. Olkoon siis AB P-jana. Silloin A ja B ovat P-suoralla, jonka kantaja leikkaa Γ:n pisteissä P ja Q. Nimetään nämä niin, että A on P:n ja B:n välissä. Jos nyt $A'B'$ on toinen P-jana ja jos $A'B'$:n kantaja leikkaa Γ:n pisteissä P' ja Q' (A' P':n ja B':n välissä), niin määritellään $AB \cong A'B'$ jos ja vain jos

$$[A, B, P, Q] = [A', B', P', Q'].$$

Näin määritelty yhtenevyys on selvästi transitiivinen relaatio (aksiooma 8), niin kuin pitääkin. Mutta miten se suhtautuu janojen "yhteenlaskuun" (aksiooma 9)?

Oletetaan A, B ja C saman P-suoran pisteiksi, samoin A', B' ja C'. Lisäksi B on P-janalla AC ja B' P-janalla $A'C'$. Jos vielä $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $[A, B, P, Q] = [A', B', P', Q']$ ja $[B, C, P, Q] = [B', C', P', Q']$. Kaksoissuhdeyhtälöt merkitsevät euksilidisin mitoin yhtälöitä

$$\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} = \frac{A'P'}{A'Q'} \cdot \frac{B'Q'}{B'P'} \quad \text{ja} \quad \frac{BP}{BQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = \frac{B'P'}{B'Q'} \cdot \frac{C'Q'}{C'P'}.$$

Kun nämä yhtälöt kerrotaan puolittain, saadaan

$$\frac{AP}{AQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = \frac{A'P'}{A'Q'} \cdot \frac{C'Q'}{C'P'}.$$

Siis $[A, C, P, Q] = [A', C', P', Q']$, joten P-janat AC ja $A'C'$ ovat yhteneviä.

Huomataan, että

$$[A, B, P, Q] \cdot [B, C, P, Q] = [A, C, P, Q].$$

Voidaanko P-jana siirtää toiselle P-suoralle alkamaan tietystä pisteestä (aksiooma 7)? Tämän tarkastelu helpottuu, jos otetaan käyttöön Π:n kuvaus *P-peilaus*. Jos Γ_1 on ympyrä, joka leikkaa Γ:n kohtisuorasti, niin inversio Γ_1:ssä kuvaa Γ:n itselleen. Γ:n sisäpisteet pysyvät Γ:n sisäpisteinä, mutta ne siirtyvät Γ_1:n vastakkaisille puolille. Invesio Γ_1:ssä säilyttää kaikki kaksoissuhteet.

Olkoon A P-piste, P ja Q A:n kautta piirretyn OA:ta vastan kohtisuoran (euklidisen) suoran ja Γ:n leikkauspisteet ja A' OA:n ja Q:n kautta kulkevan Γ:n tangentin leikkauspiste. Kolmiot OAQ ja OQA' ovat yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita, ja niistä nähdään, että A' on A: inversiokuva. Mutta kolmiot QAA' ja OQA' ovat myös suorakulmaisia kolmioita, ja nistä nähdään, että O on A:n inversiokuva A'-keskisessä P:n ja Q:n kautta kulkevassa ympyrässä Γ_1. On siis aina olemassa P-peilaus, joka vie mielivaltaisen pisteen Γ:n keskipisteeseen. Jokainen A:n kautta kulkeva P-suora kuvautuu nyt O:n kautta kulkevaksi P-suoraksi. Kahdella P-peilauksella ja niiden välissä olevalla kierrolla voidaan mielivaltainen P-jana siirtää mille tahansa P-suoralle mistä tahansa sen pisteestä alkavaksi janaksi. Samoin voidaan siirtää kulma.

Edellisistä havainnoista seuraa, että yhtenevyysaksiooma sks on voimassa. Siten kaikki tästä aksioomasta paralleeliaksioomaan turvautumatta johtuvat lauseet ovat voimassa Π:ssä.

Paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Jokaisen P-suoran AB ulkopuolisen pisteen kautta kulkevat suorat ovat ne P-suorat, joiden kantajat ovat C:n ja C':n kautta kulkevia ympyröitä. Näistä löytyy aina sellaisia, jotka eivät leikkaa AB:n kantajaa.

O-keskinen P-ympyrä on normaali euklidinen ympyrä. P-peilaus, joka vie O:n A:lle vie tämän ympyrän ympyräksi, jonka jokaiselle kahdelle pisteelle B ja C AB ja AC ovat yhteneviä. Tämä ympyrä on A-keskinen P-ympyrä. Ympyröiden leikkausaksiooma on voimassa.

Olemme todenneet, että janojen yhtenevyyden määrittelevä kaksoissuhde $[A,\, B,\, P,\, Q]$ on multiplikativinen. Oletetaan Γ yksikkösäteiseksi. Siirretään A O:hon P-peilauksella. Yhdistämällä kuvaukseen kierto saadaan B kuvattua pisteeseen $(b,\, 0)$. Nyt voidaan kaksoissuhteen $[A,\, B,\, P,\, Q]$ arvoksi laskea

$$\frac{1-b}{1+b}.$$

Siis $0 < [A,\, B,\, P,\, Q] < 1$. Tästä seuraa, että "normaali", additiivinen P-etäisyys on määriteltävissä esimerkiksi lausekkeella

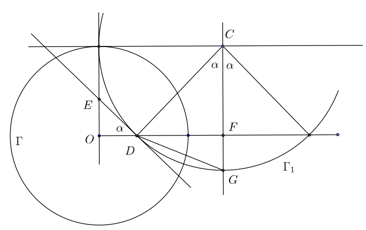
$$d(A,\, B) = \ln\left([A,\, B,\, P,\, Q]^{-1}\right) = \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right).$$

Nähdään, että etäisyys voi saada kuinka suuria arvoja hyvänsä. P-suoran päätepisteiden P ja Q voidaan ajatella olevan äärettömän kaukana. Toisaalta voidaan osoittaa, että näin määritelty etäisyys toteuttaa Arkhimedeen aksiooman.

Olkoon γ P-suora ja A γ:aan kuulumaton P-piste. A:n kautta voidaan piirtää γ:aa vastaan kohtisuora P-suora δ, joka leikkaa γ:n pisteessä B. Kuvataan γ P-peilauksella O:n kautta kulkevaksi P-suoraksi niin, että B kuvautuu O:ksi. Oletetaan Γ yksikkösäteiseksi. Mahdollisen kierron jälkeen γ:n kuva on y-akseli ja A:n kuva on piste $D = (b,\, 0)$, $b > 0$. P-suora δ kuvautuu siis x-akselille. Yksinkertainen lasku osoittaa, että

$$b = \frac{e^{d(A,B)} - 1}{e^{d(A,B)} + 1}.$$

Selvitetään kulma, jonka A:n kautta piirretty γ:aa leikkaamaton suora vähintään muodostaa δ:n kanssa. Se on sama kuin y-akselia pisteessä $H = (0,\, 1)$ sivuavan ja pisteen $(b,\, 0)$ kautta kulkevan ympyrän Γ_1 ja x-akselin välinen kulma $\alpha = \angle ODE$. Ympyrän Γ_1 yhtälö on $(x-c)^2 + (y-1)^2 = c^2$. Koska $(b,\, 0)$ toteuttaa ympyrän yhtälön, on $b^2 - 2bc + 1 = 0$. Leikatkoon C:n kautta piirretty y-akselin suuntainen suora x-akselin pisteessä $F = (c,\, 0)$ ja Γ_1:n pisteessä $G = (c,\, 1-c)$. Koska $CD \perp DE$ ja $CG \perp OF$, $\angle DCG = \alpha$. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle FDG = \dfrac{\alpha}{2}$. Saadaan



$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{FG}{FD} = \frac{c-1}{c-b}.$$

Kun tähän sijoitetaan edellä johdettu b:n ja c:n välinen yhteys, saadaan

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-b}{1+b}.$$

Kun vielä otetaan huomioon b:n lauseke, saadaan *Bolyain kaava*

$$\tan\frac{\alpha}{2} = e^{-d(A,B)}.$$

Kaikki A:n kautta kulkevat P-suorat, jotka muodostavat α:aa suuremman kulman δ:n kanssa, ovat γ:n "suuntaisia".

Harjoitus 8.2.1. *Totea, että Poincarén geometriassa jokaisen kulman aukeamassa on kokonaan aukemaan sisältyviä suoria (jotka eivät leikkaa kulman kylkiä).*

Harjoitus 8.2.2. *Osoita, että kaikilla $\alpha < 60°$ Poincarén geometriassa on tasasivuisia kolmioita, joiden kulmat ovat α:n suuruisia.*

Harjoitus 8.2.3. *Osoita, että jos $\alpha+\beta+\gamma < 180°$, niin Poincarén geometriassa on kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ.*

Harjoitus 8.2.4. *P-suoran γ kantaja Γ_1 leikkaa Γ:n pisteissä P ja Q. Olkoon α sellainen Γ:n sisäpuolella oleva (mielivaltaisen) ympyrän kaari, jonka päätepisteet ovat P ja Q. Osoita, että α:n pisteiden P-etäisyys γ:n pisteistä on vakio.*

9 Projektiivisen geometrian alkeita

1800-luvun alussa syntynyt projektiivinen geometria oli ensimmäinen todellinen Eukleideen luoman geometrian alueen laajennus. Projektiivista geometriaa voi ja pitäisikin lähestyä omana aksiomaattisena järjestelmänään. Tarkastelemme sitä tässä kuitenkin euklidisen tasogeometrian muunnelmana ja otamme järjestelmään kuuluvat "ideaalielementit" käyttöön heuristisesti. Aika ei salli täydellistä esitystä, joten rajoitumme muutamiin demonstraationluontoisiin yksityiskohtiin.

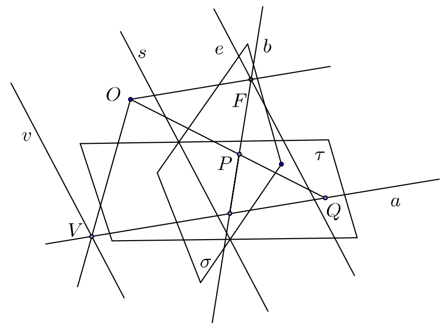
Nimensä mukaisesti projektiivinen geometria tutkii ominaisuuksia, jotka säilyvät keskeisprojektioissa tasolta tasolle. Tällaisiin ominaisuuksiin ei selvästikään kuulu yhtenevyys eikä yhdenmuotoisuus. Sen sijaan suorat ovat tasoille projisoitaessa edelleen suoria, yhdensuuntaiset yhdensuuntaisia ja leikkaukset leikkauksia. Ympyrä ei projisoidu ympyräksi, mutta projektiivisesti voidaan monesti mukavasti yleisemmin käsitellä ympyränsukuisten kuvioiden kuten kartioleikkausten ominaisuuksia. Projektiivisiin tarkasteluihin kuuluvat abstraktit *ideaalielementit*, jotka tekevät monista tuloksista yhtenäisiä ja kompakteja. Pääsääntöisesti projektiivisen tasogeometrian piirissä vallitsee duaalisuusperiaate, jonka mukaan lause säilyy totena, jos siinä vaihdetaan sanojen "suora" ja "piste" paikat. Vastaavasti projektiivisessa avaruusgeometriassa dualisuus on sen kaltainen, että "taso" ja "piste" ovat vaihdettavissa.

9.1 Ideaaliset elementit ja keskusprojektio

Projektiivisen avaruuden alkioina voidaan ajatella olevan "tavallisia" pisteitä, suoria ja tasoja. Jokaisella suoralla on "tavallisten" pisteiden lisäksi yksi ideaalielementti, "äärettömän kaukainen piste". Jokaisella kahdella eri suoralla on tasan yksi yhteinen piste. Tavallisessa mielessä yhdensuuntaiset suorat leikkaavat toisensa ideaalipisteessä. Sen sijaan kahdella tavallisessa mielessä toisensa leikkaavalla suoralla on eri ideaalipisteet. Tason ideaalipisteet muodostavat tason ideaalisuoran. Keskenään yhdensuuntaisilla tasoilla on sama ideaalisuora. Kaikki ideaalisuorat muodostavat avaruuden ideaalitason. – Ideaalipistettä merkitään usein äärettömän symbolilla ∞. Koska ideaalipisteitä on enemmän kuin yksi, merkintä voi olla harhaanjohtava.

Piste ei jaa projektiivista suoraa kahdeksi osaksi; pisteen "toiselle puolelle" pääsee ideaalipisteen kautta. Myöskään suora ei jaa projektiivista tasoa kahteen osaan: suoran a toiselta puolelta toiselle voi kiertää ideaalisuoran kautta pitkin sellaista suoraa b, joka leikkaa a:n muualla kuin ideaalipisteessä.

Ideaalielementtien olemusta selventää *keskusprojektion* tarkastelu. Olkoon O avaruuden piste. Projisoidaan tason τ pisteet tasolle σ. Pisteen $Q \in \tau$ projektio on suoran OQ ja tason σ leikkauspiste P. Suora $a \subset \tau$ tulee projisoitumaan O:n ja a:n kautta kulkevan tason ja tason σ leikkaussuoraksi b. Se a:n piste V, jolle $OV \| \sigma$, projisoituu suoran b ideaalipisteeksi. Suoran a ideaalipiste projisoituu sille b:n pisteelle F, jolle $OF \| a$. Kaikkien a:n kanssa yhdensuuntaisten suorien ideaalipisteet projisoituvat myös pisteelle F. Pisteen V kautta kulkevan, tasojen τ ja σ leikkaussuoran s suuntaisen suoran v pisteet kuvautuvat kukin jollekin tason σ ideaalisuoran pisteelle. Yksikäsitteinen vastaavuus suoran v ja σ:n ideaalisuoran pisteiden välillä perustelee sen, että tason ideaalielementti on juuri suora eikä esimerkiksi piste. Vastaavasti tason τ ideaalisuoran pisteet projisioituvat F:n kautta kulkevalle s:n suuntaiselle suoralle e.

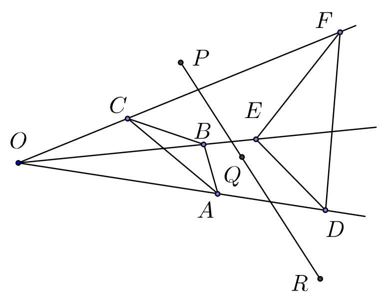


Myös ideaalipistettä voidaan pitää projektiokeskuksena. Koska kaikki ideaalipisteen kautta kulkevat suorat ovat yhdensuuntaisia, keskusprojektio, jossa projektiokeskus on ideaalipiste, on sama kuin yhdensuuntaisprojektio.

Klassinen esimerkki tasogeometrian lauseen "kolmiulotteisesta" projektiivisesta todistuksesta on *Desarguesin*[1] *lause.* Lauseen todistus voidaan rakentaa Menelaoksen lauseen (lause 2.3.3) pohjalle, mutta seuraava todistus on huomattavasti yksinkertaisempi. Lisäksi lauseen tekstissä mainitut leikkauspisteet voivat olla myös ideaalipisteitä.

Lause 9.1.1. *Olkoot ABC ja DEF kolmioita. Suorat AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä O silloin ja vain silloin, kun suorien AB ja DE leikkauspiste P, suorien BC ja EF leikkauspiste Q ja suorien CA ja FD leikkauspiste R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Oletetaan, että suorat AD, BE ja CF leikkaavat pisteessä O. Tulkitaan kuvio triedrin $OABC'$ projektioksi tasolle OAB. Valitaan siis tasoon OAB kuulumaton suora OC' ja sellainen projektiopiste, että C' projisoituu pisteeksi C. Tältä suoralta löytyy piste F', joka projisoituu pisteeksi F. Janojen $C'A$, $C'B$, $F'E$ ja $F'D$ projektiot tasolle OAB ovat janat CA, CB, FE ja FD. Suorat $C'B$ ja $F'E$ ovat samassa tasossa (tasossa OBC'). Ne siis leikkaavat toisensa pisteessä Q'. Mutta $C'B$ on tasossa ABC' ja $F'E$ on tasossa EDF'. Piste Q' on siis näiden tasojen leikkaussuoralla. Samalla perusteella janojen $C'A$ ja $F'D$ leikkauspiste R' tällä suoralla, samoin janojen AB ja



[1] *Gérard Desargues* (1593–1662) oli ranskalainen arkkitehti ja projektiivisen geometrian edelläkävijä pari sataa vuotta ennen kuin ala varsinaisesti löydettiin.

DE leikkauspiste P. Mutta suora $PQ'R'$ projisoituu tason OAB suoraksi ja pisteet Q' ja R' projisoituvat BC:n ja EF:n leikkauspisteiksi Q ja AC:n ja DF:n leikkauspisteeksi R. Tästä seuraa, että P, Q ja R ovat samalla suoralla.

Käänteisen lauseen todistus on tavanomaisen epäsuora. Jos P, Q ja R ovat samalla suoralla a, mutta CF ei kulje suorien AD ja BE leikkauspisteen O kautta, niin OC leikkaa (esimerkiksi) janan FD pisteessä F'. Sovelletaan lauseen jo todistettua alkuosaa kolmioihin ABC ja DEF'. AC:n ja DF':n eli DF:n leikkauspiste R, AB:n ja DE:n leikkauspiste P ja BC:n ja EF':n leikkauspiste Q' ovat samalla suoralla. Tämä suora on a. Koska BC:llä ja a:lla on vain yksi yhteinen piste Q, on oltava $Q' = Q$. Sekä F että F' ovat QE:n ja DF:n leikkauspisteitä, joten $F = F'$. $\square$

Harjoitus 9.1.1. *Paperilla on piste A ja kaksi suoraa, joiden leikkauspiste O on paperin (ja kenties pöydän reunankin) ulkopuolella. Piirrä A:n kautta suora, joka (jatkettuna) kulkee O:n kautta.*

9.2 Kaksoissuhde ja projektiiviset kuvaukset

Tarkastellaan neljän samalla suoralla olevan eri pisteen A, B, C ja D kaksoissuhdetta (harjoitustehtävä 95)

$$[A,\,B,\,C,\,D] = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}.$$

Tässä suoralle on kiinnitetty suunta, ja jananpituudet on varustettu etumerkein. Jos jokin pisteistä on ideaalinen, määritellään kaksoissuhde niin, että ne janat, joiden päätepisteenä tämä ideaalipiste on, jätetään kaavasta pois, ja kaksoissuhteen korvaa pelkkä jakosuhde. Tämä sopii tietenkin yhteen ”raja-arvoajattelun” kanssa, jonka mukaan ideaalipiste on ”äärettömän kaukana”.

Harjoitus 9.2.1. *Olkoon* $[A,\,B,\,C,\,D] = k$. *Osoita, että*

$$[B,\,A,\,D,\,C] = [C,\,D,\,A,\,B] = [D,\,C,\,B,\,A] = k$$

.

Harjoitus 9.2.2. $[A,\,B,\,C,\,D] = k$. *Osoita, että*

$$[A,\,B,\,D,\,C] = \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad [A,\,C,\,B,\,D] = 1 - k.$$

Harjoitus 9.2.3. *Osoita, että* $[A,\,B,\,C,\,D] \neq 1$.

Harjoitus 9.2.4. *Pisteet A, B, C ja D voidaan kirjoittaa jonoon* $4!$ *eri tavalla. Montako eri arvoa voi olla pisteistä muodostetulla kaksoissuhteella?*

Janan jakosuhde ja siis myös neljän pisteen kaksoissuhde säilyy yhdensuuntaisprojektiossa. Se säilyy myös mielivaltaisessa keskeisprojektiossa:

Lause 9.2.1. *Olkoot A, B, C ja D suoran a pisteitä ja olkoon $O \notin a$. Leikatkoot suorat OA, OB, OC ja OD suoran b, $O \notin b$, pisteissä A', B', C' ja D'. Silloin $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.*

Todistus. Kiinnitetään suoralle a järjestys. Jos h on kolmioiden OAC, OAD, OBC ja OBD yhteinen korkeus, niin kolmion alan laskukaavojen perusteella (kun kulmiin ja janoihin sovelletaan samaa etumerkkisääntöä) on

$$\begin{aligned} AC \cdot h &= OA \cdot OC \cdot \sin(\angle AOC), \quad & AD \cdot h &= OA \cdot OD \cdot \sin(\angle AOD) \\ BC \cdot h &= OB \cdot OC \sin(\angle BOC) \quad & BD \cdot h &= OB \cdot OD \cdot \sin(\angle BOD). \end{aligned}$$

Saadaan

$$[A, B, C, D] = \frac{\sin(\angle AOC) \cdot \sin(\angle BOD)}{\sin(\angle BOC) \cdot \sin(\angle AOD)}. \tag{1}$$

Koska kaksoissuhde riippuu vain O:n kautta kulkevien suorien välisistä kulmista, se on sama kaikille sellaisille pisteistöille, jotka syntyvät, kun jokin suora leikkaa nämä neljä suoraa. □

Lauseen todistuksessa saatu neljän kulman sineistä koostuva lauseke (1) on saman pisteen O kautta kulkevien neljän suoran OA, OB, OC ja OD muodostaman suorakimpun *kaksoissuhde* $[OA, OB, OC, OD]$. Jos mikä hyvänsä suora leikkaa suorakimpun neljä suoraa, leikkauspisteiden kaksoissuhde on sama kuin suorakimpun kaksoissuhde.

Suoran pisteistöjen (A, B, C, D) ja (A', B', C', D') sanotaan olevan *perspektiivisiä* (pisteen O suhteen), jos jälkimmäisen jonon pisteet ovat edellisen jonon pisteiden projektioita keskusprojektiossa, jonka projektiokeskus on O. Relaatiota merkitään

$$(A, B, C, D) \doublebarwedge (A', B', C', D') \quad \text{tai} \quad (A, B, C, D) \doublebarwedge_O (A', B', C', D').$$

Pisteistöjen (A, B, C, D) ja (A', B', C', D') sanotaan olevan *projektiivisessa suhteessa* jos niillä on sama kaksoissuhde. Tätä relaatiota merkitään $(A, B, C, D) \barwedge (A', B', C', D')$ tai $(A, B, C, D) \barwedge_O (A', B', C', D')$. Lauseesta 9.2.1 seuraa, että perspektiiviset neliköt ovat projektiivisia. Käänteinen relaatio ei luonnollisestikaan ole tosi. Mutta jos pisteistöillä on yhteinen alkio, projektiivisuus implikoi perspektiivisyyden. Projektiivisuus on transitiivinen relaatio.

Perspektiivisyys ja projektiivisuus voidaan yhtä hyvin määritellä suorakimpuille. Pisteen O kautta kulkevat suorat a, b, c ja d ja pisteen O' kautta kulkevat suorat a', b', c' ja d' ovat perspektiivisiä, $(a, b, c, d) \doublebarwedge (a', b', c', d')$, jos vastinsuorien ($a$:n ja a':n jne.) leikkauspisteet A, B, C ja D ovat samalla suoralla. Kimput (a, b, c, d) ja (a', b', c', d') ovat projektiiviset, $(a, b, c, d) \barwedge (a', b', c', d')$, jos $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Lause 9.2.2. *Olkoot A, B, C ja D saman suoran pisteitä ja A, B', C' ja D' saman suoran pisteitä. Jos $(A, B, C, D) \barwedge (A, B', C', D')$, niin $(A, B, C, D) \doublebarwedge (A, B', C', D')$.*

Todistus. Leikatkoot BB' ja CC' pisteessä O. Leikatkoon OD suoran AB' pisteessä D''. Silloin $(A, B, C, D) \doublebarwedge_O (A, B', C', D'')$. Siis

$$(A, B', C', D') \barwedge (A, B, C, D) \barwedge (A, B', C', D'').$$

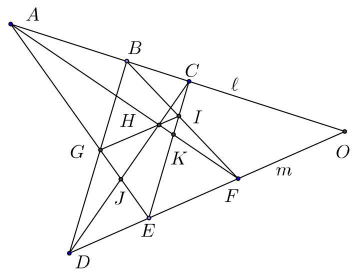
Tämä on mahdollista vain, jos $D' = D''$. □

Todistetaan edellisen lauseen seurauksena klassinen *Pappoksen*[1] *lause.*

Lause 9.2.3. *Olkoot A, B ja C suoran ℓ ja D, E ja F suoran m pisteitä. Silloin AE:n ja BD:n leikkauspiste G, AF:n ja CD:n leikkauspiste H ja BF:n ja CE:n leikkauspiste I ovat samalla suoralla.*

Todistus. Olkoon O suorien ℓ ja m leikkauspiste sekä J ja K AE:n ja CD:n sekä AF:n ja CE:n leikkauspisteet. Nyt

$$(A,\, G,\, J,\, E) \overset{=}{\barwedge}_D (A,\, B,\, C,\, O) \overset{=}{\barwedge}_F (K,\, I,\, C,\, E).$$



Koska perspektiivisyydestä seuraa projektiivinen vastaavuus, on $(A, G, J, E) \barwedge (K, I, C, E)$. Lauseen 9.2.2 perusteella $(A, G, J, E) \overset{=}{\barwedge} (K, I, C, E)$. Perspektiivikeskus on suorien AK ja CJ leikkauspiste. Tämä piste on H. Siis G ja I ovat samalla H:n kautta kulkevalla suoralla. □

9.3 Harmoniset pisteet ja täydellinen nelikulmio

Suoran pistenelikköä (A, B, C, D) sanotaan *harmoniseksi*, jos $[A, B, C, D] = -1$. Vastaavasti neljä saman pisteen kautta kulkevaa suoraa muodostaa harmonisen kimpun, jos niiden kaksoissuhde on -1.

Jos (A, B, C, D) on harmoninen, niin $AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0$ eli $AC \cdot (BA + AD) + AD \cdot (BA + AC) = 0$. Kun tämä yhtälö jaetaan $AB \cdot AC \cdot AD$:llä, saadaan

$$-\frac{1}{AD} + \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = 0$$

eli

$$AB = \frac{2}{\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}}.$$

AB on siis AC:n ja AD:n harmoninen keskiarvo.

Harmoniset pisteet liittyvät inversioon: olkoon $AB = 2r$ ja O AB:n keskipiste. Edellinen relaatio voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r + OC} + \frac{1}{r + OD}\right).$$

Yksinkertaisten sievennyksien jälkeen saadaan $OC \cdot OD = r^2$. Pisteet C ja D ovat toistensa kuvia inversiossa ympyrässä, jonka halkaisija on AB.

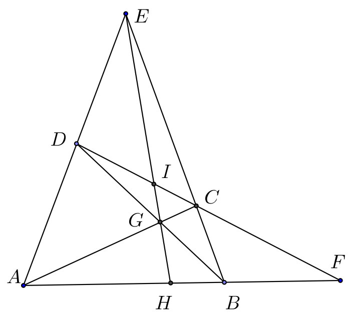
[1] *Pappos Aleksandrialainen*, n. 290–n. 350, viimeinen merkittävä antiikin matemaatikko.

Harjoitus 9.3.1. *Millainen on harmoninen pisteistö silloin, kun yksi pisteistä on ideaalipiste?*

Harjoitus 9.3.2. *Mitä muita arvoja kuin -1 voi harmonisen pisteistön $(A,\, B,\, C,\, D)$ pisteistä muodostetun jonon kaksoissuhde saada?*

Olkoot A, B, C ja D neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Pisteet määrittävät *täydellisen nelikulmion* $ABCD$. Pisteet määrittävät yhteensä $\binom{4}{2} = 6$ suoraa, ja näillä on $\binom{6}{2} = 15$ leikkauspistettä. Jokainen pisteistä A, B, C ja D on kolmen suoraparin leikkauspiste, joten muita leikkauspisteitä on $15 - 4 \cdot 3 = 3$ kappaletta. Ne ovat AD:n ja BC:n leikkauspiste E, AB:n ja CD:n leikkauspiste F ja AC:n ja BD:n leikkauspiste G. Suorat EG, GF ja EF ovat nelikulmion $ABCD$ *lävistäjiä*.

Lause 9.3.1. *Leikatkoon täydellisen nelikulmion $ABCD$ lävistäjä EG suoran AB pisteessä H ja suoran CD pisteessä I. Silloin $(A,\, B,\, H,\, F)$ ja $(D,\, C,\, I,\, F)$ ovat harmonisia.*



Todistus. $(A,\, B,\, H,\, F)\overline{\overline{\wedge}}_E(D,\, C,\, I,\, F)\overline{\overline{\wedge}}_G(B,\, A,\, H,\, F)$. Lauseen 9.2.1 perusteella $[A,\, B,\, H,\, F] = [B,\, A,\, H,\, F]$. Mutta

$$[A,\, B,\, H,\, F] = \frac{1}{[B,\, A,\, H,\, F]}.$$

Koska eri pisteiden kaksoissuhde ei voi olla 1, ainoa mahdollisuus on, että $[A,\, B,\, H,\, F] = -1$. Koska $(A,\, B,\, H,\, F)\overline{\overline{\wedge}}_E(D,\, C,\, I,\, F)$, $(D,\, C,\, I,\, F)$ on myös harmoninen. □

Edellistä lausetta kutsutaan joskus *projektiivisen geometrian peruslauseeksi*. Sen perusteella on aina mahdollista – pelkkää viivoitinta käyttäen – konstruoida piste, joka muodostaa annettujen kolmen samalla suoralla olevan pisteen kanssa harmonisen pisteistön. Konstruktio on yksinkertainen. Olkoot A, H ja B ovat sanotut kolme pistettä ja olkoon H A:n ja B:n välissä. Valitaan piste E suoran AB ulkopuolelta. Piirretään AE, BE ja HE. Valitaan AE:ltä jokin piste D. Piirretään BD. Se leikkaa EH:n pisteessä G. Piirretään AG. Se leikkaa BE:n pisteessä C. Piirretään DC. Sen ja AB:n leikkauspiste F on kysytty piste.

Koska janan päätepisteet, keskipiste ja ideaalipiste muodostavat harmonisen pisteistön, peruslausetta voidaan käyttää vaikkapa keskipisteen määritykseen.

Harjoitus 9.3.3. *Suorita harmonisen pisteistön $(A,\, B,\, H,\, F)$ täydentäminen tilanteessa, jossa tunnetaan A, B ja janan AB ulkopuolinen piste F.*

Harjoitus 9.3.4. *Määritä kahden yhdensuuntaisen eripituisen janan keskipisteet pelkällä viivoittimella.*

Harjoitus 9.3.5. *Tunnetaan jana CD ja sen keskipiste I. Piirrä pelkällä viivoittimella pisteen A kautta CD:n suuntainen suora.*

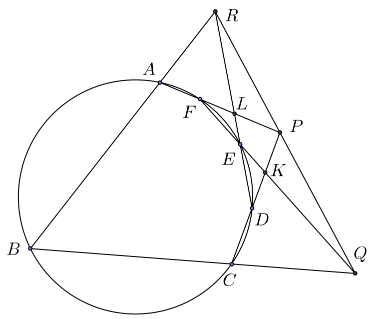
9.4 Pascalin lause

Todistetaan vielä kuuluisa Pascalin lause, joka koskee ympyrän sisään piirrettyä kuusikulmiota. Se perustuu olennaisesti seuraavaan havaintoon.

Jos A, B, C, D, E ja F ovat ympyrän kehän pisteitä, niin suorakimput $(EA,\ EB,\ EC,\ ED)$ ja $(FA,\ FB,\ FC,\ FD)$ ovat projektiivisia. Tämä seuraa välittömästi suorakimpun kaksoissuhteen määritelmästä suorien välisten kulmien sinien avulla ja kehäkulmalauseesta, jonka mukaan kulmat $\angle AEB$ ja $\angle AFB$ jne. ovat joko yhteneviä tai vieruskulmia.

Lause 9.4.1. *Olkoot A, B, C, D, E ja F ympyrän pisteitä. Silloin suorien BC ja EF leikkauspiste Q, suorien CD ja FA leikkauspiste P ja suorien DE ja AB leikkauspiste R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Olkoon K suorien DC ja EF leikkauspiste ja L suorien ED ja AF leikkauspiste. Edellä esitetyn havainnon perusteella $[CE,\ CF,\ CD,\ CB] = [AE,\ AF,\ AD,\ AB]$. Suorakimpun ja kimpun suoria leikkaavan suoran ja kimpun suorien leikkauspisteitä koskevan kaksoissuhdetuloksen perusteella



$$[CE,\ CF,\ CD,\ CB] = [E,\ F,\ K,\ Q]$$

ja

$$[AE,\ AF,\ AD,\ AB] = [E,\ L,\ D,\ R].$$

Siis $(E,\ F,\ K,\ Q) \barwedge (E,\ L,\ D,\ R)$. Lauseen 9.2.2 perusteella pisteistöt $(E,\ F,\ K,\ Q)$ ja $(E,\ L,\ D,\ R)$ ovat perspektiiviset. Perspektiivikeskus on suorien FL eli AF ja KD eli CD leikkauspiste, siis piste P. Myös vastinpisteet Q ja R ovat perspektiivikeskuksen kautta kulkevalla suoralla. Siis Q, P ja R ovat samalla suoralla. □

Pascalin lause voidaan esittää huomattavasti yleisemmin ehdoin. Ympyrän tilalla voi olla mikä hyvänsä kartioleikkaus. Tämän tekee uskottavaksi se, että kartioleikkaukset ovat suoran ympyräkartion ja tason leikkauskäyriä, ja edellä todettu tilanne voidaan siirtää kartion kärki projektiokeskuksena kartion ympyräleikkaukselta tuolle leikkaustasoille.