K. VÄISÄLÄ

GEOMETRIA

VIIDES PAINOS

PORVOO * HELSINKI
WERNER SÖDERSTRÖM OSAKEYHTIÖ

Kouluhallituksen hyväksymä

Werner Söderström Osakeyhtiön
kirjapainossa Porvoossa
1959

ALKUSANAT

Tämän viidennen painoksen kokonaissisältö ja esitystapa on sama kuin edellisten. Oppiaineksen järjestystä on kuitenkin muutettu siten, että oppikirjan kolme ensimmäistä lukua nyt muodostavat yhtenäisen keskikoulun oppimäärän niiden uusien oppiennätysten mukaan, jotka opetusministeriö on vahvistanut 24. 7. 58. Niinpä on neljänteen lukuun siirretty verrannon muunnokset, yhdensuuntaiset leikkaajat ja kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet, jotka ennestäänkin kuuluivat vasta lukion kurssiin. Sen sijaan on toiseen lukuun otettu aivan lyhyt yleisen yhdenmuotoisuuden deskriptiivinen esitys. Samoin on tämän luvun loppuun liitetty keskikoulun kurssiin kuuluva tärkeimpien kappaleiden ja niiden pinta-alojen ja tilavuuksien esittely, joten näitä käsitteleviä kohtia ei enää tarvitse poimia oppikirjan viimeisestä luvusta. Uudet oppiennätykset ovat aiheuttaneet oppikirjaan ainoastaan sen muutoksen, että toisen ja kolmannen luvun järjestys on vaihdettu päinvastaiseksi.

Kuten edellisten painoksien alkusanoissa, haluan nytkin kiinnittää huomiota erinäisiin tämän oppikirjan sisältöä ja esitystapaa koskeviin seikkoihin ja lausua joitakin ajatuksia oppikirjan käytöstä opetuksessa.

Oppikirjan ensimmäinen luku rakentuu suurimmalta osalta havainnolle. On suoritettu vain aivan lyhyitä deduktiopäätelmiä, joista tärkein koskee kolmion kulmien summaa. Erityinen huomio on jo alusta lähtien kiinnitetty yksinkertaisten ja perustavaa laatua olevien piirtämistehtävien ratkaisemiseen erilaisia välineitä käyttäen. Ensimmäisen luvun lopussa esitetään kolmion konstruoimiset kolmesta tunnetusta osasta lähtemällä, ja ratkaisujen tarkasteluista seuraavat sitten välittömästi kolmioiden yhtenevyyslauseet, joiden todistukset Eukleideen hengessä tuottavat tunnetusti suuria vaikeuksia.

Oppilailla tulee olla piirtämistä varten v i i v a t t o m a t vihot, joihin he voinevat myös laskutehtävät suorittaa. Konstruktiotehtävissä on kiinnitettävä päähuomio ratkaisun ymmärtämiseen ja oikeaan suorittamiseen. Sen sijaan mielestäni ei ole vielä ensimmäisenä ja tuskin toisenakaa oppivuotena yleensä vaadittava ratkaisun yhtäjaksoista selittämistä ja todistamista. Kirjallisissa kokeissa riittää, että oppilas itse piirroksella, ilman selityksiä, selvästi osoittaa, kuinka hän on annetun konstruktiotehtävän ratkaissut.

Toisessa luvussa käsitellään pituuksien, pinta-alojen, tilavuuksien ja kulmien laskemista. Vaikkakin neliöjuuren käsite ja laskeminen tulee algebrassa esille vasta keskikoulun viimeisellä luokalla, olen katsonut olevan paikallaan ottaa neliöjuuren käsitteen alustavasti puheeksi tässä luvussa, koska siihen tulee luonnollinen tarve määrättäessä tiettyä suuruutta olevan neliön sivua ja käytettäessä Pythagoraan lausetta suorakulmaisen kolmion sivun laskemiseen. Tästä ei koidu oppilaille mitään vaikeuksia, kun tyydytään määräämään neliöjuuren likiarvo kokeilemalla ja oppikirjan lopussa olevasta taulukosta. Tähän lukuun kuuluvien trigonometristen laskujen suorittamista varten on oppikirjassa liitteenä kolmidesimaalinen trigonometrinen taulukko, josta saadaan suoraan $0{,}1°$ tarkkuudella ilmaistujen kulmien trigonometristen funktioiden arvot. Taulukko voidaan irroittaa kirjasta, jos kokeita silmällä pitäen katsotaan tarpeelliseksi.[1]

Deduktion järjestelmällinen käyttö todistuksissa aloitetaan oppikirjan kolmannen luvun alusta. Kun oppilaat tällöin aluksi joutuvat todistamaan havainnolleen selviä asioita, niin on heille ehdottomasti selitettävä tällaisen opetuksen tarkoitus. On huomautettava, että tarkoitus on kehittää heitä ajattelemaan järjestelmällisesti ja tekemään oikeita johtopäätöksiä, koska tämä taito on tärkeätä ei vain uusien matemaattisten totuuksien esille saamiseksi, vaan myös kunkin ihmisen käytännöllisessä elämässä, joutuipa hän mille alalle tahansa. On väärin uskotella oppilaille, että esim. ensimmäinen lause »suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtäsuuret» todistetaan siksi, että sen oikeudesta ei voida olla muutoin varmoja.

Deduktion järjestelmällisen käytön aloittaminen suunnikkaita koskevilla lauseilla on sopivaa ennen kaikkea siksi, että tällöin oppilas joutuu aluksi tekemisiin helppojen ja lyhyiden todistusten kanssa, siis päinvastoin kuin Eukleideen järjestelmässä. Vaikkakin puheena oleva kolmas luku tulee esille vasta keskikoulun viimeisellä luokalla, niin kokemus näyttää, että todistusten yhtäjaksoinen suorittaminen tuottaa vielä monelle suuria vaikeuksia siitä huolimatta, että oppilas ymmärtää asianomaisen todistuksen. Jotta vältyttäisiin epäterveeltä todistusten ulkoaluvulta, on mielestäni vielä tällä asteella kiinnitettävä päähuomio todistusten ymmärtämiseen, joskin samalla on tietysti pidettävä huolta myös todistuksen muodollisen esitystavan kehittämisestä.

[1] Samanlainen taulukko on saatavissa erikseenkin: **Eero Vesterinen**, *Kolminumeroiset trigonometriset taulukot.*

Lukion kurssi alkaa neljännestä luvusta, joka sisältää tasogeometrian täydennyksen. Luvun alussa todistetaan kaikki kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseet saman yksinkertaisen periaatteen mukaisesti ja näihin lauseisiin nojaten esitetään sitten lyhyesti yleinen yhdenmuotoisuusoppi. Näin tulee jälkeenpäin luoduksi järjestelmällinen perusta trigonometrisille funktioille ja ympyränmitannolle, joiden käsittely edellisessä luvussa perustui yhdenmuotoisuuden deskriptiiviseen esitykseen.

Viides luku käsittää suorien ja tasojen keskinäisiä asentoja koskevan systemaattisen esityksen. Todistettavat lauseet on pyritty ryhmittämään luonnolliseen järjestykseensä, samalla kuin on koetettu supistaa niiden lukumäärää mahdollisuuksien mukaan. Konstruktiotehtävien ratkaisemista ei ole pyritty palauttamaan harpilla ja viivoittimella tasoon piirtämiseen. Niinpä on suoran normaalitason ja tason normaalin asettaminen suoritettu kahden kulmaviivoittimen avulla, mikä vastaa todellista käytäntöä. Näin on tullut myös mahdolliseksi esittää nämä konstruktiot luonnollisessa yhteydessä tason normaalin määritelmän ja normaalia koskevan peruslauseen kanssa. Avaruuskuvioita piirrettäessä on yleensä käytetty vinoa yhdensuuntaisprojektiota. Tästä helposta ja geometriassa käytettäväksi sopivimmasta kuvaamiskeinosta on oppikirjassa lyhyt esitys.

Oppikirjan viimeisessä luvussa jatketaan kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien käsittelyä. Jo keskikoulun kurssissa, toisessa luvussa, lieriö- eli sylinterikäsite esitetään yleisessä mielessä, niin että pohjana voi olla mielivaltaisen umpinaisen viivan rajoittama alue, jolloin ympyrälieriö ja särmiö ovat lieriön tärkeitä erikoistapauksia. Tällaisessa yleisessä mielessä joudutaan lieriökäsitettä usein käyttämään jatko-opinnoissa ja muutenkin (vrt. harj. teht. 480). Sitä vastoin ei ole minkäänlaista tarvetta käyttää yleistä lieriökäsitettä siinä mielessä, että pohjan piiri on kokonaisuudessaan käyräviivainen, kuten usein näkee tehtävän. Vastaavaa on sanottava yleisestä kartiokäsitteestä.

Vinon lieriön ja kartion tilavuuksia johdettaessa on nojauduttu havainnollisesti perusteltuun »Cavalierin periaatteeseen». Tällä tavalla tulee asiain käsittely huomattavasti yksinkertaisemmaksi ja helppotajuisemmaksi kuin Eukleideen mallin mukaisessa muodollista täsmällisyyttä tavoittelevassa esityksessä. Samalla oppilaat joutuvat tutustumaan integraalilaskennassa käytettyyn ajatustapaan.

Oppikirjan useimpiin pykäliin liittyy harjoitustehtäviä. Mikäli suinkin aikaa riittää, on syytä ratkaista ne kaikki. Kertausharjoitustehtäviä, joita on toisen, kolmannen, neljännen ja kuudennen luvun lopussa, on niin runsaasti, että ensi lukemisessa on parasta käydä läpi niistä vain sopiva valikoima ja käsitellä loput vasta myöhemmin kertauksen yhteydessä tai jättää ne oppilaiden oman harrastuksen varaan. Kun uusien oppiennätyksien mukaan keskikoulun viimeinen luokka käytetään deduktion harjoitteluun (kolmas luku), niin on syytä tällä luokalla lopuksi lyhyesti kerrata käytännön kannalta tärkeä pituuksien, pinta-alojen, tilavuuksien ja kulmien laskemista käsittelevä toinen luku. Tässä tarkoituksessa on kolmannen luvun loppuun pantu myös toista lukua koskevia kertausharjoitustehtäviä (88 §), joiden joukkoon nyt on voitu ottaa entistä vaativampiakin, kun oppilaat ovat tällöin jo paremmin tutustuneet neliöjuureen ja yhtälöiden ratkaisemiseen.

Tähdellä (*) on merkitty ne kohdat, jotka voidaan sivuuttaa lukion matematiikan lyhyemmässä kurssissa, ja kahdella tähdellä kohdat, jotka eivät ole pakollisia pitemmässäkään kurssissa.

Helsingissä lokakuulla 1958

K. Väisälä

SISÄLLYS

Ensimmäinen luku

PERUSKÄSITTEITÄ JA -LAUSEITA — PIIRTÄMISTEHTÄVIÄ

Toinen luku

MITTAAMINEN JA YHDENMUOTOISUUS

Kolmas luku

DEDUKTIIVINEN TODISTUSTAPA
MONIKULMIOITA JA YMPYRÄÄ KOSKEVIA LAUSEITA
PIIRTÄMISTEHTÄVIÄ

Neljäs luku

TASOGEOMETRIAN TÄYDENNYS

Viides luku

SUORIEN JA TASOJEN KESKINÄISET ASENNOT AVARUUDESSA

Kuudes luku

KAPPALEET SEKÄ NIIDEN TILAVUUDET JA PINTA-ALAT

KREIKKALAISET KIRJAIMET

A α alfa	I ι iioota	P ϱ roo
B β beeta	K $\varkappa$ kappa	Σ σ sigma
Γ γ gamma	Λ λ lambda	T τ tau
Δ δ delta	M μ myy	Y υ ypsiilon
E ε epsiilon	N ν nyy	Φ φ fii
Z ζ dseeta	Ξ ξ ksii	X χ khii
H η eeta	O o omiikron	Ψ ψ psii
Θ ϑ theeta	Π π pii	Ω ω oomega

ENSIMMÄINEN LUKU

Peruskäsitteitä ja -lauseita
Piirtämistehtäviä

I. PISTE, SUORA VIIVA JA TASO

1 §. *Geometriassa* [1] tutkitaan *pisteitä, viivoja, pintoja* ja *kappaleita* sekä niiden muodostamia *kuvioita.*

Geometriset pisteet ajatellaan »äärettömän pieniksi». Niitä kuvataan havainnollisesti tavallisella pisteellä (·), pienellä renkaalla (∘) tai ristillä (×). Viivalla olevaa pistettä kuvataan usein lyhyellä poikkiviivalla (kuv. 1). Pisteiden niminä käytetään isoja kirjaimia A, B, C, . . .

Geometriset viivat ajatellaan äärettömän ohuiksi. Viivaa voidaan pitää äärettömän tiheässä olevien peräkkäisten pisteiden muodostamana. Havainnollisen, joskin karkean kuvan tästä ajatustavasta saamme helminauhasta, jossa helmet kuvaavat pisteitä ja helminauha kokonaisuudessaan pisteiden muodostamaa viivaa. Puhutaan myös liikkeessä olevan pisteen muodostamasta viivasta. Tällöin ajatellaan pisteen joka hetki jättävän jäljen itsestään (pisteen) ja tarkoitetaan niiden muodostamaa viivaa. Niinpä kynällä paperille piirrettäessä kynän kärki esittää pistettä, jonka jättämät jäljet (pisteet) muodostavat viivan.

[1] »*Geometria*» on kreikankielisestä sanasta muodostettu ja merkitsee »*maanmittaus*». Tällaisesta käytännöllisestä tarkoitusperästä ovat geometrian kehittäneet varsinaiseksi tieteeksi egyptiläiset ja kreikkalaiset, joista viimeksi mainituista on ennen kaikkea mainittava *Eukleides* (n. 300 e. Kr.) Hänen kirjoittamansa »*Alkeet*» oli vielä viime vuosisadalla geometrian oppikirjana meidänkin maamme oppikouluissa.

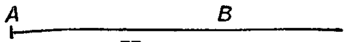
2 §. Yksinkertaisin viivoista on *suora viiva.* Molempiin suuntiin rajattomasti jatketuksi ajateltua suoraa viivaa sanotaan *suoraksi.*[1] Havaintomme mukaan *kahden pisteen kautta voidaan piirtää vain yksi suora, joten kahdella eri suoralla voi olla enintään yksi yhteinen piste.*

Suoraa nimitetään kahden sillä olevan pisteen mukaan (»suora *AB*», kuv. 1) tai suoralle merkityn pienen kirjaimen mukaan (»suora *l*», kuv. 2).

Kuv. 1.

Kuv. 2.

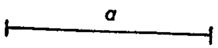
Pisteestä alkavaa, toiseen suuntaan rajattomasti jatketuksi ajateltua suoraa viivaa sanotaan *puolisuoraksi.* Mainittu piste on puolisuoran *alkupiste.* Puolisuoraa nimitetään alkupisteen ja puolisuoralle merkityn kirjaimen mukaan (»puolisuora *AB*», kuv. 3).



Kuv. 3.

Kahden pisteen välistä suoraa viivaa sanotaan *janaksi.* Mainitut pisteet ovat janan *päätepisteet.* Janaa nimitetään päätepisteiden mukaan (»jana *AB*», kuv. 4) tai janalle merkityn pienen kirjaimen mukaan (»jana *a*», kuv. 5).

Kuv. 4.



Kuv. 5.

Kun piste liikkuu »suoraviivaisesti» pisteestä *A* pisteeseen *B*, niin se muodostaa janan *AB*. Tällöin voidaan *A*:ta nimittää janan *alkupisteeksi* ja *B*:tä *loppupisteeksi.*

Harj.teht.: 1) Paperista on taittamalla valmistettava viivoitin.

2) Kuinka voidaan tutkia, onko laudan särmä suora a) katsomalla, b) ohutta nuoraa käyttämällä?

3) Piirrettävä viivoitinta käyttäen kahden annetun pisteen kautta viiva. Sitten on viivoitin käännettävä nurin sen särmän ympäri, jota piirrettäessä käytettiin, ja uudestaan piirrettävä viiva samojen pisteiden kautta ja samaa viivoittimen reunaa käyttäen. — Yhtyivätkö molemmat viivat täydellisesti? Mitä voidaan viivoittimen reunasta sanoa, jos a) viivat yhtyivät, b) eivät yhtyneet?

[1] »Suora» on tässä merkityksessä käsitettävä substantiiviksi.

3 §. Kahta janaa verrataan suuruuden puolesta toisiinsa siirtämällä janat päällekkäin siten, että toiset päätepisteet yhtyvät.[1] Jos tällöin toisetkin päätepisteet yhtyvät, niin janoja sanotaan *yhtäsuuriksi.* Muussa tapauksessa sanotaan sitä janaa *pienemmäksi,* jonka toinen päätepiste joutuu toiselle janalle.[2]

Janojen *summalla* tarkoitetaan janaa, jonka yhteenlaskettavat janat yhdessä muodostavat, kun ne asetetaan jollekin suoralle välittömästi perätysten. Janojen vähentäminen samoinkuin niiden kertominen ja jakaminen luvulla määritellään samalla tavalla kuin laskennossa vastaavat laskutoimitukset lukujen suhteen. Esitettyyn summan määritelmään nojautuen voidaan nämäkin laskutoimitukset sitten suorittaa.

Kun jana *mitataan* jollakin *mitalla* eli *yksiköllä* (esim. 1 mm, 1 cm jne.), niin lukua, joka ilmoittaa, montako kertaa mitta sisältyy janaan, sanotaan *mittaluvuksi.* Jos esim. mitta on 1 cm ja mittaluku 5, niin janan *pituus* eli *suuruus* on 5 cm. Kun janoilla suoritetaan edellä mainittuja laskutoimituksia, niin tuloksen mittaluku saadaan suorittamalla janojen mittaluvuilla ko. laskutoimitukset.

Pisteiden *A* ja *B* *välillä* eli *A*:n *etäisyydellä* pisteestä *B* tarkoitetaan janan *AB* pituutta. *Kahden pisteen välinen jana on lyhyempi kuin kaikki muut pisteitä yhdistävät viivat.*

[1] Yleensä tasaiselle pinnalle piirretyn kuvion siirto toiseen paikkaan voidaan toimittaa kopioimalla kuvio ensin läpinäkyvälle paperille ja siirtämällä kopio sitten asianomaiseen paikkaan. Jos kuvio on paperille piirretty, niin siirto voidaan suorittaa myös leikkaamalla kuvio irti. Erikoisesti janan siirto voidaan suorittaa käyttämällä siirtämisvälineenä joko paperin reunaa, johon merkitään janan päätepisteet, tai harppia, jonka kärkien väliin jana »otetaan».

[2] Jos *a* ja *b* merkitsevät kahta lukua, janaa jne., niin käytetään seuraavia merkintöjä:

$a > b$,	luettava:	*a* (on) suurempi kuin *b*,
$a < b$,	» » »	pienempi » »
$a \gtreqless b$,	» » »	suurempi tai pienempi kuin *b*,
$a \geqq b$,	» » »	» » yhtäsuuri » »
$a \leqq b$,	» » »	pienempi » » » »
$a \neq b$,	» » »	erisuuri kuin *b*.

Harj.teht.: 4) Piirrettävä viivattomalle paperille kauas toisistaan kaksi silmämäärin yhtäsuurta janaa ja tutkittava yhtäsuuruuden määritelmään nojautuen, ovatko ne todellakin yhtäsuuret (ks. alimuist. 1 siv. 3). Sen jälkeen on sama tutkimus suoritettava mittaamalla (mm-mitalla) molempien janojen pituudet ja vertaamalla saatuja mittalukuja.

5) Piirrettävä kolme mielivaltaista janaa a, b ja c (ei samalle suoralle) ja muodostettava niiden summa $a+b+c$. Sen jälkeen on sama summa muodostettava mittaamalla ensin janojen a, b ja c pituudet ja laskemalla ne yhteen sekä piirtämällä sitten jana, jolla on summan esittämä pituus. Verrattava näin kahdella tavalla saatuja tuloksia.

6) Minkälaista janaa tarkoitetaan kahden janan erotuksella? Piirrettävä kaksi mielivaltaista janaa a ja b ($a > b$) ja muodostettava erotus $a—b$. Sen jälkeen on erotus muodostettava käyttämällä mittaamista apuna, kuten edellisen tehtävän jälkimmäisessä osassa.

7) Minkälaista janaa tarkoitetaan tulolla a) $4 \cdot a$, b) $n \cdot a$, kun a on jokin tunnettu jana ja n kokonaisluku? Muodostettava sitten tulo $4 \cdot a$ α) käyttämättä mittaamista, β) mittaamalla ensin a:n pituus ja laskemalla sitten janan $4 \cdot a$ pituus ja piirtämällä lopuksi jana, jolla on tämä pituus.

8) Minkälaista janaa tarkoitetaan osamäärällä a) $a : 3$, b) $a : n$, kun a on jokin tunnettu jana ja n kokonaisluku ($\neq 0$)? Muodostettava sitten osamäärä $a : 3$ α) käyttämättä mittaamista (kokeilemalla), β) mittaamalla ensin a:n pituus ja laskemalla sitten janan $a : 3$ pituus ja piirtämällä lopuksi jana, jolla on tämä pituus.

4 §. Kaikkiin suuntiin rajoittamattomaksi ajateltua tasaista pintaa sanotaan *tasoksi.* Havaintomme mukaan *kolmen pisteen kautta, jotka eivät ole samalla suoralla, voidaan asettaa vain yksi taso.* Kolmen pisteen kautta, jotka ovat samalla suoralla, sitä vastoin voidaan asettaa äärettömän monta tasoa, ja ne sisältävät mainitun suoran kokonaan.

Taso sisältää kokonaan jokaisen suoran, jonka kanssa sillä on kaksi yhteistä pistettä. Millään muulla pinnalla ei ole tätä ominaisuutta.

On huomattava, että jokainen

suoran piste	jakaa suoran	kahteen	*puolisuoraan,*
tason suora	» tason	»	*puolitasoon,*
(avaruuden) taso	» avaruuden	»	*puoliavaruuteen.*

Geometria jaetaan kahteen osaan: *tasogeometriaan* ja *avaruusgeometriaan.* Edellisessä tutkitaan kuvioita, jotka ovat kokonaan samassa tasossa, ja jälkimmäisessä kuvioita, joilla ei ole tätä ominaisuutta. Tässä oppikirjassa kolme

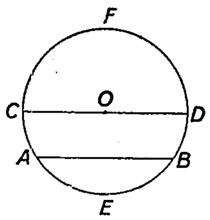
ensimmäistä lukua muodostavat tasogeometrian, joten näissä luvuissa *kaikkien kuvioiden ajatellaan kulloinkin olevan samassa tasossa, vaikka siitä ei erikoisesti mainitakaan.*[1]

II. YMPYRÄ

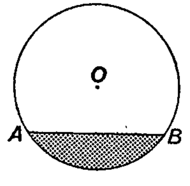
5 §. Yksinkertaisin ja tärkein *käyristä* viivoista on *ympyräviiva.* Kun ajattelemme sen piirtämistä harpilla, niin voimme sanoa, että ympyräviivan muodostaa piste, kun se kiertää toisen pisteen, **keskipisteen** ympäri, pysyen koko ajan samalla etäisyydellä siitä. Ympyräviivan rajoittamaa tason osaa sanotaan *ympyräksi.* Silloin kun ei ole pelättävissä sekaannusta, sanotaan itse ympyräviivaakin ympyräksi. Ympyräviivaa nimitetään myös ympyrän *kehäksi.* Kukin kehän pisteen ja keskipisteen välinen jana on ympyrän *säde.* Kaikki ympyrän säteet ovat siis yhtäsuuria.

Ympyrää nimitetään tavallisesti keskipisteensä mukaan. Niinpä kuviossa 8 olevaa ympyrää, jonka keskipiste on O ja säde $= r$, sanotaan »ympyräksi O».

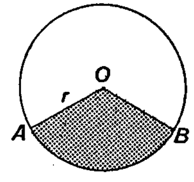
Kahden, ympyrän kehällä olevan pisteen (A ja B, kuv. 6) yhdistysjanaa (AB) sanotaan *jänteeksi.* Keskipisteen kautta kulkeva jänne (CD, kuv. 6) on nimeltään *halkaisija.* Siis halkaisija $= 2 \times$säde.



Kuv. 6.



Kuv. 7.



Kuv. 8.

[1] Harjoitustehtävien yhteydessä teemme kuitenkin joskus viittauksia avaruusgeometriaan.

Jänne (AB, kuv. 7) jakaa ympyrän kahteen *segmenttiin*. Niitä sanotaan *puoliympyröiksi*, jos jänteenä on halkaisija. Kaksi sädettä (OA ja OB, kuv. 8) jakaa taas ympyrän kahteen *sektoriin*.

Kaksi ympyrän kehän pistettä jakaa sen kahteen *kaareen*. Esimerkiksi kuviossa 6 jakavat pisteet A ja B ympyrän kehän kaariin AEB ja AFB. Kaarta nimitetään myös pelkkien *päätepisteiden* (A ja B) mukaan (»kaari AB»), jos ei ole epäselvyyttä siitä, kumpaako ko. kahdesta kaaresta tarkoitetaan.

Harj.teht.: 9) Voimme siis sanoa, että ympyräviivan, jonka keskipiste on O ja säde $= r$, muodostavat kaikki ne pisteet, joiden etäisyys O:sta $= r$ (vrt. 1 §). Tällöin edellytetään 4 §:n lopussa kertakaikkiaan tehdyn sopimuksen mukaisesti, että kaikki tarkastellut pisteet ovat samassa tasossa. Jos emme tee tätä rajoitusta, vaan otamme huomioon kaikki avaruuden pisteet, niin minkälaisen p i n n a n silloin muodostavat kaikki ne pisteet, joiden etäisyys O:sta $= r$?

10) Piirrettävä paperille jokin jana a ja piste O. Sitten on piirrettävä ympyrä O keskipisteenä ja »a säteenä» (säde $= a$).

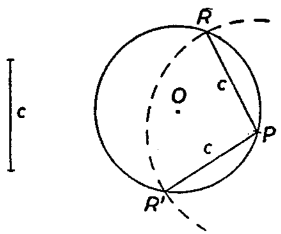
11) Merkittävä paperille kaksi pistettä O ja A ja piirrettävä sitten O keskipisteenä ympyräviiva, joka kulkee A:n kautta.

12) Piirrettävä ympyrä, jonka halkaisija $= 7{,}6$ cm.

13) Minkälainen jänne ympyrässä on suurin?

14) Voiko sektori olla joskus segmentti?

6 §. Tehtävä: *Ympyrän (O, kuv. 9) kehällä olevasta pisteestä (P) lähtien on piirrettävä jänne, joka = annettu jana (c).*



Kuv. 9.

Ratkaisu: Piirretään P keskipisteenä ja jana c säteenä ympyräviiva. Jos tämä kohtaa annetun ympyrän O kehän pisteessä R, niin jana PR on (piirrettäväksi) vaadittu jänne.

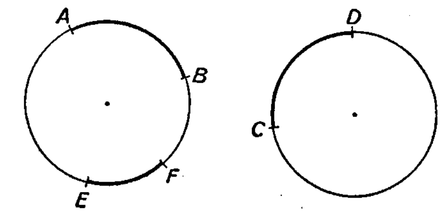
Tarkastelu:[1] Tehtävä on mahdollinen silloin, kun $c \leq$ annetun ympyrän halkaisija. Voidaan piirtää

[1] Kun annettu piirtämistehtävä on ratkaistu, niin tavallisesti liitetään perään »tarkastelu», jossa tutkitaan, milloin tehtävä on mahdollinen ratkaista ja montako ratkaisutulosta saadaan eri tapauksissa.

kaksi jännettä, kuten kuviossa 9, jos $c <$ halkaisija, ja vain yksi jänne (halkaisija), jos $c =$ halkaisija.

Harj.teht.: 15) Piirrettävä ensin ympyrä, jonka säde = 3 cm, ja sitten jostakin sen kehällä olevasta pisteestä lähtien jänteet, joiden pituudet ovat 2, 4 ja 6 cm.

7 §. Jos ympyräviivaa kierretään keskipisteen ympäri, niin sen uusi asento yhtyy entiseen. Samoin jos toinen kahdesta samansäteisestä ympyräviivasta asetetaan toisen päälle siten, että keskipisteet yhtyvät, niin ympyräviivat yhtyvät täydellisesti. Tähän ominaisuuteen nojautuen voidaan s a m a n s ä t e i s t e n kaarien suuruuden vertailu suorittaa samalla tavalla kuin janojen (3 §). Verrattavat kaaret asetetaan päällekkäin siten, että toiset päätepisteet yhtyvät. Jos tällöin toisetkin päätepisteet yhtyvät, kaaria sanotaan *yhtäsuuriksi*. Muussa tapauksessa sanotaan sitä kaarta *pienemmäksi*, jonka toinen päätepiste joutuu toiselle kaarelle. Kuviossa 10 on kaksi samansäteistä ympyrää. Kaari CD = kaari AB, mutta kaari EF < kaari AB.



Kuv. 10.

Jos kuviossa 10 esiintyvät samansäteiset ja yhtäsuuret kaaret AB ja CD asetetaan päällekkäin niin, että ne yhtyvät, niin myös vastaavat, so. kaarien päätepisteitä yhdistävät jänteet yhtyvät ja ovat siis yhtäsuuret. Koska kääntäen, yhtäsuuria jänteitä ilmeisesti vastaavat yhtäsuuret kaaret [1], niin voidaan kirjoittaa

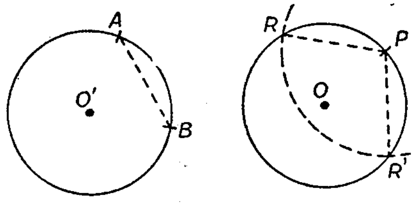
Lause: *Samassa ympyrässä ja samansäteisissä ympyröissä vastaavat yhtäsuuria kaaria yhtäsuuret jänteet, ja kääntäen: yhtäsuuria jänteitä vastaavat yhtäsuuret kaaret.*

[1] On huomattava, että kutakin jännettä vastaa kaksi kaarta. Tavallisesti tarkoitetaan jännettä vastaavalla kaarella pienempää niistä.

Tämän lauseen jälkimmäiseen osaan nojautuen voidaan ratkaista

Teht.: *Ympyrän* (*O*, kuv. 11) *kehällä olevasta pisteestä* (*P*) *lähtien on erotettava tunnetun samansäteisen kaaren* (*AB*) *suuruinen kaari.*

Ratk.: Piirretään ympyräviiva *P* keskipisteenä ja jänne *AB* säteenä. Jos se kohtaa ympyrän *O* kehän pisteessä *R*, niin kaari $PR =$ kaari AB, koska vastaavat jänteet ovat yhtäsuuret.



Kuv. 11.

Tark.: Tehtävä on aina mahdollinen ja saadaan kaksi ratkaisutulosta, kaaret *PR* ja *PR'*.

Laskutoimitukset samansäteisillä kaarilla määritellään ja suoritetaan vastaavalla tavalla kuin janoilla (3 §). Laskutoimituksia suoritettaessa tarpeellinen kaarien siirtely voidaan toimittaa käyttäen hyväksi edellisessä tehtävässä opittua menettelyä.

Jos ympyrän kaari ajatellaan oikaistuksi, niin näin syntyneen janan pituutta sanotaan myös kaaren pituudeksi. Tämän ajattelutavan kautta voidaan verrata toisiinsa myös e r i s ä t e i s t e n kaarien pituuksia.

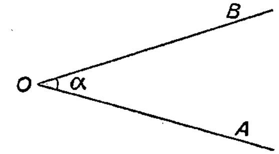
Harj.teht.: 16) On piirrettävä samasta ympyrän kehän pisteestä alkavia jänteitä. Kuinka jänteen pituus riippuu vastaavan kaaren pituudesta? Minkälaista kaarta vastaa suurin jänne?

17) Mitä tarkoitetaan samansäteisten kaarien summalla (vrt. janojen summan määritelmää (3 §))?

18) Merkittävä samalle ympyräviivalle kaksi toisistaan erillään olevaa kaarta a ja b ($a > b$). Sitten on piirrettävä kolme edellisen ympyrän kanssa samansäteistä ympyräviivaa sekä muodostettava yhdellä niistä $a + b$, toisella $a - b$ ja kolmannella $3 \cdot a$.

III. KULMA

8 §. Kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittamaa tason osaa sanotaan *kulmaksi*. Kuviossa 12



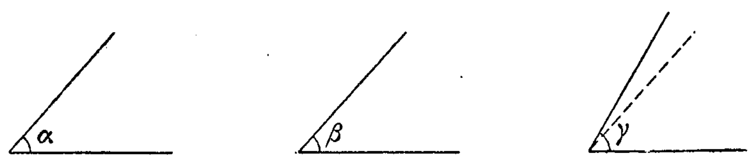
Kuv. 12.

esitetyn kulman rajoittavat eli niinkuin tavallisesti sanotaan, muodostavat puolisuorat *OA* ja *OB*. Koska puolisuorat jakavat tason kahteen kulmaan, niin on merkiksi siihen kulmaan, jota tarkoitetaan, piirretty *O* keskipisteenä pieni kaari. Piste *O* on nimeltään kulman *kärki* ja mainitut puolisuorat sen *kylkiä*, edellinen (kärjestä katsottuna) *oikea kylki* ja jälkimmäinen *vasen kylki*. »Kulma»-sanaa merkitään lyhyesti: $\wedge$. Kuviossa 12 on $\wedge AOB$. Tässä merkinnässä on huomattava kirjaimien järjestykseen nähden, että keskimmäiseksi aina otetaan kulman kärkeä merkitsevä kirjain. Jos ei ole syytä pelätä sekaannusta, niin merkitään puheena olevaa kulmaa lyhyesti: $\wedge O$. Kulmaa merkitään myös siihen kirjoitetun pienen, usein kreikkalaisen kirjaimen avulla: $\wedge \alpha$.

Kulman *AOB* voidaan ajatella syntyvän myös siten, että puolisuora kääntyy pisteen *O* ympäri asennosta *OA* asentoon *OB* siten, että se tulee »pyyhkineeksi» mainitun kulman. Tällöin voidaan sanoa puolisuoraa *OA* kulman *alkukyljeksi* ja *OB*:tä *loppukyljeksi*.

9 §. Kahta kulmaa verrataan suuruuden puolesta toisiinsa siirtämällä kulmat päällekkäin siten, että toiset kyljet yhtyvät. Jos tällöin toisetkin kyljet yhtyvät, kulmia sanotaan *yhtäsuuriksi*. Muussa tapauksessa sanotaan sitä kulmaa *pienemmäksi*, jonka toinen kylki joutuu toiseen kulmaan. Kuviossa 13 on kolme kulmaa, joista $\wedge \alpha = \wedge \beta$ ja $\wedge \alpha < \wedge \gamma$.

Kulmien summalla tarkoitetaan kulmaa, jonka yhteen-



Kuv. 13.

laskettavat kulmat yhdessä muodostavat, kun ne asetetaan välittömästi vierekkäin niin, että kärkipisteet yhtyvät. Kulmien vähentäminen samoinkuin niiden kertominen ja jakaminen luvulla määritellään samalla tavalla kuin laskennossa vastaavat laskutoimitukset lukujen suhteen ja niinkuin edellä jo olemme tehneet janoihin ja kaariin nähden.

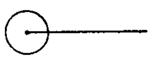
Puolisuoraa, joka jakaa kulman kahteen yhtäsuureen osaan, sanotaan kulman *puolittajaksi*.

Harj.teht.: 19) Piirrettävä viivattomalle paperille kauas toisistaan kaksi silmämäärin yhtäsuurta kulmaa ja tutkittava yhtäsuuruuden määritelmään nojautuen, ovatko ne todellakin yhtäsuuret (ks. alimuist. 1 siv. 3).

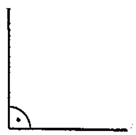
20) Piirrettävä kaksi kulmaa α ja β ($\alpha > \beta$) ja muodostettava sitten $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ja $3 \cdot \alpha$.

21) Piirrettävä läpinäkyvälle paperille mielivaltainen kulma ja määrättävä sitten sen puolittaja taittamalla paperi niin, että kyljet yhtyvät.

10 §. Jos kulman kyljet yhtyvät ja muodostavat siis vain yhden puolisuoran, niin kulmaa sanotaan *täydeksi kulmaksi* [1] (kuv. 14 a). Jos taas kyljet yhdessä muodostavat suoran, niin kulmaa sanotaan *oikokulmaksi* (kuv. 14 b). Oikokulman puolikas on nimeltään *suora kulma* (kuv. 14 c). Täysi kulma käsittää siis koko tason, oikokulma puolitason ja suorakulma neljännestason.

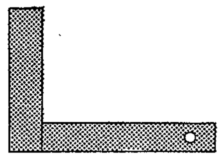

Kuv. 14 a.

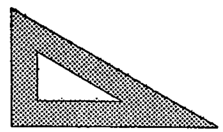

Kuv. 14 b.

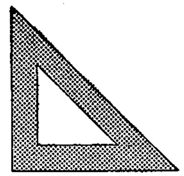

Kuv. 14 c.

Suoran kulman piirtämiseksi käytetään erikoisia välineitä, joista kuviossa 15 a esitetään kirvesmiehen ja puusepän käyttämä ja kuvioissa 15 b ja c piirtäjien käyttämät *kulmaviivoittimet*.

[1] Toisiinsa yhtyvien kylkien voidaan katsoa rajoittavan myös toisen kulman, johon ei kuulu muita pisteitä kuin itse kyljillä olevat. Tätä kulmaa voitaisiin sanoa *nollakulmaksi*.


Kuv. 15 a.

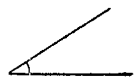

Kuv. 15 b.

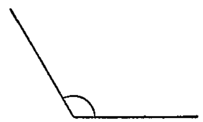

Kuv. 15 c.

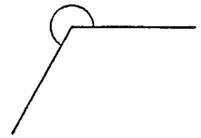
Kun kuviossa halutaan korostaa, että jokin kulma on suora, niin on tapana merkitä siihen piirretyn pienen kaaren sisäpuolelle piste (kuv. 14 c).

Kulmat jaetaan suuruuden puolesta kahteen luokkaan, oikokulma rajana:

1) *koverat kulmat*, jotka < oikokulma (kuv. 16 a, b ja 14 c),
2) *kuperat* » » > » (kuv. 16 c ja 14 a).


Kuv. 16 a.


Kuv. 16 b.


Kuv. 16 c.

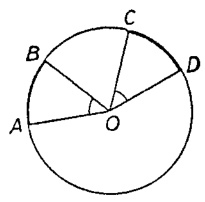
Koverat kulmat jaetaan edelleen kahteen luokkaan, suora kulma rajana:

1) *terävät kulmat*, jotka < suora kulma (kuv. 16 a),
2) *tylpät* » » > » » (kuv. 16 b).

Terävistä ja tylpistä kulmista käytetään yhteistä nimitystä *vino kulma*.

11 §. Kulmaa, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä, sanotaan ympyrän *keskuskulmaksi*. Sitä kaarta, joka ympyrän kehästä jää keskuskulmaan, sanotaan *keskuskulmaa vastaavaksi kaareksi*, ja kääntäen.

Kuviossa 17 on ympyrään piirretty kaksi keskuskulmaa AOB ja COD, joita vastaavat kaaret ovat AB ja CD. Jos kaaret ovat yhtäsuuret, niin keskuskulmatkin ovat yhtäsuuret, sillä voidaanhan tällöin sektoria COD kier-



Kuv. 17.

tää keskipisteen ympäri niin, että kaari *CD* yhtyy kaareen *AB*, jolloin myös keskuskulmat yhtyvät ja ovat siis yhtäsuuret. Jos kääntäen oletetaan, että keskuskulmat ovat yhtäsuuret, niin voidaan vastaavalla tavalla päättää, että kaaretkin ovat yhtäsuuret. Koska samaan tulokseen ilmeisesti tullaan siinäkin tapauksessa, että keskuskulmat ja kaaret ovat eri ympyröissä, kunhan ne vain ovat samansäteisiä, niin voidaan kirjoittaa

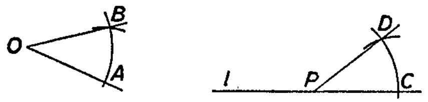
Lause: *Samassa ympyrässä ja samansäteisissä ympyröissä vastaavat yhtäsuuria kaaria yhtäsuuret keskuskulmat, ja kääntäen: yhtäsuuria keskuskulmia vastaavat yhtäsuuret kaaret.*

Tämän lauseen edelliseen osaan nojautuen voidaan ratkaista harppia ja viivoitinta käyttäen

Teht.: *Suoran* (*l*, kuv. 18) *viereen on sillä olevaan pisteeseen* (*P*) *piirrettävä annetun kulman* (*O*) *suuruinen kulma.*

Tehtävän sanonta tarkoittaa, että on piirrettävä kulman *O* suuruinen kulma, jonka kärki on pisteessä *P* ja toinen kylki suoralla *l*.

Ratk.: Piirretään *O* ja *P* keskipisteinä samansäteiset ympyräviivat. Edellinen »leikatkoon» kulman *O* kylkiä pisteissä *A* ja *B* ja jälkimmäinen suoraa *l* pisteessä *C*. Erotetaan sitten *C*:stä lähtien kaaren *AB* pituinen kaari *CD* (7 §, teht.). Silloin edellisen lauseen mukaan $\wedge CPD = \wedge AOB$, joten $\wedge CPD$ on vaadittu kulma.



Kuv. 18.

Tark.: ?

Kun kulmia yhteenlaskettaessa ja vähennettäessä samoin kuin niitä kokonaisluvulla kerrottaessa joudutaan

asettamaan kulmia vierekkäin, niin silloin voidaan käyttää hyväksi edellisessä tehtävässä esitettyä **keinoa.**

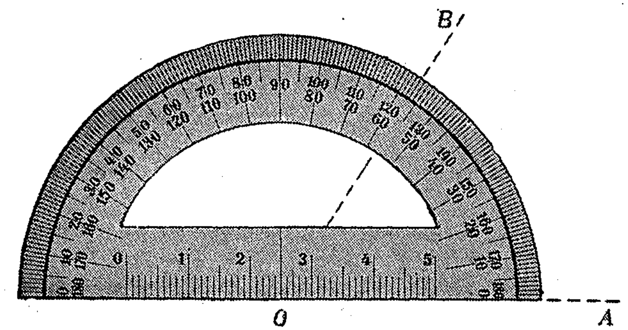
Harj.teht.: 22) Harj.teht. 20 on ratkaistava käyttämällä apuna harppia kulmia vierekkäin aseteltaessa.

12 §. Jos ympyrän kehä jaetaan 360:een yhtäsuureen osaan, niin myös vastaavat keskuskulmat ovat yhtäsuuret (ed. §, lause) ja siis täyden kulman 360:s osia. Tällaista pientä kaarta ja kulmaa sanotaan kumpaakin *asteeksi* (°). Sitä käytetään vastaavasti kaarien ja kulmien mittana. Edellisestä seuraa, että tällöin *kulman asteluku = vastaavan kaaren asteluku.* Esim. kuviossa 17 esiintyvät keskuskulmat ja vastaavat kaaret ovat 45°. On syytä panna muistiin, että

a) täysi kulma ja ympyrän kehä = 360°,
b) oikokulma ja puoliympyrän kaari = 180°,
c) suora kulma ja neljännesympyrän kaari = 90°.

Kuviossa 15 b esitetyssä kulmaviivoittimessa ovat terävät kulmat 30° ja 60° ja kuviossa 15 c esitetyssä ovat molemmat terävät kulmat 45°.

Tarkoissa mittauksissa käytetään myös pienempiä kulman ja kaaren mittayksiköitä, nimittäin *minuutti* (′), joka = $^1/_{60}$ astetta ja *sekunti* (″), joka = $^1/_{60}$ minuuttia. Käsityksen siitä, kuinka pieniä puheena olevat kulman



Kuv. 19.

mittayksiköt ovat, saamme, kun huomautamme, että esim. 1 cm pituista kaarta vastaava keskuskulma on

a) 1°, jos säde = noin 60 cm,
b) 1′, » » = » 30 m,
c) 1″, » » = » 2 km.

Kulmien samoin kuin kaarien asteluku mitataan käyttämällä *astelevyä,* joka ja jonka käyttö esitetään kuviossa 19. Kuten nähdään, mitattava kulma $AOB = 57°$.

Kahta kulmaa (kaarta) sanotaan toistensa

a) *eksplementtikulmiksi(-kaariksi),* jos niiden summa = 360°,
b) *supplementti-* » » » » » = 180°,
c) *komplementti-* » » » » » = 90°.

Harj.teht.: 23) Paperipala on niin taitettava, että syntyy a) oikokulma, b) suora kulma, c) 45° kulma.

24) Montako astetta on kulma (kaari), joka on täydestä kulmasta (ympyrän kehästä) a) $^1/_2$, b) $^1/_3$, c) $^1/_4$, d) $^1/_5$, e) $^5/_{12}$?

25) Mikä osa täydestä kulmasta (ympyrän kehästä) on kulma (kaari) joka on a) 30°, b) 45°, c) 60°, d) 135°, e) 200°?

26) Kuinka suuret ovat pohjoisen ja muiden pääilmansuuntien väliset kulmat?

27) Kuinka suuren koveran kulman muodostavat kellon osoittimet, kun kello on a) 1, b) 4.30, c) 6.15?

28) Piirrettävä kaksi erisäteistä, samaa keskuskulmaa vastaavaa kaarta. Mitä voidaan sanoa kaarien a) asteluvuista, b) pituuksista toisiinsa verrattuina?

29) Minkä rajojen välillä on a) terävän, b) tylpän, c) koveran, d) kuperan kulman asteluku?

30) Muutettava sekunneiksi 57° 15′ 47″.

31) Muutettava suuremmiksi laaduiksi 100 000″.

32) Kuinka suuren kulman kellon minuuttiosoitin kääntyy a) minuutissa, b) sekunnissa, c) 35 minuutissa?

33) Piirrettävä umpimähkään terävä, tylppä ja kupera kulma ja mitattava sitten astelevyllä niiden asteluvut.

34) Astelevyä käyttäen on piirrettävä kulmat, joiden asteluvut ovat: 25°, 45°, 72°, 90°, 138°, 241°, 326°.

35) Piirrettävä jokin tylppä kulma ja jaettava sitten se astelevyä apuna käyttäen a) kahteen, b) kolmeen yhtäsuureen osaan.

36) Harj.teht. 20 on ratkaistava mittaamalla ensin kulmien α ja β asteluvut ja laskemalla kulmien $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ja $3 \cdot \alpha$ asteluvut ja piirtämällä sitten vastaavat kulmat.

37) Kuinka suuret ovat seuraavien kulmien (kaarien) komplementti-, supplementti- ja eksplementtikulmat (-kaaret): a) 30°, b) 45°, c) 56° 37′, d) 78° 09′ 16″, e) α°?

38) Piirrettävä ensin umpimähkään terävä, suora ja tylppä kulma ja sitten mahdollisuuksien mukaan niiden komplementti-, supplementti- ja eksplementtikulmat.

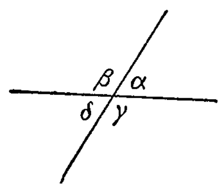
39) Minkä nimisillä kulmilla on olemassa a) komplementti-, b) supplementti-, c) eksplementtikulma?

40) Minkä nimisiä ovat toistensa suhteen kahden a) supplementtikulman, b) eksplementtikulman puoliskot?

41) Minkä kulman a) komplementti-, b) supplementti-, c) eksplementtikulma on yhtäsuuri kuin kulma itse?

IV. LEIKKAAVAT SUORAT — NORMAALIT

13 §. Jos kahdella suoralla on yksi yhteinen piste, niin suorat *leikkaavat* toisiaan ko. pisteessä. Tällöin muodostuu neljä koveraa kulmaa, joista vierekkäin olevia sanotaan toistensa *vieruskulmiksi* ja vastakkain olevia toistensa *ristikulmiksi.* Kuviossa 20 ovat esim. β ja γ ristikulmia. Kumpikin niistä on kulman α vieruskulma ja $= 180° - \alpha$. Siis voidaan kirjoittaa



Kuv. 20.

Lause: *Ristikulmat ovat yhtäsuuret.*

Harj.teht.: 42) Piirrettävä jokin kovera kulma ja sitten toinen sen kahdesta vieruskulmasta.

43) Millainen on a) terävän, b) tylpän kulman vieruskulma?

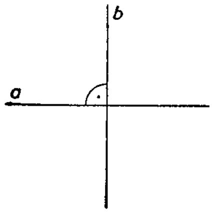
44) Vieruskulmat ovat aina supplementtikulmia, mutta supplementtikulmat eivät aina ole vieruskulmia. Piirrettävä kaksi kulmaa, jotka ovat supplementtikulmia, mutta eivät vieruskulmia.

45) Kuinka suuria ovat a) 30°, b) 138° 52′ 02″ kulman vieruskulmat ja ristikulma?

46) Mikä kulma on a) vieruskulmansa suuruinen, b) puolet vieruskulmastaan?

47) Kuinka suuria ovat suoran kulman a) vieruskulmat, b) ristikulma?

14 §. Jos kahden toisiaan leikkaavan suoran a ja b muodostamista kulmista yksikin on suora, niin ne kaikki ovat suoria kulmia (kuv. 21). Suorien a ja b sanotaan

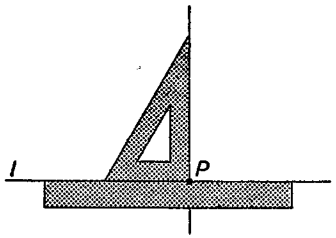


Kuv. 21.

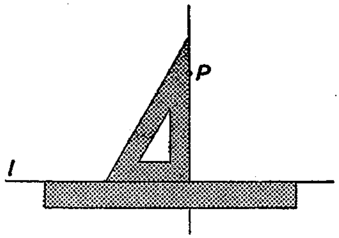
tällöin olevan *kohtisuorassa* toisiaan vastaan. Myös sanotaan niitä toistensa *normaaleiksi*. Käytetään merkintää: $a \perp b$.
Jos taas yksikin ko. kulmista on vino, niin ne kaikki ovat vinoja. Suorien a ja b sanotaan silloin olevan *vinossa* toisiaan vastaan (kuv. 20).

Teht.: *Suoralla* (l) *tai sen ulkopuolella olevan pisteen* (P) *kautta on piirrettävä suoran normaali.*

Ratk.: Tehtävä ratkaistaan mukavimmin viivoittimen ja kulmaviivoittimen avulla seuraavasti (kuv. 22 a ja b). Asetetaan ensin viivoittimen reuna suoraa l pitkin ja annetaan sitten kulmaviivoittimen suoran kulman toisen kyljen liukua viivoittimen reunaa pitkin, kunnes suoran kulman kärki (kuv. 22 a) tai sen toinen kylki (kuv. 22 b) kohtaa pisteen P, minkä jälkeen tätä kylkeä viivoittimena käyttäen piirretään suora, joka silloin on vaadittu normaali.



Kuv. 22 a.

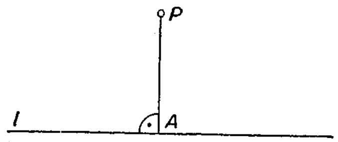


Kuv. 22 b.

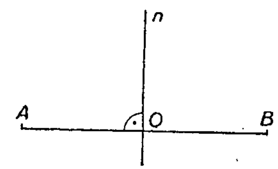
Edellisen tehtävän ratkaisutavasta selviää välittömästi:

Lause: *Suoralla tai sen ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää vain yksi suoran normaali.*

Suoran l ulkopuolella olevasta pisteestä P suoralle piirretyllä normaalilla tarkoitetaan usein myös sitä janaa PA, joka varsinaisesta normaalista jää pisteen P ja suoran l väliin (kuv. 23). A on nimeltään normaalin *kantapiste*. Pisteen P *etäisyydellä* suorasta l samoinkuin suoran l



Kuv. 23.



Kuv. 24.

etäisyydellä pisteestä P tarkoitetaan normaalin PA pituutta. Sitä sanotaan myös pisteen P ja suoran l *väliksi*.

Janan (AB, kuv. 24) *keskipisteen* (O) kautta piirrettyä janan normaalia (n) sanotaan janan *keskinormaaliksi*.

Harj.teht.: 48) Piirrettävä 46 mm pituinen jana ja sitten kulmaviivoittimen avulla sen keskinormaali.

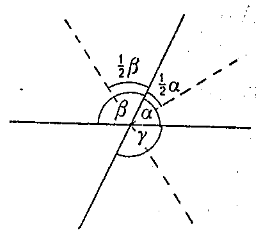
49) Piirrettävä suora ja sen ulkopuolelle jokin piste. Mitattava sitten pisteen etäisyys suorasta. *Ohje:* Piirretään ensin pisteestä normaali.

50) Ympyrän kehä on jaettava neljään yhtäsuureen osaan. *Ohje:* Piirretään kaksi kohtisuoraa halkaisijaa.

51) Jos ei rajoituta samaan tasoon, niinkuin 4 §:n lopussa tehdyn sopimuksen mukaan yllä olemme edellyttäneet, vaan tarkastellaan kaikkia avaruuden suoria, niin montako normaalia silloin voidaan asettaa suoralla olevan pisteen kautta?

15 §. Koska toistensa vieruskulmien α ja β (kuv. 25) summa $= 180°$, niin niiden puoliskojen $\frac{1}{2}\alpha$ ja $\frac{1}{2}\beta$ summa $= 90°$. Siis voidaan kirjoittaa

Lause 1: *Vieruskulmien puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.*



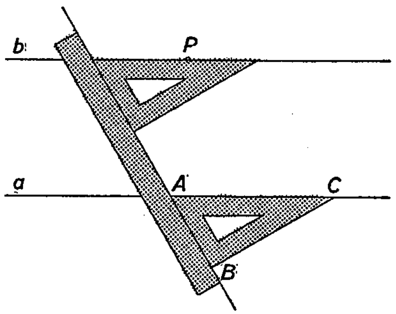
Kuv. 25.

Koska siis tämän lauseen mukaan ristikulmien β ja γ (kuv. 25) puolittajat ovat kohtisuorassa yhteisen vieruskulmansa α puolittajaa vastaan, niin ne muodostavat yhdessä suoran viivan. Näin havaitaan oikeaksi

Lause 2: *Ristikulmien puolittajat muodostavat yhdessä suoran viivan.*

V. YHDENSUUNTAISET SUORAT

16 §. Kahta (samassa tasossa olevaa) suoraa sanotaan *yhdensuuntaisiksi*, jos niillä ei ole yhteistä pistettä. Suorien a ja b yhdensuuntaisuutta merkitään: $a \parallel b$ (»a yhdensuuntainen b:n kanssa»).



Kuv. 26.

Jos kulmaviivoittimen ABC (kuv. 26) sivun AB annetaan liukua pitkin toisen viivoittimen reunaa, esim. ylöspäin, niin käsityksemme mukaan myös suora AC liikkuu ylöspäin, joten sen eri asennot eivät voi leikata toisiaan ja ovat siis yhdensuuntaisia.

Teht.: *Suoran* (a) *ulkopuolella olevan pisteen* (P) *kautta on piirrettävä tämän suoran suuntainen suora.*

Ratk.: Sen mukaan mitä juuri selitettiin, tämä tehtävä voidaan ratkaista yksinkertaisesti seuraavasti (kuv. 26). Asetetaan ensin kulmaviivoittimen jokin sivu, esim. AC, pitkin suoraa a ja painetaan sitten tavallisen viivoittimen reuna kiinni kulmaviivoittimen jompaankumpaan toiseen sivuun, esim. AB:hen. Sen jälkeen annetaan kulmaviivoittimen tämän sivun liukua pitkin toisen viivoittimen reunaa, kunnes sivu AC kohtaa pisteen P (edellytetään, että sivu AC on tarpeeksi pitkä). Kun sitten tätä sivua viivoittimena käyttäen piirretään suora b, niin se onkin vaadittu yhdensuuntainen.

Jos kuviossa 26 piirretään P:n kautta jokin suora, joka poikkeaa b:stä kuinka vähän tahansa, niin käsityksemme mukaan se leikkaa a:ta, kun suoria ajatellaan tarpeeksi pitkälle piirretyksi. Siis voidaan kirjoittaa:

Lause: *Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää vain yksi tämän suoran suuntainen suora.*

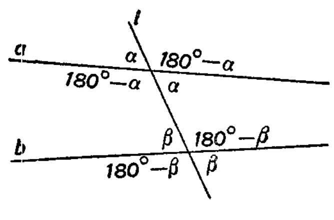
Tästä voidaan päättää oikeaksi alla olevat *seurauslauseet*, jotka ovat suoraan havaintommekin mukaan oikeita: [1]

Seur. 1: *Jos suora leikkaa toisen kahdesta yhdensuuntaisesta, niin se leikkaa toisenkin.*

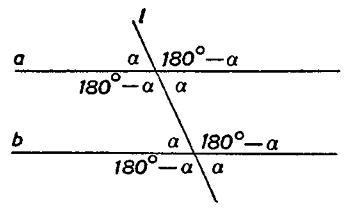
Seur. 2: *Jos kaksi suoraa ovat kolmannen suuntaiset, niin ne ovat keskenäänkin yhdensuuntaiset.*

Harj.teht.: 52) Jos emme rajoitu saman tason suoriin, kuten edellä, niin voidaanko silloinkin sanoa kahta suoraa yhdensuuntaisiksi, jos niillä ei ole yhteistä pistettä, ja ovatko seur. 1 ja 2 edelleenkin voimassa?

17 §. Jos suora l leikkaa kahta muuta suoraa a ja b, niin kumpaisenkin leikkauspisteen ympärille syntyy neljän koveran kulman muodostama ryhmä (kuv. 27). Kahta eri ryhmään kuuluvaa kulmaa sanotaan
a) *samankohtaisiksi*, jos l on niillä samannimisenä[2] kylkenä,
b) *erikohtaisiksi*, » » » » erinimisenä » .
Ottamalla huomioon, että ristikulmat ovat yhtäsuuria ja vieruskulmat supplementtikulmia (13 §), muodostuneita kulmia voidaan merkitä kuviossa 27 esitetyllä tavalla. Suora l on kulmilla α ja β oikeana kylkenä ja muilla kulmilla vasempana. Siis esim. kumpikin kulmista α on samankohtainen kummankin kulman β kanssa ja erikohtainen kummankin kulman $180° - \beta$ kanssa.



Kuv. 27.



Kuv. 28.

[1] Ensi lukemisessa ei pidä vaatia oppilailta näiden todistuksia. Ks. harj. teht. 260.

[2] Kahden kulman vasempia kylkiä sanotaan *samannimisiksi* ja samoin oikeita.

Jos kaksi samankohtaista kulmaa on yhtäsuurta, niin kaikki samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuria ja kaikki erikohtaiset kulmat supplementtikulmia. Tällöin on näet $\alpha = \beta$ ja kysymyksessä on siis kuviossa 28 esitetty tapaus. Edelleen on $a \parallel b$, sillä voidaanhan ajatella nämä suorat piirretyiksi edellisessä §:ssä esitetyllä tavalla kulmaviivoittimella, jonka yksi kulma $= \alpha$. Siis saadaan

Lause 1: *Jos suora leikkaa kahta suoraa siten, että kaksi samankohtaista kulmaa on yhtäsuurta, niin mainitut kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset.*

Seur. 1: *Suoran normaalit ovat yhdensuuntaisia.*

Samalla tavalla kuin lause 1 voidaan päätellä oikeaksi sen ns. käänteislause:

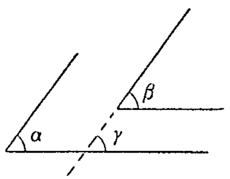
Lause 2: *Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret (ja siis erikohtaiset kulmat supplementtikulmia).*

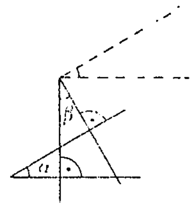
Seur. 2: *Jos suora on kohtisuorassa toista vastaan kahdesta yhdensuuntaisesta, niin se on kohtisuorassa toistakin vastaan.*

18 §. Ed. §:n lauseen 2 avulla voidaan päätellä oikeaksi seuraava lause, joka havaintomme mukaan on suoraankin selvä:

Lause 1: *Jos kahden koveran kulman* (α ja β, kuv. 29) *samannimiset kyljet ovat yhdensuuntaiset, niin kulmat ovat yhtäsuuret.*

Ovathan näet mainitun lauseen mukaan kulmat α ja β kulman γ suuruisia ja siis keskenäänkin yhtäsuuria. Tästä lauseesta taas johdetaan


Kuv. 29.


Kuva 30.

Lause 2: *Jos kahden koveran kulman* (α ja β, kuv. 30) *samannimiset kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin kulmat ovat yhtäsuuret.*

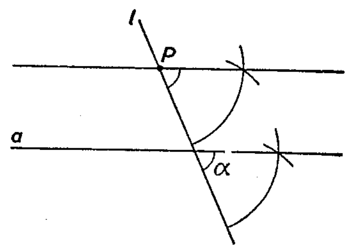
Jos näet kulmaa β kierretään kärkensä ympäri 90°, niin sen kyljet tulevat yhdensuuntaisiksi kulman α samannimisten kylkien kanssa, joten lauseen 1 mukaan kulmat ovat tosiaankin yhtäsuuret.

Harj.teht.: 53) Mitä voidaan sanoa kahdesta koverasta kulmasta, joiden erinimiset kyljet ovat a) yhdensuuntaiset, b) kohtisuorassa toisiaan vastaan?

19 §. 17 §:n lauseeseen 1 nojautuen voidaan harpin ja viivoittimen avulla ratkaista seuraava piirtämistehtävä, jonka 16 §:ssä jo ratkaisimme käyttämällä harpin asemesta kulmaviivoitinta:

Teht. 1: *Suoran* (a, kuv. 31) *ulkopuolella olevan pisteen* (P) *kautta on piirrettävä tämän suoran suuntainen suora.*

Ratk.: Piirretään pisteen P kautta mielivaltainen a:ta leikkaava suora l. Yhtä näiden suorien muodostamista kulmista merkitään α:lla. Sitten piirretään l:n viereen pisteeseen P α:n suuruinen kulma (11 §, teht.) siten, että l tulee sille ja α:lle samannimiseksi kyljeksi. Tämän kulman toinen kylki (täydeksi suoraksi jatkettuna) on silloin vaadittu suora (17 §, lause 1).


Kuv. 31.

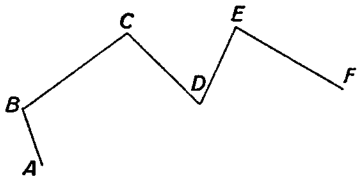
Teht. 2: *Suoran* (a) *ulkopuolella olevan pisteen* (P) *kautta on piirrettävä suora, joka muodostaa mainitun suoran* (a) *kanssa tunnetun kulman* (α) *suuruisen kulman.*

Ratk.: Piirretään ensin suoran a viereen mielivaltaiseen pisteeseen α:n suuruinen kulma. Sitten piirretään P:n kautta tämän kulman toisen kyljen suuntainen suora. Se on silloin vaadittu suora (17 §, lause 2).

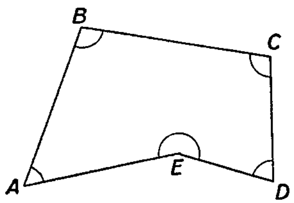
Tark.:?

VI. MONIKULMIOT JA NIIDEN KULMIEN SUMMA

20 §. Kuv. 32 a esittää *avonaista* ja kuv. 32 b *umpinaista murtoviivaa.* Viimeksi mainitun rajoittamaa tason osaa sanotaan *monikulmioksi* ja itse murtoviivaa monikulmion *piiriksi.* Janat AB, BC, ... ovat monikulmion (murtoviivan) *sivuja*, pisteet A, B, ... sen *kärkiä* ja $\wedge A$, $\wedge B$, ... sen *kulmia.* Monikulmion kulma avautuu monikulmion sisälle päin. Monikulmion *lävistäjäksi* sanotaan kahden sellaisen kärjen yhdistysjanaa, jotka eivät ole vierekkäin.



Kuv. 32 a.



Kuv. 32 b.

Monikulmiossa on aina yhtä monta kärkeä kuin sivua. Niiden luvun mukaan puhutaan *kolmikulmioista* eli *kolmioista, nelikulmioista, viisikulmioista* jne. Esim. kuv. 32 b esittää viisikulmiota $ABCDE$ ja kuviossa 33 esiintyy $\triangle ABC$ ($\triangle$ on »kolmio»-sanan merkki).

Nelikulmiota, jonka molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhdensuuntaiset, sanotaan *suunnikkaaksi* (kuva 43). Sen vastakkaiset sivut ovat ilmeisesti yhtäsuuret. Jos vain toiset vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, nelikulmiota sanotaan *puolisuunnikkaaksi* (kuv. 95 d). Suunnikas on erikoisesti *suorakulmio*, jos sen kaikki kulmat ovat suoria (kuv. 95 a).

Monikulmiota, jonka kaikki kulmat ovat koveria, sanotaan *kuperaksi.* Jos sen sivut keskenään ja kulmat keskenään ovat yhtäsuuret, monikulmiota sanotaan *säännölliseksi* (kuv. 63). Sillä on keskipiste, joka on yhtä kaukana kärjistä samoin kuin sivuista. Jos monikulmion kaikki kärjet ovat samalla ympyräviivalla, monikulmiota sanotaan *ympyrän sisään piirretyksi* (kuv. 78 ja 125).

Harj.teht.: 54) Piirrettävä kupera neli-, viisi-, kuusi- ja seitsenkulmio ja kuhunkin niistä kaikki lävistäjät. Montako niitä kussakin on? Montako lävistäjää voidaan piirtää yleensä kuperaan n-kulmioon?

55) Piirrettävä sellaiset neli-, kuusi- ja kahdeksankulmiot, joiden vierekkäiset sivut ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

56) Piirrettävä sellainen a) neli-, b) viisi-, c) kuusikulmio, jossa on mahdollisimman monta kuperaa kulmaa. Montako niitä kussakin on? Montako kuperaa kulmaa voi enintään olla n-kulmiossa?

57) Piirrettävä jokin a) suunnikas, b) puolisuunnikas, jonka yksi kulma $= 52°$.

58) Piirrettävä ympyrään säteen pituisia jänteitä peräkkäin, jolloin syntyy ympyrän sisään piirretty säännöllinen 6-kulmio.

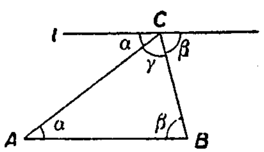
59) Piirrettävä kaksi kolmiota, joista toisen kaikki kulmat ovat teräviä ja toisen yksi kulma tylppä, ja mitattava astelevyllä niiden kulmat sekä laskettava sitten kummankin kolmion kulmien summan suuruus. Mikä sääntö näyttää vallitsevan?

21 §. Harj.tehtävän 59 tulos viittaa lauseeseen:

Lause: *Kolmion kulmien summa* $= 180°$.

Emme voi olla kuitenkaan varmoja tämän lauseen täsmällisestä paikkansapitävyydestä ennenkuin t o d i s t a m m e sen. Voihan näet ajatella, että kulmien summa poikkeaa niin vähän 180°:sta, että mittausvirheet ovat suurempia kuin tämä poikkeus, joten sitä mittaamalla ei voida havaita. Todistus suoritetaan seuraavasti.

Piirretään $\triangle ABC$:n (kuv. 33) kärjen C kautta sivun AB suuntainen suora l. Silloin ovat kuviossa α:lla merkityt kulmat yhtäsuuret ja samoin β:lla merkityt (17 §, lause 2). Piste C on kolmen kulman α, β ja γ kärkenä, ja nämä kulmat muodostavat yhdessä oikokulman, joten



Kuv. 33.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Mutta vasemmalla puolella oleva summa on myös kolmion kulmien summa, ja niin onkin lauseemme todistettu.

Edellisestä lauseesta seuraa välittömästi alla olevat neljä seurauslausetta.

Seur. 1.: *Kolmion kahden kulman summa = kolmannen kulman vieruskulma.*

Edellisen tuloksen mukaan on näet $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, joka taas = kolmion α-kulman vieruskulma.

Seur. 2: *Kolmion kulma on pienempi kuin molempien muiden kulmien vieruskulmat.*

Seur. 3: *Kolmion kulmista voi vain yksi olla suora tai tylppä.*

Viimeksi mainitun perusteella voidaan jakaa kolmiot seuraaviin luokkiin:

a) *teräväkulmaiset kolmiot,* joiden kaikki kulmat ovat teräviä,
b) *suorakulmaiset* » » yksi kulma on suora,
c) *tylppäkulmaiset* » » » » » tylppä.

Suorakulmaisessa kolmiossa sanotaan suoran kulman viereisiä sivuja *kateeteiksi* ja vastaista sivua *hypotenuusaksi.*

Seur. 4: *Suorakulmaisen kolmion terävät kulmat ovat toistensa komplementtikulmia.*

Harj.teht.: 60) Laskettava kolmion kolmannen kulman suuruus, jos kaksi muuta kulmaa ovat a) 37° ja 85°, b) 43° 28′ ja 112° 36′, c) 68° 07′ 47″ ja 13° 24′ 55″, d) α ja β.

61) Kuinka suuret ovat säännöllisen kolmion kulmat?

62) Piirrettävä umpimähkään kaksi terävää kulmaa. Piirrettävä sitten a) astelevyä käyttäen, b) harppia käyttäen (ks. 11 §:n teht.) kulma, jonka suuruinen sen kolmion kolmas kulma on, jonka kaksi muuta kulmaa ovat ensin mainittujen kulmien suuruiset.

63) Piirrettävä mielivaltainen kolmio ja sen kunkin kulman toinen vieruskulma. Mitattava sitten vieruskulmien suuruudet ja laskettava niiden summa. Mikä sääntö on ilmeisesti voimassa? Todistettava se.

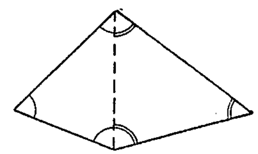
64) Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on a) 54° 08′ 35″, b) α. Kuinka suuri on toinen terävä kulma?

65) Todistettava, että jokaisen suorakulmaisen kolmion terävien kulmien toisten vieruskulmien summa = 270°.

66) Piirrettävä mielivaltainen suorakulmainen kolmio ja puolitettava astelevyä käyttäen sen terävät kulmat sekä mitattava puolittajien välisen terävän kulman suuruus. Sitten on l a s k e t t a v a (siis mittaamatta) mainitun kulman suuruus, jos toinen kolmion terävistä kulmista on a) 34°, b) α°. Mikä lause siis on voimassa?

67) Piirrettävä kaksi nelikulmiota, joista toinen on kupera ja toinen ei. Mitattava sitten astelevyllä niiden kulmat ja laskettava kummankin nelikulmion kulmien summa. Mikä sääntö näyttää vallitsevan?

22 §. Kuviossa 34 on nelikulmio jaettu lävistäjällä kahteen kolmioon. Nelikulmion kulmien summa = näiden kolmioiden kulmien summien summa ja siis $= 2 \cdot 180° = 360°$. Koska viisikulmio voidaan kahdella lävistäjällä jakaa kolmeen kolmioon, niin voidaan samalla tavalla päättää, että viisikulmion kulmien summa $= 3 \cdot 180° = 540°$. Näin edelleen jatkamalla johdutaan yleiseen lauseeseen:



Kuv. 34.

Lause: *n-kulmion kulmien summa* $= (n - 2) \cdot 180°$.

Harj.teht.: 68) Kuinka suuri on 10-kulmion kulmien summa?

69) Kuinka suuri on säännöllisen a) neli-, b) viisi-, c) kuusi-, d) n-kulmion jokainen kulma?

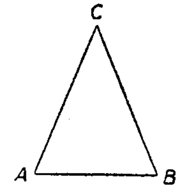
70) Piirrettävä (mm-mittaa ja kulmaviivoitinta käyttäen) säännöllinen nelikulmio, jonka sivu = 48 mm. Mitä nimitystä säännöllisestä nelikulmiosta tavallisesti käytetään?

71) Piirrettävä nelikulmio, joka ei ole säännöllinen, mutta jonka a) kulmat, b) sivut ovat yhtäsuuret.

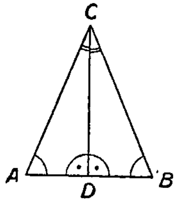
VII. TASAKYLKINEN KOLMIO KONSTRUOINTI HARPILLA JA VIIVOITTIMELLA

23 §. Kolmiota sanotaan *tasakylkiseksi,* jos siinä on ainakin kaksi yhtäsuurta sivua ja *tasasivuiseksi,* jos kaikki sivut ovat yhtäsuuret. Kuvio 35 esittää tasakylkistä kolmiota, jossa sivut AC ja BC ovat yhtäsuuret. Käytetään seuraavia nimityksiä:

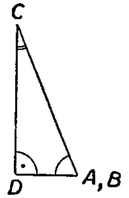
sivut AC ja BC ovat kolmion *kyljet,*
sivu AB on » *kanta,*
$\wedge A$ ja $\wedge B$ ovat » *kantakulmat,*
piste C on » *huippu,*
$\wedge C$ » » *huippukulma.*



Kuv. 35.



Kuv. 36 a.



Kuv. 36 b.

Ajatellaan tasakylkinen kolmio ABC (kuv. 36 a) taitetuksi kaksinkerroin siten, että kyljet AC ja BC yhtyvät (kuv. 36 b).[1] Jos CD on se jana, jota myöten taittaminen tällöin tapahtuu, niin $\triangle ADC$ yhtyy $\triangle BDC$:hen (kuv. 36 b). Tästä voidaan päättää:

1) $\wedge A = \wedge B$,
2) $\wedge ACD = \wedge BCD$,
3) $\wedge ADC = \wedge BDC$ ja siis $= 90°$, joten $CD \perp AB$.

Koska lisäksi $AD = BD$, niin suora CD on kannan AB keskinormaali.

Näin on havaittu oikeaksi

Lause 1: *Tasakylkisessä kolmiossa*

a) *kantakulmat ovat yhtäsuuret,*

b) *kannan keskinormaali kulkee huipun kautta ja puolittaa huippukulman.*

Seur. 1: *Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat* 60°.

Seur. 2: *Jokainen piste, joka on yhtä kaukana janan päätepisteistä, on janan keskinormaalilla.*

Harj.teht.: 72) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat a) 77°, b) $\alpha°$. Kuinka suuri on huippukulma?

73) Tasakylkisen kolmion huippukulma on a) 103° 24′ 52″, b) α. Kuinka suuret ovat kantakulmat?

74) Piirrettävä suorakulmainen tasakylkinen kolmio. Kuinka suuret ovat sen kantakulmat?

75) Tasasivuinen kolmio jaetaan sivun keskinormaalilla kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Kuinka suuret ovat näiden kolmioiden terävät kulmat? Kuinka suuria ovat niiden pienemmät kateetit hypotenuusaan verrattuina?

76) Todistettava, että tasakylkisen kolmion kantakulma on puolet huippukulman vieruskulmasta (lause 1 a ja 21 §:n seur. 1).

77) Todistettava, että tasakylkisen kolmion huippukulman vieruskulman puolittaja on kannan suuntainen (ed. harj.teht. ja 17 §:n lause 1).

---

[1] On piirrettävä paperille tasakylkinen kolmio ja leikattava se irti sekä todellakin suoritettava puheena oleva taittaminen.

24 §. Edellä olemme jo ratkaisseet muutamia tärkeitä *piirtämis-* eli *konstruktiotehtäviä* käyttämällä apuna kynän lisäksi vain harppia ja viivoitinta (ks. **6, 7, 11** ja **19 §**). Nyt ratkaisemme tällä tavalla ed. §:n tuloksiin nojautuen lisää eräitä perustehtäviä. Yleensä on tästä lähtien piirtämistehtävät ratkaistava harpin ja viivoittimen avulla, ellei toisin mainita.[1]

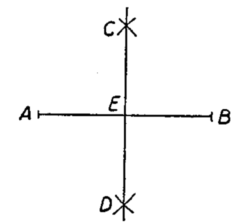
Harpin ja viivoittimen avulla konstruktiotehtäviä ratkaistaessa on huomattava, että

1) *viivoittimella voidaan piirtää suora, kun tunnetaan sen kaksi pistettä,*

2) *harpilla voidaan piirtää ympyrä, kun tunnetaan sen keskipiste ja lisäksi joko säteen suuruus tai jokin piste, jonka kautta ympyrä kulkee* (jälkimmäisessä tapauksessa tunnetaan itse asiassa sädekin, joka on keskipisteen ja mainitun toisen pisteen välinen jana).

25 §. Teht. 1: *Piirrettävä janan* (AB, kuv. 37) *keskinormaali.*

Ratk.: Piirretään A ja B keskipisteinä samansäteiset, toisiaan leikkaavat ympyräviivat. Niiden leikkauspisteet C ja D ovat silloin janan AB keskinormaalilla (23 §, seur. 2), joten suora CD on vaadittu keskinormaali.



Kuv. 37.

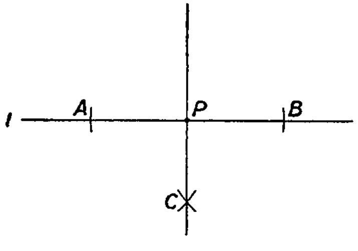
Koska janan AB keskinormaali kulkee janan keskipisteen E kautta, niin edellisen tehtävän ratkaisun kautta on tullut ratkaistuksi myös

Teht. 2: *Jana* (AB, kuv. 37) *on puolitettava eli jaettava kahtia.*

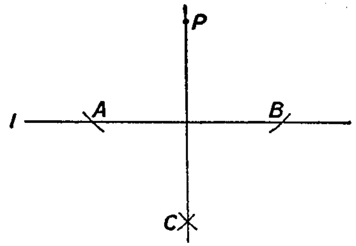
26 §. Teht.: *Piirrettävä suoran* (l, kuv. 38) *normaali, joka kulkee määrätyn pisteen* (P) *kautta.* Piste P voi olla joko suoralla l (kuv. 38 a) tai sen ulkopuolella (kuv. 38 b).

---

[1] Sitten kun on opittu varmasti suorittamaan kohtisuorien ja yhdensuuntaisten piirtämiset harpilla ja viivoittimella, voidaan käyttää jälleen apuna kulmaviivoitinta.



Kuv. 38 a.



Kuv. 38 b.

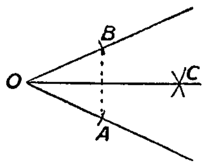
Ratk.: Piirretään P keskipisteenä jokin ympyräviiva, joka leikatkoon suoraa l pisteissä A ja B. Nämä pisteet keskipisteinä piirretään samansäteiset ympyräviivat, joiden toinen leikkauspiste olkoon C. Pisteet P ja C ovat janan AB keskinormaalilla (23 §, seur. 2), joten suora PC on tämä keskinormaali ja siis suoran l normaali.

Harj.teht.: 78) Piirrettävä suora kulma.

79) Määrättävä jokin piste, jonka etäisyys annetusta suorasta on määrätyn janan suuruinen.

27 §. Teht.: *Kulma* (O, kuv. 39) *on puolitettava.*

Ratk.: Piirretään O keskipisteenä ympyräviiva, joka leikatkoon kulman kylkiä pisteissä A ja B. Nämä keskipisteinä piirretään samansäteiset ympyräviivat, joiden toinen (kulmassa O oleva) leikkauspiste olkoon C. Piirretään sitten puolisuora OC ja väitetään, että se on vaadittu kulman puolittaja.



Kuv. 39.

Tod.:[1] Piirustuksen mukaan $\triangle ABO$ on tasakylkinen ja suora OC on sen kannan AB keskinormaali. OC puolittaa siis huippukulman O (23 §, lause 1 b).

Harj.teht.: 80) Kulma on jaettava neljään yhtäsuureen osaan.

81) Piirrettävä 45° kulma.

82) Ympyrän kaari on puolitettava. *Ohje:* Puolitetaan vastaava keskuskulma (vrt. 11 §, lause).

[1] Kun piirtämistehtävän ratkaisu on suoritettu, niin on myös todistettava, että ratkaisu on oikea, ellei voida katsoa tämän käyvän välittömästi ilmi itse ratkaisusta.

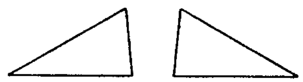
VIII. YHTENEVYYS JA SYMMETRISYYS

28 §. Kahta kuviota sanotaan *yhteneviksi,* jos ne voidaan asettaa päällekkäin siten, että ne täydellisesti yhtyvät. Yhtenevyyden merkkinä käytetään: $\cong$. Yhteneviä kuvioita ovat mm. kaikki suorat, yhtäsuuret janat, yhtäsuuret kulmat, samansäteiset ympyrät ja niiden yhtäsuuret kaaret.

Yhtenevien kuvioiden osia, jotka kuvioiden yhtyessä myös yhtyvät, sanotaan toistensa *vastinosiksi.* Janojen, kaarien ja kulmien yhtäsuuruuden määritelmistä seuraa välittömästi, että *yhtenevien kuvioiden vastinjanat, -kaaret ja -kulmat ovat yhtäsuuret.*

Kahta kuviota sanotaan *suoraan yhteneviksi,* jos ne voidaan saada yhtymään siirtämällä, siis tasosta nostamatta (kuv. 40 a). Jos sitä vastoin ensin täytyy kääntää toinen kuvio nurin ennenkuin se saadaan yhtymään toisen kanssa, niin kuvioita sanotaan *kääntäen yhteneviksi* (kuv. 40 b).


Kuv. 40 a.


Kuv. 40 b.

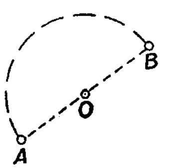
Harj.teht.: 83) Piirrettävä paperille mielivaltainen kuvio ja kopioitava se sitten läpinäkyvälle paperille, jolloin saadaan alkuperäisen kanssa yhtenevä kuvio.

84) Leikattava pahvista mielivaltaisen muotoinen levy ja piirrettävä sen reunaa myöten paperille kaksi a) suoraan, b) kääntäen yhtenevää kuviota.

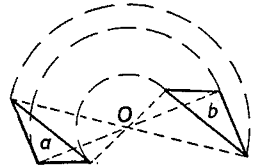
85) Kun musteella paperille piirretty kuvio kuivataan imupaperilla ja imupaperi käännetään sitten nurin, niin millä tavalla yhteneviä ovat alkuperäinen kuvio ja imupaperiin tarttunut kuvio?

86) Leikattava yht'aikaa kahdesta päällekkäin asetetusta paperista jokin kuvio. Kuviot on sitten asetettava pöydälle ensin siten, että ne ovat suoraan yhteneviä, ja sen jälkeen siten, että ne ovat kääntäen yhteneviä.

29 §. Kahden pisteen A ja B (kuv. 41) sanotaan olevan *symmetrisessä asennossa* eli *symmetrisiä* jonkin pisteen, *symmetrisyyskeskuksen* O suhteen, jos O on pisteiden



Kuv. 41.



Kuv. 42.

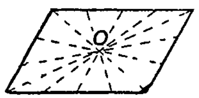
A ja B yhdistysjanan keskipiste.

Jos B:tä kierretään O:n ympäri 180° (O-keskistä ympyräviivaa pitkin), niin se yhtyy A:han.

Kahden kuvion a ja b (kuv. 42) sanotaan olevan *symmetrisessä asennossa* eli *symmetrisiä* jonkin pisteen, *symmetrisyyskeskuksen* O suhteen, jos kummankin kuvion jokaista pistettä vastaa O:n suhteen symmetrinen piste toisessa kuviossa.

Jos kuviota b kierretään O:n ympäri 180°, niin sen jokainen piste yhtyy kuvion a vastaavaan symmetriseen pisteeseen, joten kuvio b yhtyy kuvioon a. Siis *pisteen suhteen symmetriset kuviot ovat suoraan yhtenevät.*

Jos kuvion pisteet ovat parittain symmetrisiä saman pisteen O (kuv. 43) suhteen, toisin sanoen, jos kuvio on symmetrinen itsensä kanssa pisteen O suhteen, niin sanotaan lyhyesti, että *kuvio on symmetrinen pisteen O suhteen.* Symmetrisyyskeskusta O sanotaan tällöin kuvion *keskipisteeksi.*



Kuv. 43.

Harj.teht.: 87) On annettuna kaksi pistettä P ja Q. On määrättävä kolmas piste, joka on symmetrisessä asennossa P:n kanssa Q:n suhteen.

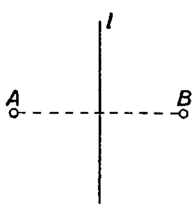
88) Piirrettävä nelikulmio, joka on symmetrisessä asennossa annetun nelikulmion kanssa sen ulkopuolella olevan määrätyn pisteen suhteen.

89) Mitkä seuraavista kirjaimista ovat symmetrisiä jonkin pisteen suhteen:

A, E, H, I, N, O, Q, X, Y, Ö?

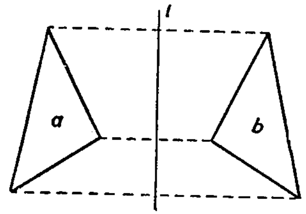
30 §. Kahden pisteen A ja B (kuv. 44) sanotaan olevan *symmetrisessä asennossa* eli *symmetrisiä* jonkin suoran, *symmetrisyysakselin* l suhteen, jos l on pisteiden A ja B yhdistysjanan keskinormaali.

Jos sitä l:n rajoittamaa puolitasoa, jossa B on, käännetään l:n ympäri 180°, niin B yhtyy A:han.



Kuv. 44.

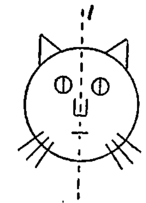
Kahden kuvion a ja b (kuv. 45) sanotaan olevan *symmetrisessä asennossa* eli *symmetrisiä* jonkin suoran, *symmetrisyysakselin* l suhteen, jos kummankin kuvion jokaista pistettä vastaa l:n suhteen symmetrinen piste toisessa kuviossa. a:ta ja b:tä sanotaan myös toistensa *peilikuviksi* suoran l suhteen.



Kuv. 45.

Jos kuviota b käännetään l:n ympäri 180°, niin sen jokainen piste yhtyy kuvion a vastaavaan symmetriseen pisteeseen, joten kuvio b yhtyy kuvioon a. Siis *suoran suhteen symmetriset kuviot ovat kääntäen yhtenevät.*

Jos kuvion pisteet ovat parittain symmetrisiä saman akselin l (kuv. 46) suhteen, toisin sanoen, jos kuvio on symmetrinen itsensä kanssa suoran l suhteen, niin sanotaan lyhyesti, että *kuvio on symmetrinen (suoran l suhteen).* Symmetrisiä kuvioita ovat mm. suora normaalinsa suhteen, jana keskinormaalinsa suhteen, kulma puolittajansa suhteen ja ympyrä halkaisijansa suhteen.



Kuv. 46.

Harj.teht.: 90) Tunnetaan piste A ja suora l. On määrättävä A:n symmetrinen piste suoran l suhteen.

91) Läpinäkymättömälle paperille on piirretty nelikulmio ja suora. Piirrettävä nelikulmion peilikuva suoran suhteen, kun kynän ja viivoittimen lisäksi on käytettävissä a) neula (paperi taitetaan suoraa myöten), b) kulmaviivoitin ja harppi (paperia ei taiteta).

92) Läpinäkyvälle paperille on piirrettävä mielivaltainen kuvio ja suora. Sitten on piirrettävä, käyttämättä muita välineitä kuin kynää, samalle paperille kuvio, joka on symmetrisessä asennossa ed. kuvion kanssa mainitun suoran suhteen.

93) Paperi on taitettava kaksinkerroin ja leikattava siitä sitten jokin symmetrinen kuvio. Mikä on kuvion symmetrisyysakseli?

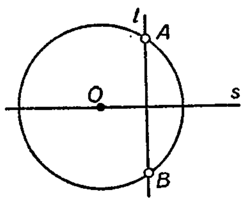
94) Mitkä harj.tehtävässä 89 luetelluista kirjaimista ovat symmetrisiä jonkin akselin suhteen? Montako symmetrisyysakselia kullakin kirjaimella on?

95) Montako symmetrisyysakselia on a) kullakin kuvioista 95, 128 ja 129, b) ympyrällä, c) suoralla?

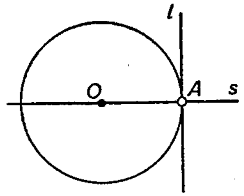
96) Piirrettävä harpin ja viivoittimen avulla suoran peilikuva toisen suoran suhteen, kun suorat a) leikkaavat toisensa, b) ovat yhdensuuntaiset.

IX. SUORIEN JA YMPYRÖIDEN KESKINÄISET ASENNOT

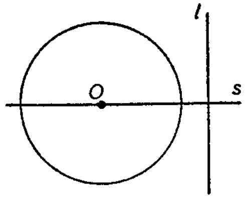
31 §. Kahden suoran erilaiset keskinäiset asennot on jo aikaisemmin selvitetty (IV ja V). Tarkastelemme nyt suoraa l ja ympyrää O (kuv. 47). Piirrämme ympyrän keskipisteen O kautta kohtisuoran s suoraa l vastaan.



Kuv. 47 a.



Kuv. 47 b.



Kuv. 47 c.

Koska ympyräviiva ja s:n normaali l erikseen ovat symmetrisiä suoran s suhteen, niin niiden yhdessä muodostama kuvio on myös symmetrinen s:n suhteen. Tämän perusteella ja koska suoralla ja ympyräviivalla ilmeisesti voi olla **enintään** kaksi yhteistä pistettä, on olemassa seuraavat kolme mahdollisuutta:

1) *Suoralla ja ympyräviivalla on kaksi yhteistä pistettä* (A ja B, kuv. 47 a), jotka ovat symmetrisessä asennossa suoran s suhteen. Suora ja ympyrä tällöin *leikkaavat* toisiaan mainituissa pisteissä. Suora l on nimeltään ympyrän *sekantti* eli *leikkaaja*. Sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on pienempi kuin säde.

2) *Suoralla ja ympyräviivalla on yksi yhteinen piste* (A, kuv. 47 b), joka on itse suoralla s. Suora ja ympyräviiva tällöin *sivuavat* toisiaan mainitussa pisteessä, *sivuamispisteessä*. Suora l on nimeltään ympyrän *tangentti* eli *sivuaja*. **Tämä on siis suora, joka on kohtisuorassa sädettä** (OA) vastaan ja kulkee säteen ympyräviivalla olevan päätepisteen (A) kautta. Sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on säteen suuruinen.

3) *Suoralla ja ympyräviivalla ei ole yhtään yhteistä pistettä* (kuv. 47 c). Suora on tällöin kokonaan ympyrän *ulkopuolella*. Sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on suurempi kuin säde.

Edellä suoritetusta tarkastelusta selviää, että ympyrän tangentti voidaan määritellä seuraavalla kolmella eri tavalla:

Ympyrän tangentti on suora,

a) *jolla on yksi piste yhteisenä ympyräviivan kanssa,*

b) *joka on kohtisuorassa sädettä vastaan ja kulkee säteen ympyräviivalla olevan päätepisteen kautta,*

c) *jonka etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen.*

Kohtaan b) nojautuen voidaan ratkaista

Teht.: *Ympyrän kehällä olevan pisteen kautta on piirrettävä ympyrän tangentti.*

Harj.teht.: 97) Piirrettävä ympyrä, jonka säde = 3 cm. Sitten on piirrettävä suora, jonka etäisyys tämän ympyrän keskipisteestä on a) 2 cm, b) 3 cm, c) 4 cm. Monessako pisteessä kukin suora kohtaa ympyrän kehän?

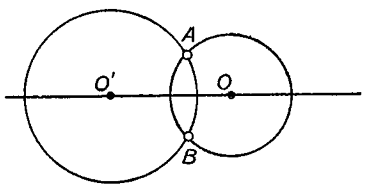
98) Ympyrälle on piirrettävä tangentti, joka on annetun suoran suuntainen. *Ohje:* Määrätään ensin sivuamispiste piirtämällä keskipisteestä kohtisuora annettua suoraa vastaan.

99) Suoran ulkopuolella oleva piste keskipisteenä on piirrettävä ympyrä, joka sivuaa mainittua suoraa. *Ohje:* Piirretään pisteestä ensin suoran normaali.

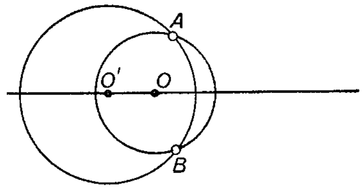
32 §. Siirrymme nyt tarkastelemaan kahden ympyrän O ja O' (kuv. 48) keskinäisiä asentoja.

Koska kumpikin ympyrä erikseen on symmetrinen *keskussuoran* OO' suhteen, niin niiden yhdessä muodostama kuvio on myös symmetrinen tämän suoran suhteen. Tämän perusteella ja koska kahdella eri ympyräviivalla ilmeisesti voi olla **enintään** kaksi yhteistä pistettä, on olemassa seuraavat kolme mahdollisuutta:

1) *Ympyräviivoilla on kaksi yhteistä pistettä* A ja B (kuv. 48 a ja b), jotka ovat symmetrisessä asennossa keskussuoran OO' suhteen. Ympyräviivat tällöin *leikkaavat* toisiaan mainituissa pisteissä.

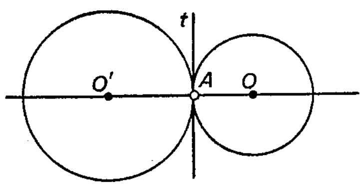


Kuv. 48 a.

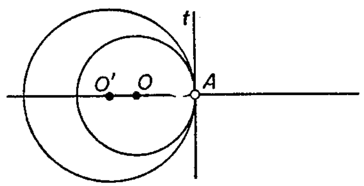


Kuv. 48 b.

2) *Ympyräviivoilla on yksi yhteinen piste* (A, kuv. 48 c ja d), joka on itse keskussuoralla. Ympyräviivat tällöin *sivuavat* toisiaan mainitussa pisteessä, jota sanotaan *sivuamispisteeksi.* Sivuaminen tapahtuu joko *ulkopuolitse* (kuv. 48 c) tai *sisäpuolitse* (kuv. 48 d). Sivuamispisteen kautta piirretty keskussuoran normaali t on ympyröiden yhteinen tangentti.

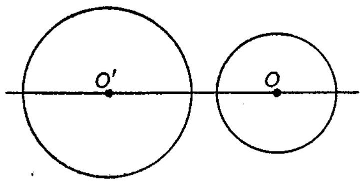


Kuv. 48 c.

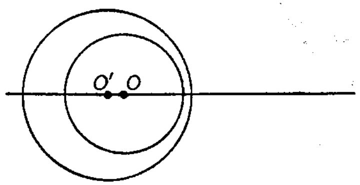


Kuv. 48 d.

3) *Ympyräviivoilla ei ole yhtään yhteistä pistettä* (kuv. 48 e ja f). Ympyräviivat ovat tällöin joko toistensa *ulkopuolella* (kuv. 48 e) tai toinen on toisen *sisällä* (kuv. 48 f).



Kuv. 48 e.



Kuv. 48 f.

Harj.teht.: 100) Ympyrän a) ulkopuolella, b) sisäpuolella oleva piste keskipisteenä on piirrettävä ne kaksi ympyrää, jotka sivuavat ensin mainittua ympyrää. *Ohje:* Piirretään ensin keskussuora.

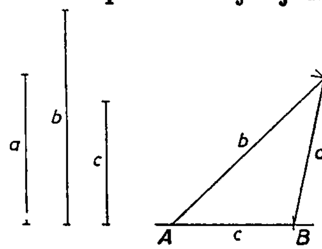
101) Kahden ympyrän säteet ovat 5 cm ja 2 cm. Kuinka suuri pitää olla niiden keskipisteiden välin, *keskusjanan,* jotta ympyrät a) sivuaisivat toisiaan ulkopuolitse, b) sivuaisivat toisiaan sisäpuolitse, c) olisivat toistensa ulkopuolella, d) olisivat »sisäkkäin», e) leikkaisivat toisiaan?

102) Mitä poikkeuksellista tapahtuu kuvioissa 48 d ja f, jos ympyröiden O ja O' säteet ovat yhtäsuuret?

X. KOLMIOIDEN KONSTRUOIMINEN JA YHTENEVYYSLAUSEET

33 §. Teht.: *Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen sivut* (a, b ja c, kuv. 49).

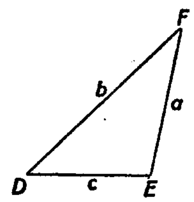
Ratk.: Piirretään ensin jokin suora ja erotetaan siitä jana $AB = c$. Sitten piirretään A keskipisteenä ja jana b säteenä ympyrä ja samoin B keskipisteenä ja jana a säteenä. Kun näiden leikkauspiste C yhdistetään pisteisiin A ja B, niin näin syntynyt kolmio ABC on vaadittu kolmio.



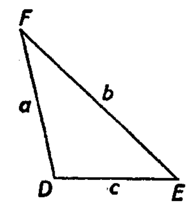
Kuv. 49.

Tark.: Tehtävä on mahdollinen silloin, kun piirretyt ympyrät leikkaavat toisiaan. Määrätylle puolelle janaa AB voidaan tällöin piirtää v a i n y k s i kolmio ABC, jossa $AC = b$ ja $BC = a$, kuten piirroksessamme.

Jos DEF on toinen kolmio, jonka sivut ovat janojen a, b ja c pituiset, niin tämä kolmio on joko suoraan (kuv. 50 a) tai kääntäen (kuv. 50 b) yhtenevä piirretyn kolmion kanssa. Jos näet $\triangle DEF$ kopioidaan esim. läpinäkyvälle paperille ja siirretään $\triangle ABC$:n päälle siten, että c:n pituiset sivut yhtyvät, ja tarvittaessa (kuv. 50 b) $\triangle DEF$ käännetään nurin, niin edellä esitetyn »tarkastelun» jäl-



Kuv. 50 a.



Kuv. 50 b.

kimmäisen osan perusteella kolmioiden täytyy yhtyä. Näin olemme johtuneet ensimmäiseen ns. *yhtenevyyslauseeseen*[1]:

Yhtenevyyslause »sss»: *Jos kolmion sivut ovat yhtäsuuret kuin toisen kolmion sivut, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

Harj.teht.: 103) Piirrettävä kolmio, jonka sivut ovat 2, 3 ja 4 cm.

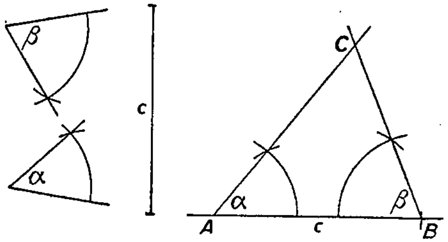
104) Piirrettävä tasakylkinen kolmio, kun tunnetaan sen kanta ja kylki.

105) Piirrettävä tasasivuinen kolmio.

106) Piirrettävä a) 60°, b) 30° suuruinen kulma.

107) Kuinka suuret ovat sen kolmion kulmat, jonka sivut ovat 6,9, 3,7 ja 4,8 cm? *Ohje:* Piirretään kolmio ja mitataan astelevyllä kulmat.

34 §. Teht.: *Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kaksi kulmaa* (α ja β, kuv. 51) *ja välinen sivu* (c).



Kuv. 51.

Ratk.: Piirretään ensin jokin suora ja erotetaan siitä jana $AB = c$. Sitten piirretään tämän suoran viereen pisteeseen A α:n ja pisteeseen B β:n suuruinen kulma kuviossa esitetyllä tavalla. Leikatkoot näiden kulmien toiset kyljet toisensa pisteessä C. Silloin $\triangle ABC$ on vaadittu kolmio.

Tark.: Tehtävä on mahdollinen silloin, kun $\alpha+\beta < 180°$. Määrätylle puolelle janaa AB voidaan tällöin piirtää v a i n y k s i kolmio ABC, jossa $\wedge A = \wedge\alpha$ ja $\wedge B = \wedge\beta$.

Samalla tavalla kuin ed. §:ssä saadaan tarkastelun jälkimmäisen osan nojalla

Yhtenevyyslause »ksk»: *Jos kolmion kaksi kulmaa ja välinen sivu ovat yhtäsuuret kuin vastaavat osat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

Harj.teht.: 108) Piirrettävä tasakylkinen kolmio, kun tunnetaan sen kanta ja kantakulma.

109) Piirrettävä suorakulmainen kolmio, kun tunnetaan sen toinen terävä kulma ja viereinen kateetti.

[1] Yhtenevyyslauseista käytetään helposti käsitettäviä lyhennettyjä merkintöjä »sss», »ksk» jne., jossa s (=sivu) ja k (=kulma) ilmaisevat, mitkä kolmion osat ja missä järjestyksessä oletetaan yhtäsuuriksi.

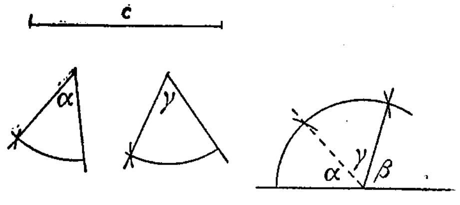
110) Piirrettävä (ilman astelevyä) kolmio, jonka kaksi kulmaa on 45° ja 60° ja välinen sivu 4 cm.

111) Kolmion sivu on 52 mm ja viereiset kulmat 102° ja 34°. Kuinka suuret ovat kolmion muut sivut ja kolmas kulma. *Ohje:* Piirretään kolmio ja mitataan sivut sekä lasketaan kulma.

35 §. Teht.: *Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kaksi kulmaa* (α ja γ, kuv. 52) *ja toisen* (γ:n) *vastainen sivu* (c).

Ratk.: Ensin piirretään kolmion kolmas kulma

$\beta = 180° - (\alpha+\gamma)$.



Kuv. 52.

Tällöin tunnetaan kolmion kulmat α ja β sekä niiden välinen sivu c, ja tehtävä voidaan siis ratkaista ed. §:ssä opitulla tavalla.

Tark.: Tehtävä on mahdollinen silloin, kun $\alpha+\gamma<180°$. Määrätylle puolelle janaa AB ($= c$) voidaan piirtää v a i n y k s i kolmio ABC, jossa $\wedge A = \wedge\alpha$ ja $\wedge C = \wedge\gamma$.

Tästä seuraa taas

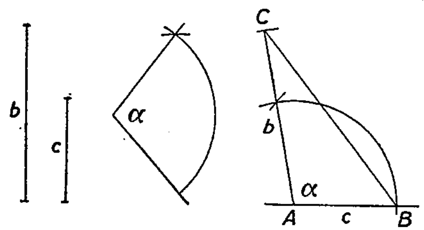
Yhtenevyyslause »kks»: *Jos kolmion kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu ovat yhtäsuuret kuin vastaavat osat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

Harj.teht.: 112) Piirrettävä suorakulmainen kolmio, kun tunnetaan sen toinen terävä kulma ja a) vastainen kateetti, b) hypotenuusa.

113) Piirrettävä tasakylkinen kolmio, kun tunnetaan sen a) kylki ja kantakulma, b) kanta ja huippukulma.

36 §. Teht.: *Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kaksi sivua* (b ja c, kuv. 53) *ja välinen kulma* (α).

Ratk.: Piirretään ensin jokin suora ja erotetaan siitä jana $AB = c$. Sitten piirretään sen viereen pisteeseen A α:n suuruinen kulma, esim. AB oikeana kylkenä, ja erotetaan sen vasemmasta kyljestä jana $AC = b$. Kun pis-



Kuv. 53.

teet B ja C yhdistetään, niin syntynyt kolmio ABC on vaadittu kolmio.

Tark.: Tehtävä on mahdollinen silloin, kun $\alpha < 180°$. Määrätylle puolelle janaa AB voidaan tällöin piirtää v a i n y k s i kolmio ABC, jossa $\wedge A = \wedge\alpha$ ja sivu $AC = b$.

Tästä seuraa

Yhtenevyyslause »sks»: *Jos kolmion kaksi sivua ja välinen kulma ovat yhtäsuuret kuin vastaavat osat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.*

Harj.teht.: 114) Piirrettävä tasakylkinen kolmio, kun tunnetaan sen kylki ja huippukulma.

115) Piirrettävä suorakulmainen kolmio, kun tunnetaan sen kateetit.

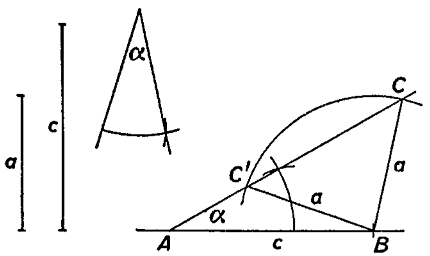
116) Piirrettävä kolmio, jonka kaksi sivua on 3 ja 5 cm ja välinen kulma 30°.

117) Kuinka suuri on kolmion kolmas sivu, kun kaksi sivua ovat 8,4 cm ja 5,1 cm ja niiden välinen kulma 73°?

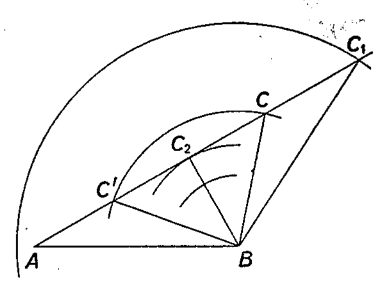
37 §. Teht.: *Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kaksi sivua* (a ja c, kuv. 54) *ja toisen* (a:n) *vastainen kulma* (α).

Ratk.: Piirretään ensin jokin suora ja erotetaan siitä jana $AB = c$. Sitten piirretään sen viereen pisteeseen A α:n suuruinen kulma, esim. AB oikeana kylkenä. B keskipisteenä ja a säteenä piirretään ympyrä, joka leikatkoon äsken piirretyn kulman vasenta kylkeä pisteessä C. Kun pisteet B ja C yhdistetään, niin syntynyt kolmio ABC on vaadittu kolmio.

Tark.: Ratkaisujen lukumäärä riippuu siitä, monessako pisteessä B keskipisteenä ja a säteenä piirretty ympyrä



Kuv. 54.



Kuv. 55.

kohtaa kulman A vasemman kyljen. Kuviosta 55, jossa esitetään eri mahdollisuuksia, selviää, että määrätylle puolelle janaa AB voidaan piirtää kolmioita, joissa $\wedge A = \alpha$ ja $BC = a$:

1) k a k s i, jos ympyrä leikkaa kulman A vasenta kylkeä kahdessa pisteessä (C ja C'),

2) y k s i, jos ympyrä leikkaa kulman A vasenta kylkeä yhdessä pisteessä (C_1) tai sivuaa sitä (C_2:ssa),

3) e i y h t ä ä n, jos ympyrä ei kohtaa kulman A vasenta kylkeä.

Tapauksessa 1 saatavissa kahdessa erilaisessa kolmiossa ovat sivun c vastaiset kulmat C ja C' toistensa vinoja supplementtikulmia (miksi?). Ottamalla tämä huomioon saadaan samalla tavalla kuin ennen

Yhtenevyyslause »ssk»: *Jos kolmion kaksi sivua ja toisen vastainen kulma ovat yhtäsuuret kuin vastaavat osat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät, edellyttäen kuitenkin, että toisten yhtäsuurien sivujen vastaiset kulmat eivät ole vinoja supplementtikulmia.*

Harj.teht.: 118) Ratkaistava viimeksi käsitelty teht., kun kulma α on tylppä. Montako ratkaisua tällöin voidaan saada eri tapauksissa?

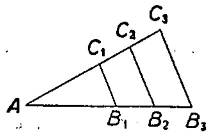
119) Piirrettävä suorakulmainen kolmio, kun tunnetaan sen hypotenuusa ja toinen kateetti?

120) Piirrettävä astelevyä käyttämättä kolmio, jonka yksi sivu on 6 cm ja sen toinen viereinen kulma 30° sekä tämän vastainen sivu a) 7 cm, b) 4 cm, c) 3 cm, d) 2 cm. Montako ratkaisua eri tapauksissa saadaan?

38 §. Kaikki viisi yhtenevyyslausetta voidaan yhdistää yhdeksi:

Lause: *Jos kolmion sivuista ja kulmista kolme, joista ainakin yksi on sivu, on yhtäsuurta kuin vastaavat osat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät* (huomattava kuitenkin viimeisessä yhtenevyyslauseessa oleva lisäedellytys).

Kolmion kaikkien kulmien tunteminen ei riitä kolmion määräämiseksi. Tämän vuoksi ei ole myöskään olemassa vastaavaa yhtenevyyslausetta »kkk». Itse asiassa kolmion kaikkien kulmien tunteminen ei merkitse olennaisesti enempää kuin kahden kulman tunteminen, sillä voidaanhan jälkimmäisessä tapauksessa kolmaskin kulma piirtää (35 §). Kuviossa 56 on esimerkiksi esitettynä kolme kolmiota AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, joiden kulmat ovat vastaavasti yhtäsuuret, mutta jotka silti eivät ole yhteneviä.



Kuv. 56.

Koska kahden suorakulmaisen kolmion suorat kulmat joka tapauksessa ovat yhtäsuuret, niin saadaan edellisestä lauseesta

Seur.: *Jos suorakulmaisessa kolmiossa kaksi sivua tai yksi sivu ja toinen terävä kulma ovat yhtäsuuret kuin vastaavat osat toisessa suorakulmaisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.*[1]

On huomattava, että tähän ei tarvitse liittää »vinosupplementtikulma»-rajoitusta, koska tällainen tapaus ei voi esiintyä, kun kysymyksessä on kaksi suorakulmaista kolmiota. Kun näet kaksi kulmaa ovat vinoja supplementtikulmia, niin toinen niistä on tylppä ja sellaistahan ei suorakulmaisessa kolmiossa voi olla olemassa.

Harj.teht.: 121) Piirrettävä nelikulmio, kun tunnetaan a) sivut ja yksi kulma, b) kolme sivua ja niiden väliset kaksi kulmaa.

122) Piirrettävä neliö, kun sen sivu tunnetaan.

123) Piirrettävä viisikulmio, jonka sivut ovat annetun janan pituiset ja eräästä kärjestä piirretyt lävistäjät 1 $^1/_2$ kertaa niin pitkät kuin sivut.

124) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 72 mm ja toinen kateetti 57 mm. Kuinka suuri on toinen kateetti ja terävät kulmat?

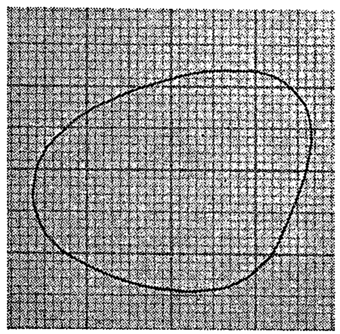
[1] Lyhyt sanonta »vastaavat osat» on tässä käsitettävä siten, että jos toisessa kolmiossa on kysymyksessä esim. kateetti ja viereinen terävä kulma, niin toisen kolmion vastaavat osat ovat niinikään kateetti ja viereinen terävä kulma.

TOINEN LUKU

Mittaaminen ja yhdenmuotoisuus

I. MONIKULMIOIDEN ALAT JA MUUNTAMINEN PYTHAGORAAN LAUSE

39. §. Paperille piirretyn umpinaisen viivan rajoittaman tason osan, *alueen, suuruus* eli *(pinta-)ala* voidaan likimäärin määrätä siten, että asetetaan alueen päälle läpinäkyvä millimetripaperi (kuv. 57) ja lasketaan, montako kokonaista mm²:ä jää alueen sisälle. Näin saadaan mm²:ssä lausuttuna pinta-alan likiarvo, joka yleensä on liian pieni. Liian suuri likiarvo taas saadaan, kun mainittujen mm²:n lisäksi otetaan laskussa huomioon ne, jotka ovat vain osittain alueessa. Näitä kahta likiarvoa tarkempi on yleensä niiden keskiarvo.


Kuv. 57.

Pinta-alan määräämiseksi on olemassa muitakin keinoja (ks. esim. harj.teht. 199). On myös erikoisia kojeita, *planimetreja,* joilla mitataan pinta-aloja. Tavallisesti pinta-ala l a s k e t a a n erinäisten kuvioon kuuluvien janojen, kulmien jne. mittalukujen avulla. Seuraavassa näytetään, kuinka tämä tapahtuu erilaisiin monikulmioihin nähden.

Harj.teht.: 125) Määrättävä kuviossa 100 olevan alueen pinta-alan kaikki kolme edellä puheena ollutta likiarvoa.

40 §. Lause: *Suorakulmion ala = kahden vierekkäisen sivun tulo:*[1]

$$\mathbf{A = ab.}$$

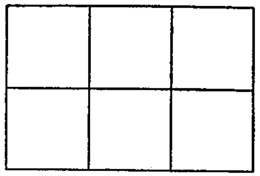
Tässä A merkitsee suorakulmion alaa ja a ja b vierekkäisten sivujen pituuksia. Todistuksessa erotetaan kaksi tapausta:

1) Olkoot a ja b kokonaislukuja, esim. $a = 2$ cm ja $b = 3$ cm (kuv. 58). Suorakulmio voidaan tällöin jakaa 1 cm²:n suuruisiin neliöihin, joita on 2:ssa rivissä, 3 kussakin, siis yhteensä $2 \cdot 3$ kpl. Suorakulmion ala on niin ollen $2 \cdot 3$ cm² $= ab$ cm².

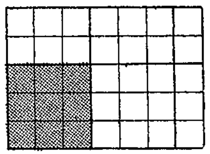
2) Olkoot a ja b (tai toinen niistä) murtolukuja. Koska erinimiset murtoluvut voidaan muuttaa samannimisiksi, niin voidaan olettaa, että a ja b ovat samannimiset. Olkoon esim. $a = \frac{5}{3}$ cm ja $b = \frac{7}{3}$ cm (kuv. 59). Otetaan nyt pituusmitaksi $\frac{1}{3}$ cm ja vastaavasti pintamitaksi neliö, jonka sivu $= \frac{1}{3}$ cm. Koska 1 cm² (tumma neliö) sisältää näitä neliöitä $3 \cdot 3$ kpl, niin mittaneliön ala $= \frac{1}{3 \cdot 3}$ cm². Suorakulmio sisältää näitä neliöitä $5 \cdot 7$ kpl, joten suorakulmion ala

$$= (5 \cdot 7) \cdot \frac{1}{3 \cdot 3}\ \text{cm}^2 = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 3}\ \text{cm}^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3}\ \text{cm}^2 = ab\ \text{cm}^2.$$

On selvää, että todistus voidaan suorittaa periaatteessa samalla tavalla, olkoot a ja b mitä *rationaalilukuja*, so. kokonais- tai murtolukuja tahansa.



Kuv. 58.



Kuv. 59.

[1] Oikeastaan pitäisi sanoa: »Suorakulmion alan mittaluku = kahden vierekkäisen sivun mittalukujen tulo, kun sivut ovat mitatut samalla pituusyksiköllä ja suorakulmio neliöllä, jonka sivu = mainittu pituusyksikkö.» Käytännöllisistä syistä käytetään kuitenkin yllä olevaa lyhyttä sanontaa.

Seur.: *Neliön ala = sivun neliö:*

$$\mathbf{A = a^2.}$$

Harj.teht.: 126) Kuinka suuri on suorakulmion ala, jos sen sivut ovat a) 15 cm ja 15 m, b) $4\frac{1}{2}$ m ja $3\frac{2}{3}$ m, c) molemmat 5,7 cm?

127) Huoneen lattian pinta-alan laskemiseksi mitattiin senttimetrin tarkkuudella lattian pituus ja leveys ja saatiin pituudeksi 6 m 27 cm ja leveydeksi 4 m 89 cm. Kuinka monta m²:ä on lattian pinta-ala? Vastaukseen on otettava mukaan vain »merkitsevät desimaalit», so. ne desimaalit, joilla on merkitystä, kun otetaan huomioon mainittu mittaustarkkuus.

128) Kuinka suuret ovat suorakulmion sivut, jos sen a) ala = 221cm² ja yksi sivu = 13 cm, b) ala = $3\frac{3}{4}$ m² ja yksi sivu = $5\frac{5}{6}$ m, c) ala = 1 m² ja yksi sivu 54,7 cm?

41 §. Lukua, jonka neliö $= A$, sanotaan luvun A *neliöjuureksi* ja merkitään: $\sqrt{A}$. Siis esim. $\sqrt{9} = 3$, sillä $3^2 = 9$. Edellisen seurauslauseen perusteella saadaan täten:

Lause: *Neliön sivu = alan neliöjuuri:*

$$\mathbf{a = \sqrt{A}.}$$

Esim. 1. Kun neliön ala = 16 m², niin neliön sivu

$$a = \sqrt{16} = 4\ \text{m}.$$

Esim. 2. Kun neliön ala = 2 m², niin neliön sivu

$$a = \sqrt{2}\ \text{m}.$$

Mutta mikä on tällainen luku a, jonka siis pitää täyttää ehto

$$a^2 = 2?$$

a ei tietenkään voi olla mikään kokonaisluku, eikä se voi olla myöskään murtoluku, sillä murtoluvun neliö on aina murtoluku. Tällaista lukua sanotaan *irrationaaliseksi*, ja sitä esittää päättymätön jaksoton desimaaliluku. Sen likiarvo voidaan määrätä kokeilemalla seuraavasti.

Koska $1^2 = 1 < 2$, mutta $2^2 = 4 > 2$, niin

$$1 < x < 2.$$

Edelleen havaitaan laskemalla, että $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$, mutta $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, joten

$$1{,}4 < x < 1{,}5.$$

Samalla tavalla edelleen kokeilemalla nähdään, että

$$1{,}41 < x < 1{,}42.$$

Siis $a = 1{,}41\ldots$ m. Kahden desimaalin, toisin sanoen senttimetrin tarkkuudella on siis $a = 1{,}41$ m (tai $1{,}42$ m).

Oppikirjan loppuun on liitetty taulukko, josta näkyy lukujen 1—100 neliöjuurien 3-desimaaliset arvot.

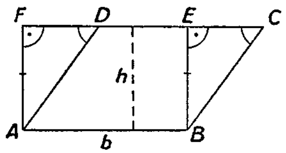
Harj.teht.: 129) Neliön ala = 5,5 m². Laskettava kokeilemalla neliön sivun pituus a) desimetrin, b) senttimetrin tarkkuudella.

130) Neliön ala = 76 cm². Kuinka suuri on sen sivu? Ks. taulukosta.

42 §. Suunnikkaan ja puolisuunnikkaan yhdensuuntaisia sivuja sanotaan *kannoiksi* ja niiden kohtisuoraa välijanaa *korkeudeksi.*

Lause: *Suunnikas = samakantainen ja samankorkuinen suorakulmio.*

Tod.: Kuviossa 60 on
suunnikas $ABCD$ = puolisuunnikas $ABCF - \triangle ADF$,
suorakulmio $ABEF$ = » » $- \triangle BCE$.



Kuv. 60.

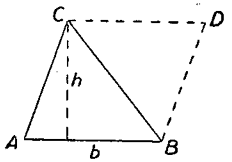
Koska oikealla puolella vähentäjinä esiintyvät kolmiot ovat yhtenevät (kks) ja siis yhtäsuuret, niin vasemmalla puolella olevat suunnikas ja suorakulmio ovat myös yhtäsuuret, m.o.t.

Seur. 1: *Suunnikkaan ala = kannan ja korkeuden tulo:*

$$\mathbf{A = bh.}$$

Seur. 2: *Yhtäsuurikantaiset, samankorkuiset suunnikkaat ovat yhtäsuuret.*

Koska kolmio ABC (kuv. 61) on puolet suunnikkaasta $ABDC$, jonka kanta ja korkeus ovat samat kuin kolmion kanta ja korkeus, niin saadaan



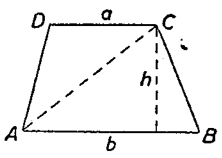
Kuv. 61.

Seur. 3: *Kolmion ala = kannan ja korkeuden tulon puolikas:*

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{bh}}{2}.$$

Seur. 4: *Yhtäsuurikantaiset, samankorkuiset kolmiot ovat yhtäsuuret.*

Seur. 5: *Kolmio on puolet yhtäsuurikantaisesta, samankorkuisesta suunnikkaasta.*



Kuv. 62.

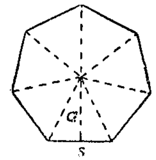
Jos puolisuunnikkaan $ABCD$ (kuv. 62) kannat ovat a ja b ja korkeus h ja puolisuunnikas jaetaan lävistäjällä AC kahteen kolmioon, niin saadaan puolisuunnikkaan alaksi (seur. 3)

$$\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Seur. 6: *Puolisuunnikkaan ala = kantojen keskiarvon ja korkeuden tulo:*

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a+b}}{2} \cdot \mathbf{h}.$$

Jos säännöllisen n-kulmion (kuv. 63) sivu = s ja keskipisteen etäisyys sivusta, *apoteema,* = a, niin keskipisteestä kärkiin piirretyt *säteet* jakavat monikulmion n:ään yhtenevään tasakylkiseen kolmioon, joiden alat = $\frac{sa}{2}$. Kun n-kulmion piiriä merkitään p:llä ($p = ns$), sen alaksi saadaan näin



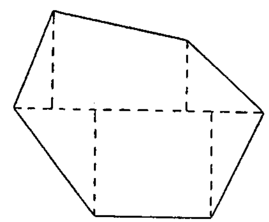
Kuv. 63.

$$n \cdot \frac{sa}{2} = \frac{ns \cdot a}{2} = \frac{pa}{2}.$$

Seur. 7: *Säännöllisen monikulmion ala = piirin ja apoteeman tulon puolikas:*

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{pa}}{2}.$$

Muunlaisen monikulmion ala voidaan laskea jakamalla se ensin lävistäjillä kolmioihin ja laskemalla sitten niiden alojen summa. Myös voidaan menetellä kuviossa 64 esitetyllä tavalla. Monikulmio on siinä ensin jaettu lävistäjällä kahteen osaan ja ne sitten edelleen kärjistä lävistäjää vastaan piirretyillä normaaleilla osiin, jotka ovat suorakulmaisia kolmioita, puolisuunnikkaita tai suorakulmioita. Niiden alojen summa on monikulmion ala.



Kuv. 64.

Harj.teht.: 131) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat a ja b. Kuinka suuri on sen ala?

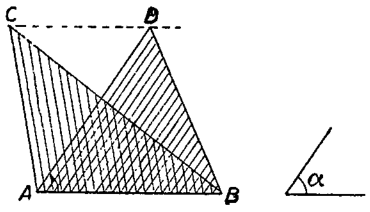
132) On laskettava kuvion a) 62, b) 63, c) 64 esittämän monikulmion ala. *Ohje:* Mitataan laskemista varten tarpeellisten janojen pituudet.

133) Piirrettävä tasakylkinen kolmio, jonka kanta on 4 cm ja ala 10 cm².

134) Kolmion kaksi kulmaa ovat 34° ja 47° ja jälkimmäisen vastainen sivu 4,6 cm. Kuinka suuri on kolmion ala? *Ohje:* Piirretään, mitataan ja lasketaan.

43 §. Kun piirretään monikulmio, jonka ala on yhtäsuuri kuin toisen monikulmion ala, niin sanotaan, että jälkimmäinen monikulmio *muunnetaan* edelliseksi.

Teht. 1: *Kolmio* (ABC, kuv. 65) *on muunnettava toiseksi siten, että yksi sivu* (AB) *jää muuttumatta ja toinen sen viereisistä kulmista tulee annetun kulman* (α) *suuruiseksi.*

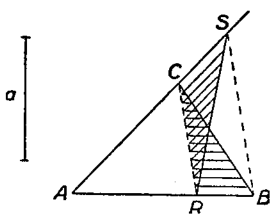


Kuv. 65.

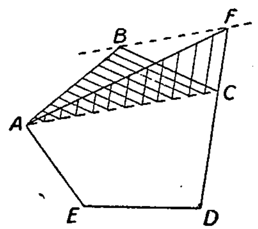
Ratk.: Piirretään kärjen C kautta sivun AB suuntainen suora ja asetetaan janan AB viereen pisteeseen A α:n suuruinen kulma. Sen kylki leikatkoon piirrettyä yhdensuuntaista pisteessä D. Silloin $\triangle ABD$ on vaadittu kolmio (ed. §, seur. 4).

Teht. 2: *Kolmio* (ABC, kuv. 66) *on muunnettava toiseksi siten, että yksi kulma* (A) *jää muuttumatta ja toinen sen viereisistä sivuista tulee annetun janan* (a) *suuruiseksi.*

Ratk.: Erotetaan puolisuorasta AB jana $AR = a$ ja piirretään sitten pisteen B kautta suoran RC suuntainen suora, joka leikatkoon suoraa AC pisteessä S. Silloin $\triangle ARS$ on vaadittu kolmio.



Kuv. 66.



Kuv. 67.

Tod.: $\triangle CRS = \triangle CRB$ (ed. §, seur. 4). Kun näihin yhtäsuuriin kolmioihin liitetään $\triangle ARC$, niin havaitaan, että todellakin $\triangle ARS = \triangle ABC$.

Teht. 3: *Monikulmio* ($ABCDE$, kuv. 67) *on muunnettava kolmioksi.*

Ratk.: Muunnetaan ensin $\triangle ACB$ $\triangle ACF$:ksi siten, että F, C ja D tulevat samalle suoralle (teht. 1). Näin tulee alkuperäinen monikulmio muunnetuksi monikulmioksi $AFDE$, jossa on yksi kärki vähemmän kuin ensin mainitussa. Kun tämä toimitus suoritetaan uudestaan tarpeeksi monta kertaa, saadaan monikulmio lopuksi muunnetuksi kolmioksi.

Harj.teht.: 135) Kolmio on muunnettava samakantaiseksi suorakulmioksi.

136) Suunnikas on muunnettava samakantaiseksi suunnikkaaksi, jonka kaikki sivut ovat yhtäsuuria.

137) Piirrettävä (astelevyä käyttämättä) nelikulmio, jonka sivut ovat 2, 3, 4 ja 5 cm ja kahden ensin mainitun sivun välinen kulma 120°. Nelikulmion ala on sitten määrättävä a) jakamalla nelikulmio kahteen kolmioon ja määräämällä sitten erikseen kummankin ala, b) muuntamalla nelikulmio ensin kolmioksi ja määräämällä sitten sen ala.

44 §. Pythagoraan lause: *Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty neliö = kateeteille piirrettyjen neliöiden summa.*

Tod.: Olkoot kateeteille piirretyt neliöt A ja B ja hypotenuusalle piirretty neliö C (kuv. 68). Jaetaan suoran kulman kärjestä piirretyllä korkeussuoralla neliö C kahteen suorakulmioon A' ja B' ja piirretään (viivaamalla korostetut) kolmiot K ja K'. Kolmio K on puolet samakantaisesta ja samankorkuisesta neliöstä A ja samoin kolmio K' on puolet suorakulmiosta A' (42 §, seur. 5). Mutta koska $K \cong K'$ (sks, kolmioiden tylpät kulmat = 90° + sama terävä kulma), niin

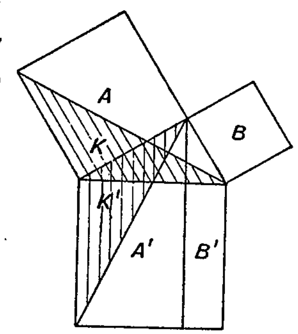
$$A = A'.$$

Samoin näytetään, että

$$B = B'.$$

Yhteenlaskemalla saadaan

$$A + B = A' + B' = C, \text{ m.o.t.}$$



Kuv. 68.

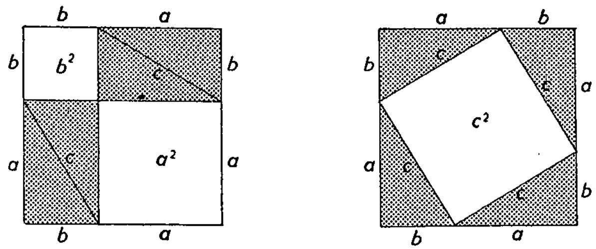
Olkoot kateettien mittaluvut a ja b ja hypotenuusan mittaluku c. Pythagoraan lause voidaan tällöin esittää yhtälön muodossa:

(I) $$a^2+b^2 = c^2.$$

Tästä seuraa (41 §):

(II) $$c = \sqrt{a^2+b^2},\quad b = \sqrt{c^2-a^2}.$$

Pythagoraan lause voidaan todistaa monella eri tavalla. Edellä esitetty on jo Eukleideen »Alkeissa». Esitämme vielä seuraavan vanhan, erittäin havainnollisen todistuksen.[1] Piirretään kaksi yhtäsuurta neliötä (kuv. 69), joiden sivut $= a + b$. Erotetaan sitten kummastakin neliöstä pois tummennettuina esitetyt neljä yhtäsuurta suorakulmaista kolmiota, joiden kateetit ovat a ja b ja hypotenuusa c. Tällöin jää molemmista neliöistä jäljelle yhtäsuuret alueet: vasemmanpuoleisesta neliöt, joiden alat ovat a^2 ja b^2, ja oikeanpuoleisesta neliö, jonka ala on c^2. Siis yhtälö (I) on voimassa.



Kuv. 69.

Harj.teht.: 138) Kuinka suuri on hypotenuusa, kun kateetit ovat 3 ja 4 cm?

139) Kuinka suuri on toinen kateetti, kun toinen on 5 m ja hypotenuusa 13 m?

140) Kuinka suuri on suorakulmaisen kolmion kolmas sivu ja ala, kun a) kateetit ovat 1 ja 2 m, b) hypotenuusa on 13 cm ja toinen kateetti 9 cm? *Ohje:* Käytetään kaavoja (II) ja katsotaan neliöjuurien arvot kirjan lopussa olevasta taulukosta.

[1] Tietysti voidaan tyytyä kahdesta esitetystä todistuksesta käsittelemään vain toinen.

II. SUHDE JA YHDENMUOTOISUUDEN PERUSOMINAISUUKSIA

45 §. Lukuja, janoja, kaaria, kulmia, alueita ja muita sellaisia olioita, joita voidaan mitata, sanotaan *suureiksi*. Suureita, joita voidaan mitata samalla mitalla, sanotaan *samanlaatuisiksi*. Tällaisia ovat kaikki luvut keskenään, kaikki janat keskenään jne.

Samanlaatuisten suureiden yhteen- ja vähennyslasku samoinkuin niiden kertominen ja jakaminen luvulla määritellään siten, että tulos on samanlaatuinen suure, jonka mittaluku saadaan suorittamalla ko. laskutoimitus suureiden mittaluvuilla. Tällöin edellytetään, että suureet ovat mitatut samalla mitalla. Koska luvuilla laskeminen on jo laskennossa opittu, niin kunkin lajin suureilla voidaan siis mainitut laskutoimitukset suorittaa heti, kun on vain selvitetty ko. suureiden mittaaminen.

Esim. 1. 5 cm ja 2 cm pituisten janojen summa on jana, jonka pituus $= (5+2)$ cm $= 7$ cm. Summa on myös jana, jonka nämä janat yhdessä muodostavat, kun ne asetetaan jollekin suoralla välittömästi perätysten (vrt. 3 §).

Esim. 2. Jos kolmio, jonka ala $= 6$ cm², kerrotaan luvulla $\frac{2}{3}$, niin tulo on jokainen alue (ei tarvitse olla kolmio), jonka ala $= \frac{2}{3}\cdot 6$ cm² $= 4$ cm². Tulo on myös alue, joka saadaan, kun kolmio jaetaan kolmeen yhtäsuureen osaan ja kaksi niistä asetetaan välittömästi vieretysten.

Kahden samanlaatuisen suureen s u h t e e l l a *tarkoitetaan sellaista lukua, että kun sillä kerrotaan jälkimmäinen suure, niin saadaan tuloksi edellinen.* Suhde on toisin sanoen mittaluku, kun edellinen suure mitataan jälkimmäisellä. Jos suureiden a ja b suhde $= k$ eli tavanmukaista merkintää käyttäen

$$a:b \text{ eli } \frac{a}{b} = k,$$

niin merkitsee se, että

$$a = kb.$$

Koska edellä sanotun mukaan tällöin myös a:n mittaluku $= k$ kertaa b:n mittaluku, niin *kahden suureen suhde = niiden mittalukujen suhde,* edellyttäen taas, että suureet ovat mitatut samalla mitalla.

Esim. Olkoot a ja b kaksi aluetta, joiden alat ovat: $a = 4\ \text{cm}^2$, $b = 6\ \text{cm}^2$. Silloin on

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Edellä olevasta selviää, että suureiden suhteilla saa laskea aivan niinkuin murtoluvuilla. On vain huomattava, että tulossa saa esiintyä kertojana ainoastaan (paljas) luku, jollainen mm. suhdekin on.

Harj.teht.: 141) Kahden monikulmion alat ovat 40 cm ja 25 m^2. Kuinka suuri on edellisen monikulmion suhde jälkimmäiseen monikulmioon?

142) Kuinka suuri on jana, jonka suhde 13,2 m pituiseen janaan = 0,87?

143) Mittaamalla ja laskemalla on määrättävä desimaalilukuna suhde $AC : ED$ kuviossa 67.

46 §. Kahden suhteen merkitty yhtäsuuruus,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

on nimeltään *verranto.* Tällöin sanotaan, että suureet a ja b ovat *verrannolliset* suureisiin c ja d. Kahden ensin mainitun suureen on oltava samanlaatuisia keskenään ja samoin kahden viimeksi mainitun. Verrannossa on *a ensimmäinen, b toinen, c kolmas* ja *d neljäs jäsen. a* ja *c* ovat verrannon *edelliset* ja *b* ja *d jälkimmäiset jäsenet. a* ja *d* ovat verrannon *äärimmäiset* ja *b* ja *c keskimmäiset jäsenet.*

Jos a, b, c ja d ovat kaikki samanlaatuisia suureita ja edellisen verrannon molemmat puolet kerrotaan suhteella $\frac{b}{c}$, niin saadaan verranto

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

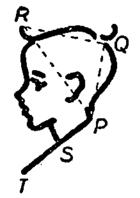
Vertaamalla tätä alkuperäiseen verrantoon havaitaan, että *verrannon keskimmäiset jäsenet saa vaihtaa keskenään.*

Harj. teht.: 144) Näytettävä, että jos verrannon kaikki jäsenet ovat samanlaatuisia suureita, niin myös verrannon äärimmäiset jäsenet saa vaihtaa keskenään.

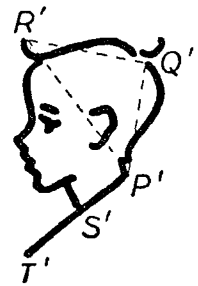
145) Todistettava lauseet:
a) yhtäsuurikantaisten kolmioiden alojen suhde = korkeuksien suhde,
b) samankorkuisten » » » = kantojen ».

Ohje: a)-kohdassa merkitään kolmioiden yhtäsuuria kantoja b:llä ja kolmioiden korkeuksia h_1:llä ja h_2:lla ja näytetään laskemalla, että kolmioiden alojen suhde $= h_1 : h_2$. b)-kohdassa menetellään vastaavalla tavalla.

47 §. Jos mitä kuviota tahansa katsotaan suurennus- tai pienennyslasilla tai jos kuvio suurennetaan tai pienennetään esim. valokuvaamalla, niin uusi kuvio on samannäköinen kuin alkuperäinen (kuv. 70). Niillä on sama m u o t o, mutta eri k o k o. Tällaisia kuvioita sanotaan geometriassa *yhdenmuotoisiksi.*



Kuv. 70 a.



Kuv. 70 b.

Kahden yhdenmuotoisen kuvion perusominaisuudet ovat:

1) *vastinjanojen suhteet ovat yhtäsuuria,*

2) *vastinkulmat ovat yhtäsuuria.*[1]

Yhdenmuotoisissa kuvioissa 70 a ja b ovat esim. $\wedge P'R'Q'$ ja $\wedge PRQ$ vastinkulmia ja siis yhtäsuuret. Vastinjanoja ovat $P'Q'$ ja PQ, samoin $S'T'$ ja ST jne. Niiden suhteet ovat siis yhtäsuuret:

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{S'T'}{ST} \text{ jne.}$$

Tätä vastinjanojen suhdetta, joka $= 1\tfrac{1}{2} = 3 : 2$ kuviossa 70, sanotaan kuvion b *yhdenmuotoisuussuhteeksi* eli *mittakaavaksi* kuvion a suhteen.

Jos edellisessä verrannossa keskimmäiset jäsenet vaihdetaan keskenään (46 §), saadaan verranto

$$\frac{P'Q'}{S'T'} = \frac{PQ}{ST}.$$

---

[1] Voidaan todistaa, että kumpikin näistä ominaisuuksista seuraa toisesta.

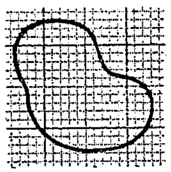
Siis *kuvion kahden mielivaltaisen janan suhde = vastinjanojen suhde yhdenmuotoisessa kuviossa.*

Se seikka, että yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen välillä ovat voimassa yllä mainitun laatuiset verrannot, ilmaistaan lyhyesti sanomalla, että *yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanat ovat verrannolliset.* Voidaan osoittaa (todistuksen sivuutamme), että yleisesti *yhdenmuotoisten kuvioiden kaikenlaisten vastinviivojen pituudet ovat verrannolliset.* Niinpä esim. yhdenmuotoisissa kuvioissa 70 a ja b

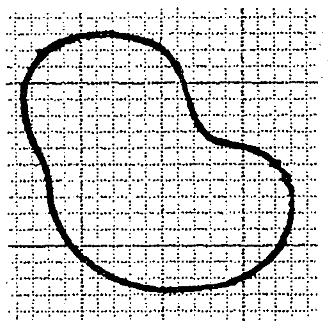
$$\frac{R'S'}{RS} = \frac{P'T'}{PT} \left(= 1\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{R'S'}{P'T'} = \frac{RS}{PT}$$

Kuviossa 71 a on mm-paperille piirrettynä umpinaisen viivan rajoittama alue. Kuvio 71 b esittää edellistä kuviota piirrettynä (suurennettuna) mittakaavassa 2 eli 2 : 1, niinkuin tavallisesti merkitään. Jos kummankin alueen mittaamme oman kuvionsa pikku neliöllä, niin mittaluvut ovat samat, mutta koska edellisen alueen mitta $= 1\ \text{mm}^2$ ja jälkimmäisen alueen mitta $= 2^2\ \text{mm}^2 = 4\ \text{mm}^2$, niin jälkimmäisen alueen pinta-ala $= 2^2$ kertaa edellisen alueen pinta-ala. Tällä tavalla voimme yleisestikin päätellä, että *kahden yhdenmuotoisen alueen pinta-alojen suhde = mittakaavan neliö.*



Kuv. 71 a.



Kuv. 71 b.

Harj. teht.: 146) Kuviossa 72 on kaksi yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota. Mitattava niiden sivut ja laskettava oikeanpuoleisen kolmion sivujen suhteet vasemmanpuoleisen kolmion vastinsivuihin kahden desimaalin tarkkuudella. Kaikki nämä suhteet = yhdenmuotoisuussuhde (mittauksen epätarkkuudesta voi kyllä johtua saatuihin suhteiden arvoihin pieniä eroavaisuuksia).

147) Kolmion sivut ovat 4 m, 6 m ja 8 m. Piirrettävä tämä kolmio mittakaavassa 3 : 400.

148) Piirrettävä kuviossa 61 oleva suunnikas mittakaavassa 5 : 2.

149) Mikä on sellaisen kartan mittakaava, jolla 25 km 600 m pituisen tien pituus = 6 cm 4 mm? Kuinka pitkä on järvi, jonka pituus tällä kartalla on 8,5 mm?

150) Kaikki ympyrät ovat yhdenmuotoisia. Määrättävä mittaamalla kuviossa 76 vasemmanpuoleisen ympyrän yhdenmuotoisuussuhde oikeanpuoleisen ympyrän suhteen. Mikä on ympyröiden a) kehien, b) alojen suhde?

151) Nelikulmion peräkkäisten sivujen pituudet ovat 15,0, 13,5, 11,4, ja 21,2 m ja kahden ensin mainitun sivun välinen kulma = 103°. Kuinka suuret ovat nelikulmion muut kulmat ja ala? *Ohje:* Piirretään nelikulmio sopivassa mittakaavassa, esim. 1: 300.

III. TRIGONOMETRISET FUNKTIOT JA NIIDEN KÄYTÄNTÖ

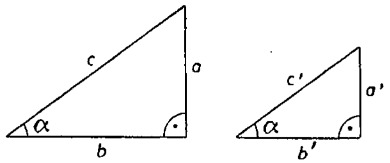
48 §. Jos kolmiolla on kaksi kulmaa yhtäsuurta kuin jollakin toisella kolmiolla, niin kolmioiden kolmannetkin kulmat ovat yhtäsuuret. Havaintomme mukaan nämä kolmiot ovat yhdenmuotoiset, mikä voidaan todistaakin, vaikka tässä todistuksen sivuutammekin. Tämän mukaisesti kaikki suorakulmaiset kolmiot, joiden toinen terävä kulma = α, ovat yhdenmuotoiset (kuv. 72). Jokaisessa näistä kolmioista on siis kahden sivun suhde yhtäsuuri kuin vastinsivujen suhde kaikissa muissa tällaisissa kolmioissa. Suorakulmaisen kolmion sivujen suhteet riippuvat niin ollen vain terävän kulman α suuruudesta, mutta eivät kolmion suuruudesta. Näitä suhteita, jotka ovat siis kulman α »funktioita», sanotaan ***trigonometrisiksi funktioiksi.*** Eri trigonometrisia funktioita on oikeastaan kuusi kappaletta, mutta niistä käytetään tavallisesti vain seuraavia neljää (ks. vasemmanpuoleista kolmiota kuviossa 72):

$\frac{a}{c} = \sin \alpha$ *(sini α)*,

$\frac{b}{c} = \cos \alpha$ *(kosini α)*,

$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ *(tangentti α)*,

$\frac{b}{a} = \cot \alpha$ *(kotangentti α)*.



Kuv. 72.

Sanoin lausuttuna määritellään siis nämä trigonometriset funktiot seuraavasti:

Suorakulmaisen kolmion terävän kulman

sini	= *vastaisen*	*kateetin*	*suhde*	*hypotenuusaan,*
kosini	= *viereisen*	»	»	» ,
tangentti	= *vastaisen*	»	»	*viereiseen kateettiin,*
kotangentti	= *viereisen*	»	»	*vastaiseen* » .

Esim. Mittaamalla havaitaan, että kuvion 72 vasemmanpuoleisessa kolmiossa on $a = 16$ mm, $b = 22$ mm, $c = 27$ mm ja $\alpha = 36°$ (likim.). Siis

$$\sin 36° = \frac{16}{27} = 0{,}59, \quad \cos 36° = \frac{22}{27} = 0{,}81,$$

$$\operatorname{tg} 36° = \frac{16}{22} = 0{,}73, \quad \cot 36° = \frac{22}{16} = 1{,}38.$$

Harj.teht.: 152) Mitattava kuvion 72 oikeanpuoleisen kolmion sivujen pituudet ja laskettava niiden perusteella 36° kulman trigonometristen funktioiden arvot sekä verrattava tuloksia edellisessä esimerkissä vasemmanpuoleisesta kolmiosta saatuihin arvoihin (mittausvirheistä johtuu, että eri kolmioista saadut arvot saattavat hiukan erota toisistaan).

153) Piirrettävä suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on 10 cm ja yksi kulma 65°. Sitten on mitattava sivujen pituudet ja laskettava mainitun kulman trig. funktioiden arvot. Samasta kolmiosta on määrättävä myös 25° kulman trig. funktioiden arvot.

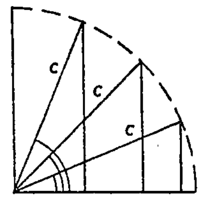
154) Kuinka suuri on a) tg 45°, b) sin 30°, c) cos 60°? Tehtävä on ratkaistava suorittamatta mittauksia. *Ohje:* Kaksi jälkimmäistä arvoa määrätään suorakulmaisesta kolmiosta, joka saadaan puolittamalla tasasivuinen kolmio sen yhden kulman puolittajalla.

155) Piirrettävä kulma α ja mitattava astelevyllä sen suuruus, jos

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, c) $\cos \alpha = 0{,}7$, d) $\cot \alpha = 2{,}3$.

49 §. Kun suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on **α**, niin toinen on sen komplementtikulma 90°—α. Trig. funktioiden määritelmistä seuraa tämän perusteella:

$$\sin (90°-\alpha) = \cos \alpha,$$
$$\cos (90°-\alpha) = \sin \alpha,$$
$$\operatorname{tg} (90°-\alpha) = \cot \alpha,$$
$$\cot (90°-\alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$



Kuv. 73.

Jos suorakulmainen kolmio muuttuu siten, että hypotenuusan c pituus pysyy muuttumatta mutta terävän kulman α suuruus muuttuu (kuv. 73), niin havaitaan, että *kun kulma α kasvaa* 0°*:sta* 90°*:een, niin*

sin α	*kasvaa*	0*:sta*	1*:een,*
cos α	*vähenee*	1*:stä*	0*:aan,*
tg α	*kasvaa*	0*:sta*	∞*:ään,*
cot α	*vähenee*	∞*:stä*	0*:aan.*

50 §. Oppikirjan loppuun on liitetty taulukko, josta nähdään trig. funktioiden arvot, kun kulma on annettu, ja kääntäen. Tätä taulukkoa käyttäen voidaan laskea suorakulmaisen kolmion muut sivut ja kulmat, kun tunnetaan joko yksi sivu ja toinen terävä kulma tai kaksi sivua.

Esim. 1. $c = 252$ m, $\alpha = 35{,}8°$.

Ensiksikin toinen terävä kulma $\beta = 90°-\alpha = 54{,}2°$. Edelleen saadaan sinin ja kosinin määritelmän nojalla ja käyttämällä taulukkoa apuna:

$$a = c \sin \alpha = 252 \cdot 0{,}585 = 147 \text{ m},$$
$$b = c \cos \alpha = 252 \cdot 0{,}811 = 204 \text{ m}.$$

Esim. 2. $a = 43{,}3$ cm, $b = 36{,}7$ cm.

Ensiksikin on

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{43{,}3}{36{,}7} = 1{,}180.$$

Taulukosta nähdään nyt, että $\alpha = 49{,}7°$. Siis $\beta = 90°-\alpha = 40{,}3°$. Edelleen saadaan sin α:n määrittelevästä yhtälöstä

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{43{,}3}{0{,}763} = 56{,}7 \text{ cm}.$$

Harj.teht.: 156) Haettava taulukosta seuraavat trig. funktioiden arvot: sin 33°, sin 75,6°, tg 63,8°, cos 57,3°, cot 11,6°, cot 6,2°.

157) Määrättävä kulma x, kun $\sin x = 0{,}627$, $\operatorname{tg} x = 2{,}830$, $\cos x = 0{,}487$, $\cot x = 3{,}012$.

158) Laskettava suorakulmaisen kolmion muut sivut ja kulmat, kun
a) hypotenuusa = 8,07 m ja toinen terävä kulma = 71,4°,
b) kateetti = 26 mm ja sen viereinen terävä kulma = 32°,
c) hypotenuusa = 118 cm ja kateetti = 87 cm,
d) kateetit 7,2 cm ja 4,7 cm.

159) Tasakylkisen kolmion kanta on 3,2 m ja korkeus 3,9 m. Kuinka suuret ovat kyljet ja kantakulmat? Tehtävä ratkaistava a) laskemalla, b) piirtämällä kolmio mittakaavassa 1: 100 ja mittaamalla sitten.

160) Ympyrän säde on 5 cm. Laskettava, kuinka suuri on a) 100° keskuskulmaa vastaava jänne, b) 7 cm pituista jännettä vastaava keskuskulma. *Ohje:* Piirretään jännettä vastaan kohtisuora halkaisija.

161) Todistettava, että jos a on mielivaltaisen kolmion terävä kulma ja b ja c ovat sen viereiset sivut, niin

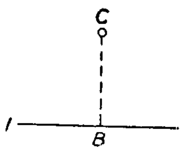
$$kolmion\ ala = \frac{1}{2}bc \sin a.$$

Esim. $a = 68°$, $b = 2,3$ cm ja $c = 3,5$ cm.

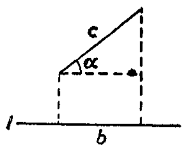
162) Kuinka korkea on torni, joka näkyy 100 m päästä tornin juuren korkeudelta 39,3° kulmassa?

51 §. P i s t e e n (C, kuv. 74) *projektiolla* tietyllä suoralla (l) tarkoitetaan pisteestä suoralle piirretyn normaalin kantapistettä (B).

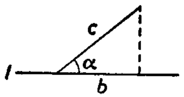
J a n a n (c, kuv. 75) *projektiolla* tietyllä suoralla (l) tarkoitetaan janan päätepisteiden projektioiden välistä janaa (b).



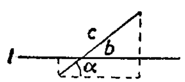
Kuv. 74.



Kuv. 75 a.



Kuv. 75 b.



Kuv. 75 c.

Projektion määräämistä sanotaan *projisoimiseksi*.

Janan c *kaltevuuskulmalla* suoran l suhteen tarkoitetaan sitä kulmaa α ($\leq 90°$), jonka jana c (tarpeeksi jatkettuna) muodostaa suoran l ja siis myös c:n päätepisteestä piirretyn l:n suuntaisen suoran kanssa. Kuvioista 75 selviää, että joka tapauksessa

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

eli sanoin lausuttuna;

Lause: *Janan projektio suoralla = jana kerrottuna kaltevuuskulman kosinilla.*

On siis huomattava, että janan projektion suuruus riippuu janan pituudesta ja kaltevuuskulmasta, mutta ei muuten janan paikasta suoran suhteen.

Harj.teht.: 163) Kuinka muuttuu janan projektion suuruus, kun jana kääntyy niin, että kaltevuuskulma muuttuu 0°:sta 90°:een?

164) Piirrettävä jokin jana ja sitä leikkaava suora. Jana on sitten projisoitava suoralle.

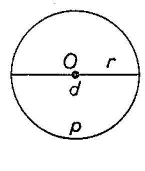
165) Kuinka suuri on 35,4 cm pituisen janan projektio, kun kaltevuuskulma on 71,6°?

166) 8 cm pituisen janan projektio on 5 cm. Kuinka suuri on kaltevuuskulma?

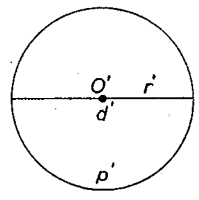
167) Janan projektio suoralla on 63 mm ja kaltevuuskulma 23°. Kuinka pitkä jana on?

IV. YMPYRÄNMITANTO

52 §. Tarkastellaan kahta mielivaltaista ympyrää O ja O' (kuv. 76). Olkoot niiden säteet r ja r', halkaisijat d ja d' sekä kehät p ja p'. Koska kuviot 76 a ja b ovat yhdenmuotoiset, niin vastinviivojen pituudet ovat verrannolliset:



Kuv. 76 a.



Kuv. 76 b.

$$\frac{p}{d} = \frac{p'}{d'}.$$

On siis voimassa

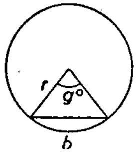
Lause: *Ympyrän kehän ja halkaisijan suhde on kaikissa ympyröissä sama.*

Ympyrän kehän ja halkaisijan suhdetta merkitään kreikkalaisella kirjaimella π. Jo *Arkhimedes* (n. 250 e. Kr.) tunsi likiarvon $\pi = 3,14$, joka onkin sopiva käytettäväksi, kun laskuja ei suoriteta useamman kuin kolmen numeron tarkkuudella. On voitu todistaa, että π on irrationaalinen luku, so. päättymätön jaksoton desimaaliluku. Sen kuusidesimaalinen likiarvo on

$$\pi = 3{,}14159265\,.$$

Seur. 1: *Jos ympyrän halkaisija = d ja säde = r, niin ympyrän kehän pituus*

$$\mathbf{p} = \pi\mathbf{d} = 2\pi\mathbf{r}.$$



Kuv. 77.

Koska ympyrän kehä = 360°, niin $g°$ kaaren pituus b on $\frac{g}{360}$ kehän pituudesta:

Seur. 2: *Jos ympyrän säde = r, niin g° kaaren pituus*

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{g}}{360}\cdot 2\pi\mathbf{r}.$$

Harj.teht.: 168) Mitattava mittanauhalla tai ohuella nuoralla jonkin pyöreän esineen ympärys (ympyrän kehä) ja paksuus (halkaisija) ja laskettava sitten saatujen mittalukujen suhde, jolloin saadaan π:n likiarvo.

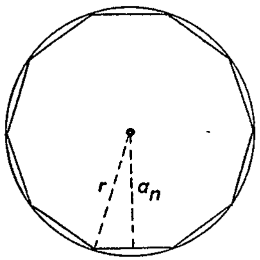
169) Kentälle on piirretty »nuoraharppia» käyttäen ympyrä, jonka säde on 4,60 m. Kuinka pitkä on ympyrän kehä?

170) Suuren kuusen ympärysmitta on 1,58 m. Kuinka paksu kuusi on, kun oletetaan, että sen läpileikkaus on ympyrä?

171) Kuinka monta kierrosta suorittaa polkupyörän pyörä 1 km matkalla, kun pyörän halkaisija = 70 cm?

172) Ympyrän säde on 7 cm. Kuinka suuri on kaaren pituus, jos se on a) 60°, b) 100°, c) 12°43′?

173) Kuinka suuri on keskuskulma, jos vastaava kaari on säteen pituinen.



Kuv. 78.

53 §. Ympyrän alan laskemiseksi piirrämme ympyrän sisään säännöllisen n-kulmion (kuv. 78). Olkoon

a_n = n-kulmion apoteema,
p_n = » piiri,
r = ympyrän säde,
p = » kehä.

Silloin on (42 §, seur. 7)

$$n\text{-kulmion ala} = \frac{p_n a_n}{2}.$$

Kun annetaan sitten n:n kasvaa rajattomasti, niin

p_n **lähenee** p:tä **ja** a_n **lähenee** r:ää.

Koska tällöin itse n-kulmio lähenee ympyrää, niin

$$\text{ympyrän ala} = \frac{pr}{2}.$$

Kun tähän sijoitetaan $p = 2\pi r$, saadaan

Lause 1: *Jos ympyrän säde = r ja halkaisija = d, niin ympyrän ala*

$$\mathbf{A} = \pi\mathbf{r}^2 = \frac{\pi\mathbf{d}^2}{4}.$$

Seur. 1: *Jos ympyrän säde = r ja sen sektorin keskuskulma = g°, niin sektorin ala*

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{g}}{360}\cdot \pi\mathbf{r}^2$$

Jos b on sektorin kaaren pituus (kuv. 77), niin sektorin ala on $\frac{b}{p}$ ympyrän alasta $\frac{pr}{2}$ ja siis $= \frac{b}{p}\cdot\frac{pr}{2} = \frac{br}{2}$, mikä voidaan sanoin tulkita seuraavasti:

Seur. 2: *Ympyrän sektorin ala = kaaren ja säteen tulon puolikas, toisin sanoen, sektori = kolmio, jonka kanta = sektorin kaari ja korkeus = ympyrän säde.*

Lause 2: *Ympyrän segmentti = vastaavan sektorin ja keskuskolmion erotus tai summa sen mukaan, onko segmentti < vai > puoliympyrä.*

Harj.teht.: 174) Laskettava harj.tehtävässä 169 mainitun ympyrän ala.

175) Kuinka suuri on harj.tehtävässä 170 mainitun kuusen läpileikkauksen ala?

176) Kahden samakeskisen ympyräviivan väliin jäävää aluetta sanotaan *ympyränrenkaaksi*. Laskettava tällaisen renkaan ala, jos suuremman ympyrän säde = 7 m ja pienemmän = 5 m.

177) Kahden ympyrän alojen suhde = niiden säteiden suhteen neliö. Miksi?

178) Ympyrän säde on 6 cm. Kuinka suuri on sektorin ala, jos sen kaari on a) 25°, b) 10 cm?

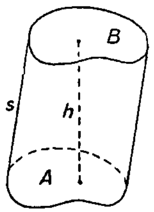
179) 90° kaaren jänne jakaa ympyrän kahteen segmenttiin. Kuinka suuret ovat niiden alat, jos ympyrän säde on r? Kuinka suuri on pienemmän segmentin alan suhde suuremman segmentin alaan? Montako % ympyrästä on pienempi segmentti?

V. TÄRKEIMMÄT KAPPALEET SEKÄ NIIDEN TILAVUUDET JA PINTA-ALAT

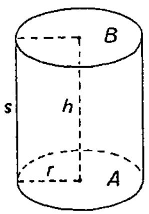
54 §. Kun suora liikkuu avaruudessa suuntaansa muuttamatta, niin sen muodostamaa pintaa sanotaan *lieriö-* eli *sylinteripinnaksi.* Jos pinnan *muodostajasuora* palaa lähtökohtaansa, pintaa sanotaan *suljetuksi.*

Suljetun, itseään leikkaamattoman lieriöpinnan ja kahden yhdensuuntaisen tason rajoittama kappale on nimeltään *lieriö* eli *sylinteri.* (Kuv. 79—82.) Tämän kappaleen pinnasta lieriöpintaan kuuluva osa on *vaippa* ja mainittuihin tasoihin kuuluvat osat taas *pohjia* (A ja B). Pohjat ovat yhteneviä. Pohjien kohtisuora välijana on lieriön *korkeus* (h). Pohjien välinen osa muodostajasuorasta on *sivujana* (s). Sivujanat ovat keskenään yhtäsuuria. Jos sivujanat ovat kohtisuorassa pohjia vastaan, lieriötä sanotaan *suoraksi* ja päinvastaisessa tapauksessa *vinoksi.*

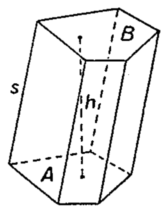
Jos pohjat ovat ympyröitä, lieriötä sanotaan *ympyrälieriöksi* ja pohjaympyröiden keskipisteiden yhdistysjanaa sanotaan lieriön *akseliksi.* Kuvio 80 esittää *suoraa ympyrälieriötä.* Se on *pyöräyslieriö*, jonka voidaan ajatella syntyvän suorakulmion pyörähtäessä jonkin sivunsa (h) ympäri, joka silloin on lieriön akseli. Akselin suuntainen suorakulmion sivu muodostaa pyörähtäessään lieriön vaipan ja kohtisuorat sivut taas muodostavat pohjat. Käytännössä puhutaan usein lyhyesti lieriöstä, vaikkakin tarkoitetaan nimenomaan suoraa ympyrälieriötä.



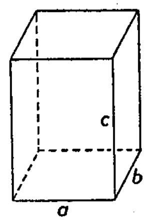
Kuv. 79.



Kuv. 80.



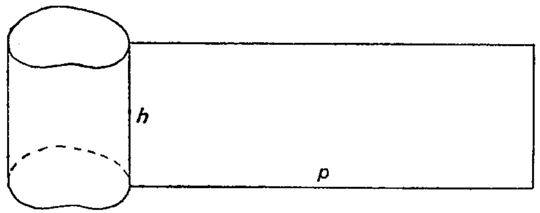
Kuv. 81.



Kuv. 82.

Lieriötä, jonka pohjat ovat monikulmioita, sanotaan *särmiöksi* eli *prismaksi* (kuv. 81 ja 82). Sen vaippa koostuu suunnikkaista, joiden lukumäärän mukaan särmiötä sanotaan *kolmi-*, *neli-*, jne. *sivuiseksi.* Särmiötä, jonka pohjatkin ovat suunnikkaita, sanotaan *suuntaissärmiöksi* eli *parallelipipediksi.* Jos suuntaissärmiön samassa kärjessä yhtyvät särmät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, toisin sanoen, jos kaikki »tahkot» ovat suorakulmioita, niin suuntaissärmiötä sanotaan *suorakulmaiseksi särmiöksi* (kuv. 82). Jos sen särmät ovat yhtäsuuria, niin on kysymyksessä *kuutio.*

55 §. Jos suoran lieriön (kuv. 83) vaippa ajatellaan esim. paperista valmistetuksi ja leikataan auki sivujanaa pitkin sekä levitetään sitten tasolle, niin syntyy suorakulmio, jonka kanta = lieriön pohjan piiri p ja korkeus = lieriön korkeus h. Siis vaippa = ph eli sanoin:



Kuv. 83.

Lause: *Suoran lieriön vaippa = pohjan piirin ja korkeuden tulo.*

Seur.: *Jos suoran ympyrälieriön pohjan säde* = r *ja korkeus* = h, *niin lieriön vaippa* = $2\pi rh$.

Harj.teht.: 180) Rautapellistä valmistetun suoran ympyrälieriön muotoinen vesiastia on 1,30 m korkea ja sen pohjan halkaisija on 85 cm. Paljonko peltiä on mennyt astian valmistukseen (astia on kanneton)?

181) Suoran särmiön korkeus on 5 cm ja pohjat ovat suorakulmaisia kolmioita, joiden kateetit ovat 6 cm ja 8 cm. Kuinka suuri on särmiön a) vaippa, b) koko pinta (vaippa + pohjat)?

182) Kuinka suuri on suorakulmaisen särmiön pinta, jos särmät ovat a, b ja c?

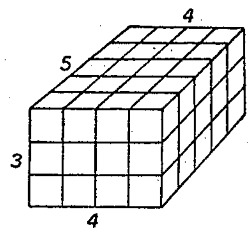
56 §. Kappaleen *tilavuuden* mittana käytetään kuutiota, jonka särmä on pituusyksikkö.

Lause 1: *Suorakulmaisen särmiön tilavuus = samasta kärjestä alkavien särmien tulo:*

$$V = abc.$$

Tässä V merkitsee suorakulmaisen särmiön tilavuutta ja a, b ja c samasta kärjestä alkavien särmien pituuksia.

Olkoot aluksi särmien mittaluvut kokonaislukuja, esim. $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm (kuviossa 84 on tämä särmiö esitettynä mittakaavassa 2 : 5). Kappale voidaan tällöin jakaa tahkojen suuntaisilla tasoilla 1 cm³:n suuruisiin kuutioihin. Näitä on kussakin vaakasuorassa »levyssä» $4 \cdot 5$ kpl. Ja koska levyjä on kaikkiaan 3 kpl., niin kappaleen tilavuus on $3 \cdot 4 \cdot 5 = abc$ cm³.



Kuv. 84.

Jos sitten särmien mittaluvut ovat murtolukuja, niin todistuksessa menetellään samalla tavalla kuin 40 §:ssä suorakulmion alaa koskevaa lausetta todistettaessa.

Lause pätee myös, kun yhden tai useamman särmän mittaluku on irrationaalinen. Kun nämä korvataan likiarvoilla, saadaan särmiön tilavuuden mittaluvun likiarvo.

Seur. 1: *Kuution tilavuus = särmän kuutio:*

$$V = a^3.$$

Lukua, jonka kuutio = V, sanotaan luvun V *kuutiojuureksi* ja merkitään: $\sqrt[3]{V}$. Siis esim. $\sqrt[3]{8} = 2$, sillä $2^3 = 8$. Sitä vastoin esim. $\sqrt[3]{2}$ ei ole mikään kokonaiseikä murtoluku, vaan se on irrationaalinen luku, jonka arvo voidaan laskea vain likimäärin. Oppikirjan loppuun on liitetty taulukko, josta nähdään lukujen 1—100 kuutiojuurien 3-desimaaliset arvot.

Seur. 2: *Kuution särmä = tilavuuden kuutiojuuri:*

$$a = \sqrt[3]{V}.$$

Edellä käsitellyn suorakulmaisen särmiön tilavuus voidaan esittää myös muodossa $(ab)c = Ah$, jossa A merkitsee pohjan alaa ja h korkeutta. Voidaan todistaa, että kaikkiin lieriöihin nähden on voimassa

Lause 2: *Lieriön tilavuus = pohjan alan ja korkeuden tulo:*

$$V = Ah.$$

Seur. 3: *Jos ympyrälieriön pohjan säde = r ja korkeus = h, niin lieriön tilavuus*

$$V = \pi r^2 h.$$

Harj.teht.: 183) Huoneen pituus = 7,45 m, leveys = 5,80 m ja korkeus = 3,25 m. Kuinka suuri on huoneen tilavuus ja kuinka paljon huoneessa oleva ilma painaa, jos 1 dm³ ilmaa painaa 1,29 g?

184) Paljonko vettä mahtuu harj.tehtävässä 180 mainittuun astiaan?

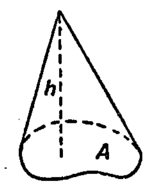
185) Kuinka suuri on harj.tehtävässä 181 mainitun särmiön tilavuus?

186) Pyöreän rautatangon pituus = 2,5 m ja paksuus = 3,1 cm. Kuinka suuri on tangon tilavuus ja paino, jos raudan tiheys on 7,1 kg/dm³?

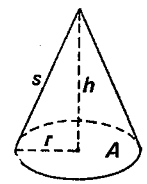
187) Kuinka suuri on kuution särmä, jos sen tilavuus on a) 1 000 cm³, b) 5 cm³? Ks. oppikirjan lopussa olevasta kuutiojuuren taulukosta.

57 §. Kun suora liikkuu avaruudessa kulkien joka hetki saman kiinteän pisteen kautta, sen muodostamaa pintaa sanotaan *kartiopinnaksi*. Jos pinnan *muodostajasuora* palaa lähtöpaikkaansa, pintaa sanotaan *suljetuksi*.

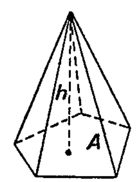
Suljetun, itseään leikkaamattoman kartiopinnan ja tason rajoittama kappale on nimeltään *kartio* (kuv. 85—87) ja mainittu kiinteä piste kartion *kärki* eli *huippu*. Kartion pinnasta kartiopintaan kuuluva osa on *vaippa*



Kuv. 85.



Kuv. 86.

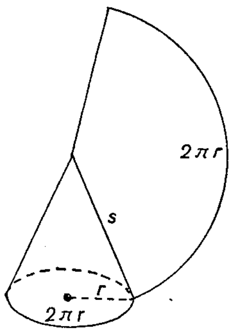


Kuv. 87.

ja mainittuun tasoon kuuluva osa *pohja* (A). Kärjen ja pohjan kohtisuora välijana on kartion *korkeus* (h). Kärjen ja pohjan välinen osa muodostajasuorasta on *sivujana* (s).

Jos pohja on ympyrä, niin kartiota sanotaan *ympyräkartioksi*. Pohjan keskipisteen ja kärjen yhdistysjana on tällöin *akseli*. Ympyräkartio on *suora*, jos sen akseli on kohtisuorassa pohjaa vastaan ja yhtyy siis korkeuteen (kuv. 86). Kaikki suoran ympyräkartion sivujanat ovat yhtäsuuria. Tällainen kartio on *pyöräyskartio*, jonka voidaan ajatella syntyvän suorakulmaisen kolmion pyörähtäessä toisen kateettinsa ympäri, joka silloin on kartion akseli. Hypotenuusa muodostaa kartion vaipan ja toinen kateetti pohjan. Käytännössä puhutaan usein lyhyesti kartiosta, vaikkakin tarkoitetaan nimenomaan suoraa ympyräkartiota.

Kartiota, jonka pohja on monikulmio, sanotaan *pyramidiksi* eli *särmäkartioksi* (kuv. 87). Tämän monitahokkaan »sivutahkot» ovat kolmioita. Näiden lukumäärän mukaan sanotaan pyramidia *kolmi-*, *neli- jne. sivuiseksi*. Jos pyramidin pohja on säännöllinen monikulmio ja korkeus kohtaa sen keskipisteessä, pyramidia sanotaan *säännölliseksi*. Sivutahkot ovat tällöin tasakylkisiä kolmioita.



Kuv. 88.

58 §. Jos suoran ympyräkartion vaippa leikataan auki sivujanaa pitkin sekä levitetään tasolle, niin syntyy ympyränsektori, jonka kaari = kartion pohjan kehä $2\pi r$ (r = pohjan säde) ja säde = sivujana s (kuv. 88). Näin saadaan 53 §:n seur. 2:een nojautuen

Lause: *Jos suoran ympyräkartion pohjan säde = r ja sivujana = s, niin kartion vaippa* = π**rs.**

Harj.teht.: 188) Tornin katto on suoran ympyräkartion muotoinen. Kuinka suuri on sen pinta-ala, jos katon kärkipisteen etäisyys räystäästä on 5,2 m ja räystäsympyrän halkaisija on 3,9 m?

189) Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjan särmä on 6 cm ja sivusärmä 5 cm. Laskettava pyramidin koko pinta-ala. *Ohje:* Sivukolmioiden korkeus lasketaan käyttäen apuna Pythogoraan lausetta.

59 §. Voidaan todistaa, että kartion tilavuus on kolmas osa samapohjaisen ja samankorkuisen lieriön tilavuudesta, joten (56 §, lause 2) on voimassa

Lause: *Kartion tilavuus = pohjan alan ja korkeuden tulon kolmannes:*

$$\mathbf{V = \tfrac{1}{3}Ah.}$$

Seur.: *Jos ympyräkartion pohjan säde = r ja korkeus = h, niin kartion tilavuus*

$$\mathbf{V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.}$$

Harj.teht.: 190) Kuinka suuri on säännöllisen nelisivuisen pyramidin tilavuus, kun pohjan särmä on 8 cm ja korkeus = 15 cm.

191) Kolmisivuisen pyramidin, *tetraedrin*, eräästä kärjestä lähtevät särmät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kuinka suuri on tetraedrin tilavuus, jos mainittujen särmien pituudet ovat 5, 6 ja 7 cm?

192) Pellistä on valmistettu ylösalasin käännetyn suoran ympyräkartion muotoinen astia (suppilo), jonka korkeus on 40 cm ja suun halkaisija 60 cm. Montako litraa astia vetää? Kuinka paljon on astiaan mennyt peltiä?

60 §. Puoliympyrän kaari pyörähtäessään halkaisijansa ympäri muodostaa *pallopinnan*. Puoliympyrän keskipiste on pallopinnan *keskipiste*, ja tämän ja pallopinnan yhdistysjana on *säde*. Kaikki säteet ovat yhtä suuria. *Pallopinta, jonka säde* = r, *on niiden avaruuden pisteiden ura, joiden etäisyys keskipisteestä* = r. Kahden pallopinnalla olevan pisteen yhdistysjana on *jänne*. Keskipisteen kautta kulkeva jänne on *halkaisija*. Siis halkaisija = 2 × säde. Tason ja pallopinnan leikkausviiva on aina ympyrä. Sitä sanotaan *isoksi ympyräksi*, jos taso kulkee pallon keskipisteen kautta, muussa tapauksessa *pikku ympyräksi*.

Pallopinnan rajoittama kappale on *pallo*. Kuitenkin sanotaan pallopintaakin palloksi, silloin kun ei ole syytä pelätä sekaannusta.

Voidaan todistaa

Lause: *Jos pallon säde* $= r$, *niin pallon*

$$\textit{tilavuus}\quad V = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$
$$\textit{pinta-ala}\quad A = 4\pi r^2.$$

Harj. teht.: 193) Kuinka suuri on maapallon pinta-ala ja tilavuus, edellyttäen että maa on pallo, jonka säde = 6 370 km?

194) Näytettävä, että pallon pinta = pallon ympäri piirretyn suoran lieriön vaippa. Huom. Tällaisen lieriön pohjat ja vaippa »sivuavat» palloa.

195) Näytettävä, että *kahden pallon pinta-alojen suhde = säteiden suhteen neliö ja tilavuuksien suhde = säteiden suhteen kuutio.* Sovellutus: Monesko osa maapallon pinta-ala ja tilavuus ovat auringon pinta-alasta ja tilavuudesta, kun auringon halkaisija on noin 100 kertaa niin suuri kuin maapallon halkaisija?

VI. KERTAUSHARJOITUSTEHTÄVIÄ

61 §. 196) Kuinka monta metriä 9 cm levyistä lautaa menee lattiaan, joka on 5,40 m pitkä ja 4,70 m leveä?

197) Puolisuunnikkaan muotoisen tontin kadun viereinen sivu on 40 m ja sitä vastaan kohtisuorat sivut 32,4 m ja 38,7 m. Mikä on tontin hinta, jos 1 m^2 maksaa 8 000 mk?

198) Rakennuksen pituus on 8 m ja leveys 6 m 40 cm sekä kivijalan yläreunasta laskettu sivuseinän korkeus 3 m 80 cm ja päätyseinän korkeus harjalle asti 5 m 70 cm. Kuinka monta metriä 12 cm levyistä lautaa tarvitaan rakennuksen ulkoseinien laudoittamiseen, jos ikkuna- ja oviaukkojen pinta-alat ovat yhteensä 9,5 m^2?

199) Paperille piirretyn alueen pinta-ala määrättiin seuraavasti: Leikattiin alue reunaviivoja pitkin irti ja punnittiin herkällä vaa'alla ensin tämä paperipalanen ja sitten 1 dm^2:n suuruinen pala samaa paperia. Näiksi painoiksi saatiin 873 mg ja 1 240 mg. Kuinka suuri on ko. alueen pinta-ala?

200) Neliön ala on a) 81 m^2, b) 50 m^2, c) 237 cm^2. Kuinka suuri on sen sivu? *Ohje:* b-kohta ratkaistaan neliöjuuren taulukkoa käyttäen ja c-kohta kokeilemalla (mm:n tarkkuudella; vrt. esim. 2 s. 43).

201) Suorakulmaisessa kolmiossa on a) kateetit 5 cm ja 7 cm, b) hypotenuusa 8,7 m ja toinen kateetti 2,6 m. Laskettava tuntematon sivu kahden numeron tarkkuudella.

202) Tasakylkisen kolmion kanta = 18 cm ja kylki = 15 cm. Laskettava a) korkeus, b) ala, c) huippukulma. *Ohje:* c)-kohta lasketaan trig. taulukoiden avulla ja muut ilman niitä.

203) Ympyrän säde on 6 cm. Määrättävä 1 mm tarkkuudella, kuinka kaukana keskipisteestä on 8 cm pituinen jänne? Tehtävä on ratkaistava a) Pythagoraan lauseen avulla, b) trigonometrisia taulukoita käyttäen, c) piirtämällä ja mittaamalla.

204) Ympyrän säde = r. Kuinka suuri on ympyrän sisään piirretyn neliön ala? Montako % se on ympyrän alasta?

205) Suomen kartalla, joka on piirretty mittakaavassa 1 : 3 000 000, on eteläisimmän niemen kärjen etäisyys rajan pohjoisimmasta kohdasta 38,2 cm. Kuinka pitkä tämä matka on todellisuudessa?

206) Kuinka suuri on ed. tehtävässä mainitulla kartalla rautatien pituus Helsingistä Ouluun, kun se todellisuudessa on 753 km?

207) Olkoon janan c projektio eräällä suoralla = b ja kaltevuuskulma saman suoran suhteen = α. Laskettava a) b, kun $c = 7$ cm, $\alpha = 38°$, b) c, kun $b = 2{,}64$ m, $\alpha = 22{,}9°$, c) α, kun $c = 48$ mm, $b = 31$ mm.

208) Saaressa olevan merkin A etäisyys mantereella olevasta pisteestä B määrättiin mantereelta käsin seuraavasti. Asetettiin rannalle B:stä 200 metrin päähän pystyyn seiväs C niin, että $\wedge ABC$ tuli suoraksi. Sitten mitattiin kulmamittarilla $\wedge BCA$ ja saatiin sen suuruudeksi 73,8°. Kuinka suuri on väli AB?

209) Metrin pituudeksi on määritelty 1/10 000 000 maapallon meridiaaniympyrän neljänneksestä (meridiaaniympyrä = napojen kautta kulkeva iso ympyrä). Kuinka suuri on siis maapallon säde? Maa oletetaan täsmälliseksi palloksi.

210) Mikä on sen ympyrän säde, jossa 10 cm pituinen kaari on 32°?

211) Kuinka suuri on 100° kaarta vastaavan segmentin ala, jos ympyrän säde on 1 m?

212) 50 m leveää urheilukenttää reunustaa juoksurata, jonka leveys on 4 m. Sen suorat sivut ovat 125 m pituiset ja kentän päissä on puoliympyrän muotoiset kaarteet. Kuinka pitkä on juoksuradan sisäreuna ja kuinka suuri on juoksuradan pinta-ala? Kuinka suuri on itse kentän ala?

213) Standartti puutavaraa on 4,67 m^3. Montako metriä menee 10 cm leveää ja 2,5 cm paksua lautaa standarttiin?

214) Neliö, jonka sivu on 1 dm, pyörähtää kerran sivunsa ympäri. Kuinka suuri on näin syntyneen lieriön a) tilavuus, b) vaippa, c) koko pinta-ala?

215) Messinkiputken läpileikkaus on ympyränrengas, jonka ulkohalkaisija on 2,5 cm ja sisähalkaisija 2,2 cm. Paljonko painaa 2 m pituinen pala tätä putkea, jos messingin tiheys on 8,3 kg/dm^3?

216) Kuinka paljon joudutaan maata poistamaan, kun kaivetaan 50 m pituinen oja, jonka syvyys on 80 cm, leveys maan pinnassa 70 cm ja pohjalla 30 cm? Ojan läpileikkaus on tasakylkinen puolisuunnikas.

217) Suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 8 ja 6 cm, pyörähtää kerran jälkimmäisen kateetin ympäri. Kuinka suuri on syntyneen kartion a) tilavuus, b) vaippa, c) koko pinta-ala?

218) Paljonko painaa korkkipallo, jonka säde on 1 m? Korkin tiheys on 0,24 kg/dm^3.

219) Ympyrälieriön muotoinen lyijypala valetaan kuuliksi, joiden halkaisija = 2 mm. Kuinka monta niitä saadaan, kun ko. lieriön pohjan halkaisija = 4 cm ja korkeus = 5 cm?

KOLMAS LUKU

Deduktiivinen todistustapa Monikulmioita ja ympyrää koskevia lauseita – Piirtämistehtäviä

Edellisissä luvuissa olemme esittäneet geometrian totuuksia suurelta osalta havaintoon nojautuen. Olemme kuitenkin ennestään tuntemistamme tosiasioista johtaneet uusia *deduktiivisestikin,* so. puhtaasti ajatuksellisesti, havaintoon vetoamatta. Niinpä olemme havaintoon nojaten pitäneet selvänä, että »jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtäsuuret» (17 §, lause 2), ja olemme sitten siitä deduktiivisesti johtaneet lauseen: »kolmion kulmien summa = 180°» (21 §). Ryhtyessämme nyt jatkamaan monikulmioita ja ympyrää koskevien totuuksien esittämistä, tulemme pääasiassa käyttämään deduktiivista todistustapaa.

I. SUUNNIKAS

62 §. Suunnikkaan määritelmä: *Nelikulmiota sanotaan suunnikkaaksi, jos sen molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhdensuuntaiset.*

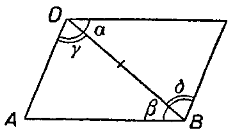
Lause 1: *Suunnikkaan molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhtäsuuret.*

Oletus: $ABCD$ (kuv. 89) on suunnikas.

Väitös: $AB = CD$ ja $AD = CB.$

Tod.: Lävistäjä BD jakaa suunnikkaan kahteen kolmioon, joilla mainittu lävistäjä on yhteisenä sivuna ja

$\wedge\alpha = \wedge\beta$ (17 §, lause 2),
$\wedge\gamma = \wedge\delta$ (» » » »).



Kuv. 89.

Kolmiot ovat siis yhtenevät (ksk), joten niiden vastinsivut ovat yhtäsuuret:
$AB = CD$ ja $AD = CB$, m.o.t.

Seur.: *Yhdensuuntaisten suorien yhdensuuntaiset välijanat ovat yhtäsuuret.*

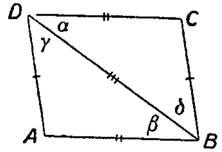
Erikoisesti ovat siis yhdensuuntaisten suorien kohtisuorat välijanat yhtäsuuret. Niiden pituutta sanotaan yhdensuuntaisten *etäisyydeksi* toisistaan eli yhdensuuntaisten *väliksi.*

Lause 2: *Jos nelikulmion molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat yhtäsuuria, niin nelikulmio on suunnikas.*

Oletus: $AB = CD$ ja $AD = CB$ (kuv. 90).

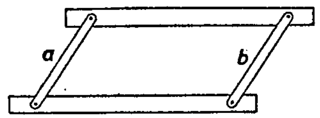
Väitös: $ABCD$ on suunnikas.

Tod.: Lävistäjä BD jakaa nelikulmion kahteen yhtenevään kolmioon (sss). Siis $\wedge\alpha = \wedge\beta$, joten $AB \parallel CD$ (17 §, lause 1). Samoin päätellään, että $AD \parallel CB$. Siis $ABCD$ on suunnikas, m.o.t.



Kuv. 90.

Lauseen 1 oletus on lauseen 2 väitös, ja kääntäen: lauseen 1 väitös on lauseen 2 oletus. Kahta tällaista lausetta, joissa siis oletus ja väitös vaihtavat paikkaansa, sanotaan toistensa *käänteislauseiksi.*



Kuv. 91.

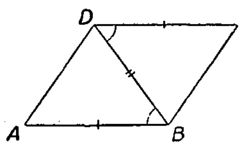
Lauseeseen 2 perustuu *yhdensuuntaisviivoitin* (kuv. 91), jonka avulla piirretään eri etäisyyksillä olevia yhdensuuntaisia. Se koostuu kahdesta yhtä pitkästä viivoittimesta, jotka ovat toisiinsa nivelletyt kahden yhtä pitkän yhdistäjän (a ja b) avulla.

Harj.teht.: 220) Todistettava, että suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtäsuuret (voidaan todistaa nojautumalla kolmioiden yhtenevyyteen tai 18 §:n lauseeseen 1). Millaisia ovat vierekkäiset kulmat?

221) Suunnikkaan yksi kulma on a) 67° 18′ 44″ b) α. Kuinka suuret ovat muut kulmat?

222) Piirrettävä astelevyä käyttämättä suunnikas, jonka yksi kulma on 45° ja tämän viereiset sivut kahden tunnetun janan suuruiset.

63 §. Lause: *Jos nelikulmion toinen pari vastakkaisia sivuja on sekä yhdensuuntaiset että yhtäsuuret, niin nelikulmio on suunnikas.*



Kuv. 92.

Oletus: $AB \parallel CD$ ja $AB = CD$ (kuv. 92).

Väitös: $ABCD$ on suunnikas.

Tod.: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (sks). Siis $AD = CB$, joten $ABCD$ on suunnikas (62 §, lause 2), m.o.t.

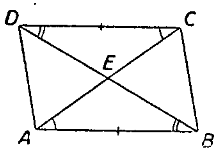
On siis huomattava, että suunnikkaan määritelmän, ed. §:n lauseen 2 ja juuri todistetun lauseen mukaan nelikulmio on suunnikas, jos siinä

a) molemmat parit vastakkaisia sivuja ovat joko yhdensuuntaiset tai yhtäsuuret,

b) toinen pari vastakkaisia sivuja on sekä yhdensuuntaiset että yhtäsuuret.

Harj.teht.: 223) Todistettava, että jos suoran kaksi pistettä ovat yhtä kaukana toisesta suorasta ja samalla puolella sitä, niin suorat ovat yhdensuuntaiset.

64 §. Lause 1: *Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.*



Kuv. 93.

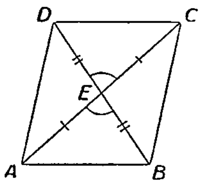
Oletus: $ABCD$ on suunnikas (kuv. 93).

Väitös: $EA = EC$ ja $EB = ED$.

Tod.: $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (ksk). Siis $EA = EC$ ja $EB = ED$, m.o.t.

Edellinen lause pätee käänteisestikin:

Lause 2: *Jos nelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa, niin nelikulmio on suunnikas.*



Kuv. 94.

Oletus: $EA = EC$ ja $EB = ED$ (kuv. 94).

Väitös: $ABCD$ on suunnikas.

Tod.: $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (sks). Siis $AB = CD$. Samalla tavalla näytetään, että $AD = CB$. Siis $ABCD$ on suunnikas (62 §, lause 2), m.o.t.

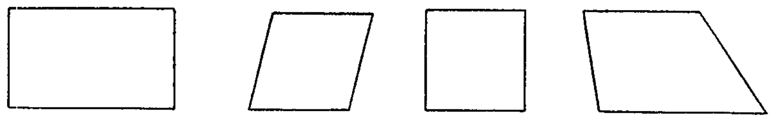
Harj.teht.: 224) Piirrettävä suunnikas, jonka lävistäjät ovat kahden annetun janan pituiset, kun tunnetaan lisäksi a) lävistäjien välinen kulma, b) yksi sivu. *Ohje:* Määrätään ensin annettujen janojen keskipisteet.

65 §. Suunnikasta, jonka kaikki kulmat ovat yhtäsuuria ja siis suoria, sanotaan *suorakulmioksi* eli *suorakaiteeksi* (kuv. 95 a).

Suunnikasta, jonka kaikki sivut ovat yhtä suuria, sanotaan *neljäkkääksi* (kuv. 95 b ja c).

Jos neljäkkään kulmat ovat suoria, se on *neliö* (kuv. 95 c), muussa tapauksessa *vinoneliö* (kuv. 95 b).

Kuten jo aikaisemmin mainittu, nelikulmiota, jossa vain toiset vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, sanotaan *puolisuunnikkaaksi* (kuv. 95 d).



a. Suorakulmio. b. Vinoneliö. c. Neliö. d. Puolisuunnikas.

Kuv. 95.

Harj.teht.: 225) Piirrettävä suorakulmio, kun tunnetaan sen vierekkäiset sivut.

226) Piirrettävä neljäkäs, kun tunnetaan sen sivu ja yksi kulma.

227) Todistettava, että suorakulmion lävistäjät ovat yhtäsuuret. *Ohje:* Todistetaan yhteneviksi kaksi kolmiota, joiden vastinsivuina lävistäjät ovat.

228) Todistettava, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. *Ohje:* Todistetaan niistä neljästä kolmiosta, joihin lävistäjät jakavat neljäkkään, kaksi vierekkäistä yhteneviksi.

229) Todistettava, että suunnikas, jonka lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, on neljäkäs.

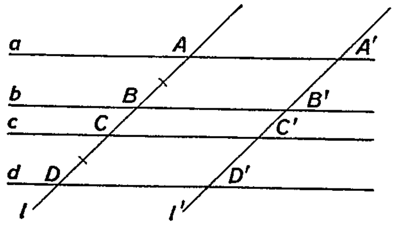
230) 19 §:n teht. 1 on ratkaistava piirtämällä jokin neljäkäs, jonka yksi kärki on annetussa pisteessä ja yksi sivu annetulla suoralla.

II. YHTÄSUURIVÄLISET YHDENSUUNTAISET

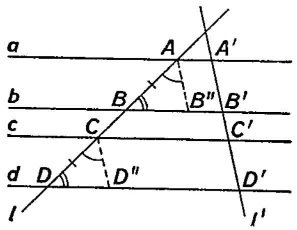
66 §. Lause: *Jos yhdensuuntaiset suorat* (a, b, c ja d, kuv. 96) *erottavat jostakin suorasta* (l) *yhtäsuuret osat* (AB ja CD), *niin niiden jokaisesta muustakin suorasta* (l') *erottamat vastaavat osat* ($A'B'$ ja $C'D'$) *ovat yhtäsuuret.*

Tod.: 1) Jos $l \parallel l'$ (kuv. 96 a), niin

$AB = A'B'$, $CD = C'D'$ (62 §, lause 1).



Kuv. 96 a.



Kuv. 96 b.

Koska näiden yhtälöiden vasemmat puolet ovat oletuksen mukaan yhtäsuuret, niin myös oikeat puolet ovat yhtäsuuret, m.o.t.

2) Jos l ja l' eivät ole yhdensuuntaiset (kuv. 96 b), niin piirretään AB'' ja $CD'' \parallel l'$. Silloin

$$\triangle ABB'' \cong \triangle CDD'' \text{ (ksk)},$$

joten

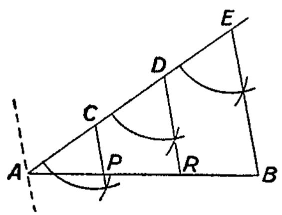
$$AB'' = CD''.$$

Mutta koska tämän yhtälön vasen puoli $= A'B'$ ja oikea puoli $= C'D'$ (62 §, seur.), niin nämäkin janat ovat yhtäsuuret, m.o.t.

Seur. 1: *Jos kolmion sivun suuntainen suora puolittaa toisen sivun, niin se puolittaa kolmannenkin.*

Tämä sisältyy edelliseen lauseeseen sellaisena erikoistapauksena, jossa a kulkee suorien l ja l' leikkauspisteen kautta ja b ja c yhtyvät samaksi suoraksi (piirrettävä kuvio!).

Seur. 2: *Jos puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen suuntainen suora puolittaa toisen erisuuntaisista sivuista, niin se puolittaa toisenkin.*



Kuv. 97.

Teht.: *Jana* (AB, kuv. 97) *on jaettava n:ään yhtäsuureen osaan.*

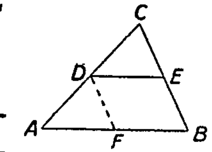
Ratk.: Olkoon esim. $n = 3$. Piirretään suorasta AB erillinen, A:sta alkava puolisuora, ja erotetaan siitä peräkkäin kolme yhtäsuurta janaa $AC = CD = DE$. Yhdistetään sitten

E ja B ja piirretään CP ja $DR \parallel EB$. Kun vielä ajatellaan A:n kautta piirretyksi EB:n suuntainen suora, niin voidaan edellisen lauseen mukaan päättää, että $AP = PR = RB$.

Harj.teht.: 231) Jana on jaettava a) viiteen, b) seitsemään yhtäsuureen osaan. a)-kohdassa on yhdensuuntaiset piirrettävä harppia ja viivoitinta käyttäen (19 §, teht. 1) ja b)-kohdassa taas viivoitinta ja kulmaviivoitinta käyttäen (16 §, teht.).

67 §. Lause: *Kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdistysjana on kolmannen sivun suuntainen ja puolet siitä.*

Oletus: D ja E ovat sivujen AC ja BC keskipisteet (kuv. 98).



Kuv. 98.

Väitös: 1) $DE \parallel AB$, 2) $DE = \frac{1}{2}AB$.

Tod.: 1) Jos D:n kautta piirretään sivun AB suuntainen suora, niin se puolittaa sivun BC (66 §, seur. 1) ja kulkee siis pisteen E kautta. Koska se niin ollen yhtyy DE:hen, niin myös $DE \parallel AB$.

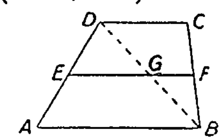
2) Kun piirretään $DF \parallel BC$, niin se puolittaa sivun AB (66 §, seur. 1), joten $FB = \frac{1}{2}AB$. Koska $DE = FB$ (62 §, seur.), niin myös $DE = \frac{1}{2}AB$.

Harj.teht.: 232) Todistettava, että jos nelikulmion kaikkien vierekkäisten sivujen keskipisteet yhdistetään, niin syntyy suunnikas. *Ohje:* Piirretään nelikulmion lävistäjät.

68 §. Lause: *Puolisuunnikkaan erisuuntaisten sivujen keskipisteiden yhdistysjana on yhdensuuntaisten sivujen suuntainen ja puolet niiden summasta, so. niiden keskiarvo.*

Oletus: E ja F ovat puolisuunnikkaan $ABCD$ erisuuntaisten sivujen keskipisteet (kuv. 99).

Väitös: 1) $EF \parallel AB$ ja DC, 2) $EF = \frac{1}{2}(AB+DC)$.



Kuv. 99.

Tod.: 1) Jos E:n kautta piirretään sivujen AB ja DC suuntainen suora, niin se puolittaa sivun BC (66 §, seur. 2) ja kulkee siis F:n kautta. Siis $EF \parallel AB$ ja DC.

2) Suora EF kulkee lävistäjän BD keskipisteen G kautta (66 §, seur. 1). Edelleen on

$EG = \frac{1}{2}AB$ (67 §:n lause $\triangle ABD$:hen sovellettuna),

$GF = \frac{1}{2}DC$ (» » » $\triangle CDB$:hen »).

Yhteenlaskemalla saadaan näistä:

$$EF = EG + GF = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}DC = \tfrac{1}{2}(AB + DC).$$

Harj.teht.: 233) Puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut ovat 2,8 ja 5,9 cm. Kuinka suuri on sen erisuuntaisten sivujen keskipisteiden yhdistysjana? On piirrettävä sitten jokin tällainen puolisuunnikas ja siihen mainittu keskipisteiden yhdistysjana sekä mitattava sen pituus.

III. URAKÄSITE — KOLMION YMPÄRI JA SISÄÄN PIIRRETYT YMPYRÄT

69 §. Ympyräviiva, jonka keskipiste on O ja säde $= r$, on kaikkien niiden pisteiden muodostama, joiden etäisyys O:sta $= r$ (vrt. 1 §). Geometriassa ilmaistaan tämä sama asia tavallisesti seuraavasti:

Ympyräviiva, jonka keskipiste on O ja säde $= r$, on niiden pisteiden u r a, *joiden etäisyys O:sta $= r$.*

Tähän sanontaan sisältyy seuraavat kaksi asiaa:

1) *ympyräviivan jokaisen pisteen etäisyys O:sta $= r$,*

2) *jokainen piste, jonka etäisyys O:sta $= r$, on ympyräviivalla.*

Jälkimmäisen kohdan asemesta voidaan sanoa myös:

2′) *jokaisen muun pisteen etäisyys O:sta $\neq r$.* Onhan jokaisen ympyräviivan sisäpuolella olevan pisteen etäisyys O:sta $< r$ ja ulkopuolella olevan $> r$.

Harj.teht.: 234) Jos emme rajoitu samaan tasoon, niinkuin 4 §:n lopussa tehdyn sopimuksen mukaisesti yllä olemme tehneet, vaan tarkastelemme kaikkia avaruuden pisteitä, niin mikä on silloin niiden pisteiden ura, joiden etäisyys O:sta $= r$?

235) Mikä on niiden ympyröiden keskipisteiden ura, jotka kulkevat annetun pisteen kautta ja joiden säde = annettu jana?

236) Kuvioissa 100 a, b ja c on kussakin viiva ja piste O. Kunkin kuvion suhteen on vastattava kysymyksiin:

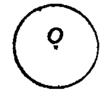
α) onko viivan jokaisen pisteen etäisyys O:sta = 5 mm?

β) onko jokainen piste, jonka etäisyys O:sta = 5 mm, ko. viivalla?

Mikä näistä viivoista siis on niiden pisteiden ura, eli kaikkien niiden pisteiden muodostama, joiden etäisyys O:sta = 5 mm?

Kuv. 100 a.

Kuv. 100 b.

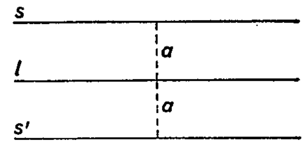


Kuv. 100 c.

70 §. Lause: *Niiden pisteiden ura, jotka ovat määrätyllä etäisyydellä* (a) *suorasta* (l, kuv. 101), *on kaksi tämän suoran suuntaista suoraa* (s ja s'), *jotka ovat ko. etäisyydellä siitä.*

Tod.: 1) suorien s ja s' jokaisen pisteen etäisyys l:stä $= a$,

2) jokaisen muun pisteen etäisyys l:stä on $\lessgtr a$ sen mukaan, onko piste s:n ja s':n välisessä kaistaleessa vai sen ulkopuolella.



Kuv. 101.

Siis suorat s ja s' ovat todellakin kaikkien niiden pisteiden muodostamat, joiden etäisyys l:stä $= a$, ja näin onkin lauseemme todistettu.

Teht.: *Piirrettävä niiden pisteiden ura, jotka ovat määrätyllä etäisyydellä* (a) *tunnetusta suorasta* (l).

Harj.teht.: 237) Miksi ei toinen suorista s ja s' yksinään ole ed. lauseessa puheena oleva ura?

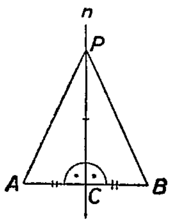
238) Jos ei rajoituta samaan tasoon, niin mikä on silloin niiden pisteiden ura, jotka ovat määrätyllä etäisyydellä tunnetusta suorasta?

239) Mikä on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta? Ura on myös piirrettävä.

240) Määrättävä pisteet, joiden etäisyydet kahdesta toisiaan leikkaavasta suorasta ovat annetun janan (a) suuruiset. *Ohje:* Piirretään ensin niiden pisteiden ura, joiden etäisyys toisesta suorasta $= a$. Sitten ratkaistaan sama tehtävä toiseenkin suoraan nähden. Näiden urien leikkauspisteet ovat haetut pisteet.

241) Määrätty jana (r) säteenä on piirrettävä ympyrä, joka sivuaa annettua suoraa (l) ja a) jonka keskipiste on annetulla viivalla (v), b) joka kulkee annetun pisteen (P) kautta. *Ohje:* Piirrettävän ympyrän keskipiste on niiden pisteiden uralla, joiden etäisyys l:stä $= r$, ja sitä paitsi a)-tapauksessa v:llä ja b)-tapauksessa harj.tehtävässä 235 puheena olevalla uralla.

71 §. Lause 1: *Janan keskinormaalin jokainen piste on yhtä kaukana janan päätepisteistä.*



Kuv. 102.

Oletus: P on janan AB keskinormaalilla n (kuv. 102).

Väitös: $PA = PB$.

Tod.: $\triangle PCA \cong \triangle PCB$ (sks) ja siis $PA = PB$.

Aikaisemmin (23 §, seur. 2) olemme todistaneet edellisen lauseen käänteislauseen:

Lause 2: *Jokainen piste, joka on yhtä kaukana janan päätepisteistä, on janan keskinormaalilla.*

Molemmat lauseet voidaan yhdistää uralauseeksi:

Seur.: *Janan keskinormaali on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä.*

Harj.teht.: 242) On piirrettävä viiva, jonka jokainen piste on yhtä kaukana annetun janan päätepisteistä, mutta joka silti ei ole niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä (vrt. harj.teht. 236).

243) On piirrettävä sellainen viiva, että jokainen piste, joka on yhtä kaukana annetun janan päätepisteistä, on viivalla, mutta joka silti ei ole niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä.

244) Jos otetaan huomioon kaikki avaruuden pisteet, niin mikä on silloin niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä?

245) Merkittävä paperille kaksi pistettä, joiden väli = 4 cm. Sitten on piirrettävä näiden pisteiden kautta ympyräviivat, joiden säteet ovat a) 5 cm, b) 4 cm, c) 3 cm, d) 2 cm. *Ohje:* Määrätään ensin ympyröiden keskipisteet (vrt. 33 §, teht.).

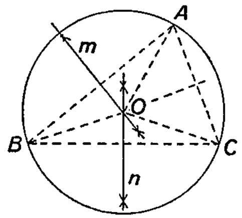
246) Mikä on niiden ympyröiden keskipisteiden ura, jotka kulkevat kahden annetun pisteen kautta?

72 §. Teht.: *Kolmen pisteen* (A, B ja C, kuv. 103) *kautta on piirrettävä ympyrä.*

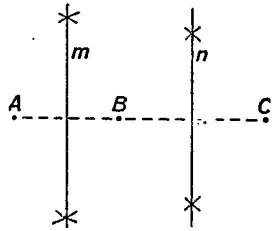
Ratkaisun johto: Koska piirrettävän ympyrän keskipisteen O tulee olla yhtä kaukana (säteen etäisyydellä) pisteistä A ja B, niin se on janan AB keskinormaalilla m (ed. §, lause 2). Samalla tavalla päätellään, että O on myös janan BC keskinormaalilla n. Keskipiste O on siis normaalien m ja n leikkauspiste.

Ratk.: Piirretään mainitut keskinormaalit m ja n ja

sitten niiden leikkauspiste O keskipisteenä ympyrä B:n kautta. Se kulkee silloin myös A:n ja C:n kautta, sillä onhan $OA = OB$ ja $OC = OB$ (ed. §, lause 1).



Kuv. 103 a.



Kuv. 103 b.

Tark.: 1) Jos A, B ja C eivät ole samalla suoralla (kuv. 103 a), niin voidaan piirtää yksi ympyrä.

2) Jos A, B ja C ovat samalla suoralla (kuv. 103 b), niin ei voida piirtää yhtään ympyrää, koska m ja n ovat tällöin yhdensuuntaiset (17 §, **seur. 1**) joten keskipistettä O ei ole olemassa.

Esitetyn tarkastelun perusteella voidaan kirjoittaa

Lause 1: *Kolmen pisteen kautta voidaan piirtää yksi ympyrä, jos pisteet eivät ole samalla suoralla, mutta ei yhtään, jos pisteet ovat samalla suoralla.*

Seur.: *Kahdella eri ympyräviivalla, samoinkuin suoralla ja ympyräviivalla voi olla enintään kaksi yhteistä pistettä.*

Jos ympyrä kulkee monikulmion kaikkien kärkien kautta, niin ympyrää sanotaan *monikulmion ympäri piirretyksi*, ja kääntäen: monikulmiota sanotaan *ympyrän sisään piirretyksi.* Monikulmiota sanotaan tällöin myös *jännemonikulmioksi*, koska sen sivut ovat ympyrän jänteitä.

Kuviossa 103 a on $\triangle ABC$:n ympäri piirretty ympyrä. Piirroksen mukaan keskipiste O on sivujen AB ja BC keskinormaaleilla m ja n. Koska $OA = OC$, niin O on myös sivun AC keskinormaalilla (ed. §, lause 2). Siis on voimassa

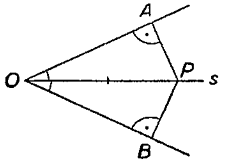
Lause 2: *Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.*

Harj.teht.: 247) Piirrettävä kolmio, jonka sivut ovat 3,8, 4,3, ja 5,2 cm ja sen ympäri ympyrä. Kuinka suuri on ympyrän säde?

248) Piirrettävä a) teräväkulmainen, b) suorakulmainen, c) tylppäkulmainen kolmio ja kunkin kolmion sivujen keskinormaalit. Mitä havaitaan keskinormaalien leikkauspisteen paikasta itse kolmioon nähden eri tapauksissa?

249) Piirrettävä ympyrä, jonka kehä kulkee kahden annetun pisteen kautta ja jonka keskipiste on annetulla suoralla.

73 §. Lause 1: *Koveran kulman puolittajan jokainen piste on yhtä kaukana kulman kyljistä.*



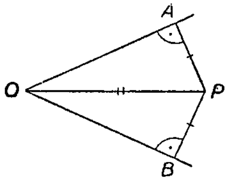
Kuv. 104.

Oletus: P on koveran kulman O puolittajalla s (kuv. 104).

Väitös: Normaali PA = normaali PB.

Tod.: $\triangle POA \cong \triangle POB$ (kks). Siis $PA = PB$.

Lause 2: *Jokainen piste, joka on yhtä kaukana koveran kulman kyljistä, on kulman puolittajalla.*



Kuv. 105.

Oletus: Normaali PA = normaali PB (kuv. 105).

Väitös: P on kulman O puolittajalla.

Tod.: $\triangle POA \cong \triangle POB$ (ssk). Siis $\wedge POA = \wedge POB$, joten P on kulman O puolittajalla.

Molemmat lauseet voidaan yhdistää uralauseeksi:

Seur.: *Koveran kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kulman kyljistä.*

Harj.teht.: 250) Mikä on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kahdesta toisiaan leikkaavasta suorasta? Ura on piirrettävä.

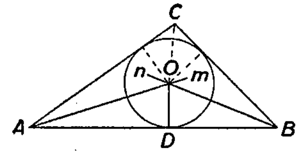
251) On piirrettävä mielivaltainen kovera kulma ja sen sisälle jokin viiva. Sitten on määrättävä viivalla sellainen piste, joka on yhtä kaukana kulman kyljistä.

74 §. Jos ympyrä sivuaa monikulmion kaikkia sivuja, niin ympyrää sanotaan *monikulmion sisään piirretyksi*, ja kääntäen: monikulmiota sanotaan *ympyrän ympäri piirretyksi.*

Teht.: *Kolmion* (ABC, kuv. 106) *sisään on piirrettävä ympyrä.*

Ratkaisun johto: Koska piirrettävän ympyrän keskipisteen O on oltava yhtä kaukana (säteen etäisyydellä) sivuista AB ja AC (31 §, kohta c)), niin se on kulman A puolittajalla m (ed. §, lause 2). Samalla tavalla päätellään, että O on myös kulman B puolittajalla n. O on siis puolittajien m ja n leikkauspiste.

Ratk.: Piirretään mainitut puolittajat m ja n. Niiden leikkauspisteestä O piirretään $OD \perp AB$. O keskipisteenä ja OD säteenä piirretään sitten ympyrä. Koska O:n etäisyys kaikista kolmion sivuista = ympyrän säde OD (ed. §, lause 1), niin ympyrä sivuaa kolmion sivuja (31 §, kohta c)).



Kuv. 106.

Tark.: Voidaan piirtää aina yksi ympyrä.

Koska O on yhtä kaukana kulman C kyljistä, niin O on myös tämän kulman puolittajalla. Siis on voimassa

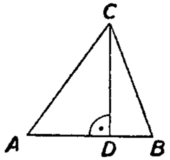
Lause: *Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.*

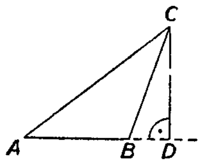
Harj.teht.: 252) Kolmion kaksi sivua on 4 ja 5 cm ja niiden välinen kulma 45°. Piirrettävä astelevyä käyttämättä kolmio ja sitten sen sisään ympyrä. Kuinka suuri on ympyrän säde?

253) Piirrettävä ympyrä, joka sivuaa yhtä kolmion sivua ja molempien muiden sivujen jatkeita.

IV. KOLMION KORKEUS- JA KESKIJANAT

75 §. Kolmion kärjen kautta vastakkaista sivua vastaan piirrettyä kohtisuoraa sanotaan kolmion *korkeussuoraksi* ja kärjen ja sivun välistä osaa siitä kolmion *korkeusjanaksi* eli lyhyesti *korkeudeksi.* Vastakkaista sivua

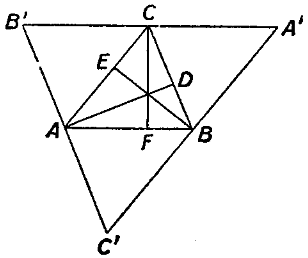

Kuv. 107 a.


Kuv. 107 b.

sanotaan tässä yhteydessä kolmion *kannaksi*. Kuvioissa 107 a ja b on kolmioissa ABC esim. jana CD korkeus ja sivu AB vastaava kanta. On huomattava, että jälkimmäisessä, tylppäkulmaisessa kolmiossa, on korkeuden määräämistä varten tarpeellista jatkaa kantaa.

Lause: *Kolmion korkeussuorat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.*

Tod.: Piirretään annetun kolmion ABC (kuv. 108) kärkien kautta vastakkaisten sivujen suuntaiset suorat. Näin syntyy uusi kolmio $A'B'C'$. Todistamme, että alkuperäisen kolmion korkeussuorat AD, BE ja CF ovat uuden kolmion sivujen keskinormaaleja, mistä voimme päättää, että ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä (72 §, lause 2).


Kuv. 108.

Koska nelikulmio $ABCB'$ on suunnikas (62 §, määritelmä), niin $B'C = AB$ (62 §, lause 1). Samoin päätellään, että $CA' = AB$, Siis $B'C = CA'$, joten C on sivun $A'B'$ keskipiste. Koska $CF \perp AB$ ja $A'B' \parallel AB$, niin $CF \perp A'B'$ (17 §, seur. 2). Suora CF on niin ollen sivun $A'B'$ keskinormaali. Samoin voidaan näyttää, että suora BE on sivun $A'C'$ ja suora AD sivun $B'C'$ keskinormaali.

Harj.teht.: 254) Kolmion kanta on 57 mm ja sen viereiset kulmat 41° ja 112°. Määrättävä piirtämällä ja mittaamalla kolmion korkeus.

255) Piirrettävä a) teräväkulmainen, b) tylppäkulmainen, c) suorakulmainen kolmio ja kunkin kolmion korkeussuorat. Mitä havaitaan korkeussuorien leikkauspisteen paikasta itse kolmioon nähden eri tapauksissa?

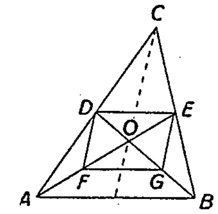
256) Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kanta, toinen kannan viereisistä kulmista (»kantakulmista») ja korkeus (ks. 70 §).

76 §. Kolmion kärjen ja vastakkaisen sivun keskipisteen yhdistysjanaa sanotaan *keskijanaksi* eli *mediaaniksi*.

Lause: *Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka erottaa kustakin keskijanasta sivun puolelle kolmannen osan.*

Tod.: Olkoon O (kuv. 109) keskijanojen AE ja BD leikkauspiste ja F ja G janojen AO ja BO keskipisteet. Silloin

$DE \parallel AB$ ja $DE = \frac{1}{2}AB$ (67 §, lause),
$FG \parallel AB$ ja $FG = \frac{1}{2}AB$ (» » »).


Kuv. 109.

Tästä seuraa, että

$$DE \parallel FG \text{ ja } DE = FG.$$

Siis nelikulmio $DEGF$ on suunnikas (63 §, lause), joten $EO = OF$ (64 §, lause 1). Koska lisäksi piirroksen mukaan $OF = FA$, niin $EO = \frac{1}{3}AE$.

Koska siis B:stä piirretty keskijana erottaa keskijanasta AE sivun puolelle kolmannen osan, niin tietysti C:stä piirretty keskijana tekee samoin, joten sekin kulkee O:n kautta. Näin onkin lause kokonaisuudessaan todistettu.

Olemme siis nähneet (72, 74—76 §), että *kolmiossa*

a) sivujen keskinormaalit,
b) kulmien puolittajat,
c) korkeussuorat,
d) keskijanat

leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Näitä neljää leikkauspistettä sanotaan *kolmion merkillisiksi pisteiksi.*

Harj.teht.: 257) Kolmion kaksi sivua ovat 5 cm ja 7 cm ja jälkimmäisen vastainen kulma 30°. On määrättävä piirtämällä (astelevyä käyttämättä) ja mittaamalla keskijanojen pituudet. Sitten on laskettava keskijanojen leikkauspisteen etäisyydet kolmion kärjistä.

258) Piirrettävä a) tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on 30°, b) tasasivuinen kolmio ja määrättävä kummankin merkilliset pisteet.

259) Todettava p i i r t ä m ä l l ä, että kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste, korkeussuorien leikkauspiste ja keskijanojen leikkauspiste ovat samalla suoralla. Onko myös kulmien puolittajien leikkauspiste tällä suoralla? *Ohje:* Kuvion selvyyden vuoksi on edullisinta piirtää tylppäkulmainen kolmio, joka ei ole tasakylkinen.

V. KOLMION SIVUJEN JA KULMIEN SUURUUSSUHTEISTA

77 §. Lause 1: *Kolmiossa ovat yhtäsuurien sivujen vastaiset kulmat yhtäsuuret.*

Tämä lause on vain toisin sanoin lausuttuna jo ennen todistettu 23 §:n lause 1 a.

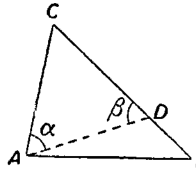
Lause 2: *Kolmiossa on suuremman sivun vastainen kulma suurempi kuin pienemmän.*

Oletus: $CB > CA$ (kuv. 110).

Väitös: $\wedge A > \wedge B$.

Tod.: Oletuksesta seuraa, että janalla CB on sellainen piste D, että $CD = CA$. Ed. lauseen mukaan on silloin

$$\wedge\alpha = \wedge\beta.$$



Kuv. 110.

Mutta koska toiselta puolen

$$\wedge A > \wedge\alpha,$$

$$\wedge B < \wedge\beta \text{ (21 §, seur. 2),}$$

niin

$$\wedge A > \wedge B, \text{ m.o.t.}$$

78 §. Näytämme nyt, että molempien edellisten lauseiden käänteislauseetkin ovat voimassa.

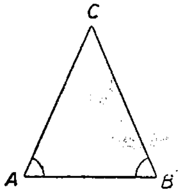
Lause 1: *Kolmiossa ovat yhtäsuurien kulmien vastaiset sivut yhtäsuuret.*

Oletus: $\wedge A = \wedge B$ (kuv. 111).

Väitös: $CB = CA$.

Tod.: Jos väitös ei olisi oikea, niin olisi

$$CB \gtrless CA.[1]$$



Kuv. 111.

Mutta silloin olisi ed. §:n lauseen 2 mukaan myös

$$\wedge A \gtrless \wedge B,$$

mikä on vastoin oletusta. Siis väitös on oikea

[1] Ks. alimuist. 2 siv. 3.

Tässä käytettyä todistustapaa sanotaan *epäsuoraksi.* Tällaisessa todistuksessa lähdetään tarkastelemaan, mitä seuraisi, jos väitös ei olisikaan oikea. Ja jos näin johdutaan tulokseen, joka on ristiriidassa oletuksen tai jonkin ennestään tunnetun tosiasian kanssa, niin voidaan päättää, että väitöksen täytyy olla oikea.

Epäsuoran todistuksen vastakohtana sanotaan tavanmukaista todistustapaa *suoraksi.*

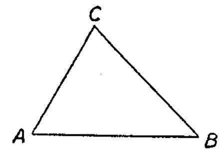
Lause 2: *Kolmiossa on suuremman kulman vastainen sivu suurempi kuin pienemmän.*

Oletus: $\wedge A > \wedge B$ (kuv. 112).

Väitös: $CB > CA$.

Tod.: Jos väitös ei olisi oikea, olisi

$$CB \leqq CA.$$



Kuv. 112.

Mutta silloin olisi ed. §:n lauseiden 1 ja 2 mukaan

$$\wedge A \leqq \wedge B,$$

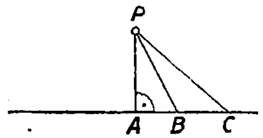
mikä on vastoin oletusta. Siis väitös on oikea.

Seur. 1: *Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on suurempi kuin molemmat kateetit.*

Seur. 2: *Tylppäkulmaisen kolmion tylpän kulman vastainen sivu on suurempi kuin molemmat muut sivut.*

Seur. 3: *Pisteen ja suoran välisistä janoista on normaali pienin. Välijana suurenee, kun sen suoralla oleva pääte- piste liikkuu normaalin kantapisteestä poispäin.*

Jos näet jana PA (kuv. 113) on normaali, niin $PB > PA$ (seur. 1) ja $PC > PB$ (seur. 2).



Kuv. 113.

79 §. Lause 1: *Kolmiossa on kahden sivun summa suurempi ja erotus pienempi kuin kolmas sivu.*

Lauseen edellinen osa ei kaipaa todistusta, kun nojaamme siihen tosiasiaan, että kahden pisteen välinen jana on pienempi kuin jokainen muu pisteiden välinen viiva. Jälkimmäinen osa taas voidaan johtaa edellisestä seuraavasti. Jos kolmion sivut ovat a, b ja c, niin edellisen osan mukaan on siis

$$a+b > c.$$

Kun vasemmalla ja oikealla puolella olevista erisuurista janoista vähennetään sama jana b, saadaan tulokseksi

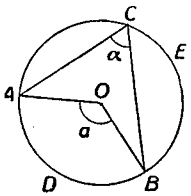
$$a > c-b,$$

joten $c-b < a$.

Harj.teht.: 260) Todistettava epäsuorasti 16 §:n seur. 1 ja 2. *Ohje:* Todistuksessa joudutaan ristiriitaan saman §:n lauseen kanssa.

261) **Lause:** *Kahden toisensa leikkaavan suoran normaalitkin leikkaavat toisensa. Ohje:* Epäsuorassa todistuksessa nojataan 17 §:n seur. 2:een ja joudutaan ristiriitaan 14 §:n lauseen kanssa.

VI. KEHÄKULMA JA TANGENTTIKULMA



Kuv. 114.

80 §. Koveraa kulmaa, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet leikkaavat ympyrää, sanotaan *kehäkulmaksi.* Kuvissa 114

$\wedge\alpha$ on *kehäkulma,*

$\wedge a$ » $\wedge$ *α:aa vastaava keskuskulma.*

Edelleen käytetään sanontoja:

$\wedge\alpha$ on *kaarta ADB* *v a s t a a v a* *kehäkulma,*
kaaren AEB *s i s ä l t ä m ä* » .

Harj.teht.: 262) Piirrettävä kaksi erisuurta ympyrää ja toiseen niistä jokin terävä ja toiseen tylppä kehäkulma sekä niitä vastaavat keskuskulmat. Mitattava näiden kulmien suuruudet ja laskettava kummassakin ympyrässä kehäkulman ja keskuskulman astelukujen suhde (desimaalilukuna).

Lause: *Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.*

Tod.: Erotetaan seuraavat kolme tapausta sen mukaan, missä ympyrän keskipiste O on kehäkulman α suhteen:

1) *O on α:n kyljellä* (kuv. 115 a). Koska

$$\alpha+\alpha' = a \text{ (21 §, seur. 1),}$$
$$\alpha = \alpha' \text{ (23 §, lause 1 a),}$$

niin $\alpha = \frac{a}{2}$.

2) *O on α:n sisäpuolella* (kuv. 115 b). Tapauksen 1 nojalla saadaan

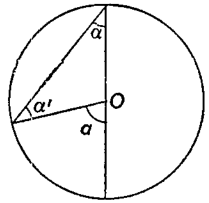
$$\alpha = \beta + \gamma = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{b+c}{2} = \frac{a}{2},$$

joten $\alpha = \frac{a}{2}$.

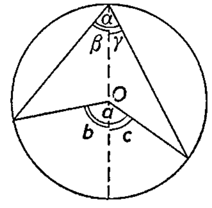
3) *O on α:n ulkopuolella* (kuv. 115 c). Tapauksen 1 nojalla saadaan

$$\alpha = \beta - \gamma = \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-c}{2} = \frac{a}{2},$$

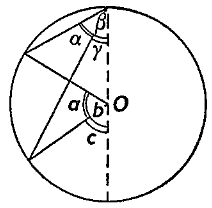
joten $\alpha = \frac{a}{2}$.



Kuv. 115 a.



Kuv. 115 b.



Kuv. 115 c.

Koska kaaren asteluku = vastaavan keskuskulman asteluku, saadaan

Seur. 1: *Kehäkulman asteluku on puolet vastaavan kaaren asteluvusta.*

Seur. 2: *Samaa kaarta* (*ADB*, kuv. 116) *ja samanasteisia kaaria vastaavat kehäkulmat ovat yhtäsuuria, ja kääntäen: yhtäsuuria kehäkulmia vastaavat kaaret ovat samanasteiset.*

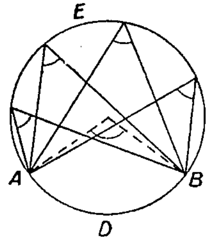
Seur. 3: *Saman kaaren* (*AEB*, kuv. 116) *ja samanasteisten kaarien sisältämät kehäkulmat ovat yhtäsuuria.*

Seur. 4: *Puoliympyrän* (*AEB*, kuv. 117) *sisältämät kehäkulmat ovat suoria.*

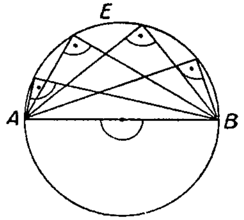
Seur. 5: *Eksplementtikaarien sisältämät kehäkulmat ovat supplementtikulmia.*

Onhan näet eksplementtikaarien AB (kuv. 118) sisältämien kehäkulmien α ja β summa

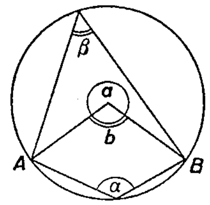
$$\alpha+\beta = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{360°}{2} = 180°.$$



Kuv. 116.



Kuv. 117.



Kuv. 118.

Harj.teht.: 263) Kuinka suuri on a) 60° kaarta vastaava, b) 60° kaaren sisältämä kehäkulma. Tehtävä ratkaistava α) laskemalla, β) piirtämällä ja mittaamalla.

264) Kuinka suuri on yleisesti a) α° kaarta vastaava, b) α° kaaren sisältämä kehäkulma?

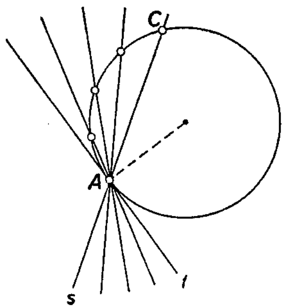
265) Mikä on sen kaaren asteluku, jonka sisältämä kehäkulma on 112°? Tehtävä ratkaistava a) laskemalla, b) piirtämällä ja mittaamalla.

266) Kuinka kehäkulman puolittaja jakaa vastaavan kaaren?

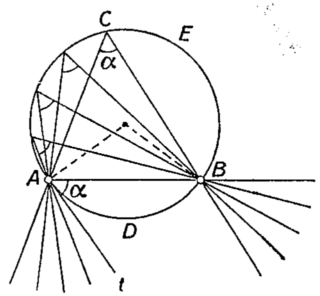
267) Annettu jana hypotenuusana (sitä toiseen paikkaan siirtämättä) on piirrettävä suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on tunnetun janan suuruinen (seur. 4).

268) Ympyrän kehä on jaettava kahteen osaan niin, että toisen sisältämät kehäkulmat ovat kolme kertaa niin suuria kuin toisen (seur. 5).

81 §. Olemme 31 §:ssä määritelleet ympyrän ***tangentiksi*** eli ***sivuajaksi*** suoran, jolla on yksi piste yhteisenä ympyräviivan kanssa. Jos ympyrän ***sekantti*** eli ***leikkaaja s*** (kuv. 119 a) kiertyy toisen leikkauspisteen ***A*** ympäri siten, että toinen leikkauspiste ***C*** lähenee pistettä ***A***, niin sekantti lähenee pisteeseen ***A*** piirrettyä tangenttia ***t***. Tangenttia sanotaan tämän perusteella sekantin ***raja-asennoksi***.



Kuv. 119 a.

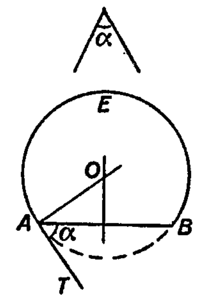


Kuv. 119 b.

Kun annamme kaaren AEB (kuv. 119 b) sisältämän kehäkulman α liikkua niin, että sen kärki C lähenee pistettä A, niin silloin itse kehäkulma suuruuttaan muuttamatta (ed. §, seur. 3) lähenee kulmaa, jonka *toinen kylki on jänne AB ja toinen ympyrän tangentti t. Myös tämä »rajakulma» on siis* $= \alpha$, *ja sitäkin sanotaan kaaren AEB sisältämäksi ja kaarta ADB vastaavaksi kehäkulmaksi.* Edellisen tarkastelun perusteella tähän erikoiseen kehäkulmaankin nähden on voimassa ed. §:n lause ja seurauslauseet.

Teht.: *Annettu jana (AB, kuv. 120) jänteenä on piirrettävä ympyrän kaari, jonka sisältämät kehäkulmat ovat määrätyn koveran kulman (α) suuruiset.*

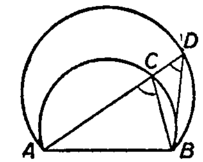
Ratk.: Piirretään $\wedge BAT = \wedge\alpha$. Sitten piirretään janan AB keskinormaali ja pisteen A kautta suoran AT normaali. Näiden leikkauspiste O keskipisteenä piirretään ympyrä A:n kautta. Se kulkee silloin myös B:n kautta. Kaari AEB on tällöin vaadittu kaari.



Kuv. 120.

Tod.: Koska AT on ympyrän O tangentti (31 §, b-kohta), niin $\wedge BAT$, joka $= \wedge\alpha$, on kaaren AEB sisältämä kehäkulma, joten kaikki tämän kaaren sisältämät kehäkulmat $= \wedge\alpha$ (ed. §, seur. 3).

Tark.: Tehtävän toinen ratkaisu on kaari, joka on symmetrisessä asennossa kaaren AEB kanssa suoran AB suhteen. Muita ratkaisuja ei ole. *Jos näet samalle puolelle janaa AB piirretään kaksi kaarta, joiden yhteisenä jänteenä on AB* (kuv. 121), *niin niiden sisältämät kehäkulmat ovat aina erisuuret.* Tämä havaitaan piirtämällä pisteestä A puolisuora, joka leikkaa kumpaakin kaarta (pisteissä C ja D). Tällöin on kehäkulma ADB pienempi kuin kehäkulma ACB (21 §, seur. 2).

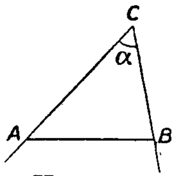


Kuv. 121.

Harj.teht.: 269) Annettu jana jänteenä on piirrettävä ympyrän kaari, jonka sisältämät kehäkulmat ovat määrätyn tylpän kulmar suuruiset.

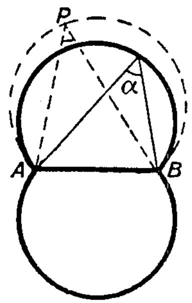
270) 3 cm pituinen jana jänteenä on piirrettävä ympyrän kaari, jonka sisältämät kehäkulmat ovat 60°.

271) Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan ulkopuolitse. Todistettava, että sivuamispisteen kautta piirretty sekantti erottaa eri puolille itseänsä ympyröistä samanasteiset kaaret. *Ohje:* Piirretään yhteinen tangentti, jolloin syntyy ko. kaaria vastaavat kehäkulmat.



Kuv. 122.

82 §. Jos pisteestä (C, kuv. 122) piirretään puolisuorat janan (AB) päätepisteiden kautta, niin sanotaan, että jana *näkyy* siinä näiden puolisuorien muodostamassa kulmassa (α), jossa jana on.



Kuv. 123.

Lause: *Niiden pisteiden ura, joista annettu jana (AB, kuv. 123) näkyy annetun koveran kulman (α) suuruisessa kulmassa, on kaksi ympyränkaarta, joiden yhteisenä jänteenä on tämä jana ja joiden sisältämät kehäkulmat ovat mainitun kulman suuruiset.*

Tod.: 1) Koska ko. kaarien pisteistä jana AB näkyy kulmissa, jotka ovat kehäkulmia, niin ne $= \wedge\alpha$.

2) Olkoon sitten P jokin piste, joka ei ole näillä kaarilla. Piirretään ympyränkaari APB. Ed. §:n tehtävän tarkastelun mukaan tämän kaaren sisältämät kehäkulmat ja siis myös näkökulma $APB \neq \wedge\alpha$.

Näin onkin lause todistettu.

Seur.: *Niiden pisteiden ura, joista annettu jana näkyy suorassa kulmassa, on tämä jana halkaisijana piirretty ympyräviiva.*

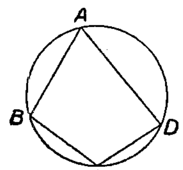
Harj.teht.: 272) Millainen voi näkökulma olla suuruutensa puolesta?

273) Paperille on piirretty jana, kulma ja mielivaltainen suora, joka leikkaa janaa. Suoralla on määrättävä piste, josta jana näkyy mainitun kulman suuruisessa kulmassa.

274) Piirrettävä kolmio, kun tunnetaan sen kanta, korkeus ja kannan vastainen kulma (»huippukulma»).

83 §. Olemme nähneet (72 §), että kolmion ympäri voidaan aina piirtää ympyrä. Nelikulmion ympäri sitä vastoin yleensä ei voida piirtää ympyrää. Seuraavat kaksi lausetta ratkaisevat täydellisesti kysymyksen, milloin tämä kuitenkin on mahdollista.

Lause 1: *Jos nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä, niin sen vastakkaiset kulmat ovat supplementtikulmia.*



Kuv. 124.

Oletus: Nelikulmion $ABCD$ (kuv. 124) ympäri on voitu piirtää ympyrä.

Väitös: $\wedge B$ ja $\wedge D$ ovat supplementtikulmia.

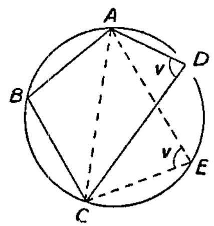
Tod.: Koska kaaret ABC ja ADC ovat eksplementtikaaria, niin niiden sisältämät kehäkulmat B ja D ovat supplementtikulmia (80 §, seur. 5).

Lause 2: *Jos nelikulmion vastakkaiset kulmat ovat supplementtikulmia, niin sen ympäri voidaan piirtää ympyrä.*

Oletus: Nelikulmiossa $ABCD$ (kuv. 125) ovat $\wedge B$ ja $\wedge D$ supplementtikulmia.[1]

Väitös: Nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.

Tod.: Piirretään ympyrä pisteiden A, B ja C kautta.



Kuv. 125.

Merkitään $\wedge B$:n supplementtikulman suuruutta v:llä. Silloin oletuksen mukaan $\wedge D = v$ ja toiselta puolen jokainen kaaren ABC eksplementtikaaren sisältämä kehäkulma $AEC = v$ (80 §, seur. 5). Koska siis jänne AC näkyy pisteestä D kaaren AEC sisältämien kehäkulmien suuruisessa kulmassa ja D on samalla puolella jännettä kuin mainittu kaari, niin D on tällä kaarella (ed. §, lause). Siis ko. ympyrä on nelikulmion $ABCD$ ympäri piirretty.

[1] Koska nelikulmion kulmien summa on 360°, niin ovat tällöin myös $\wedge A$ ja $\wedge C$ supplementtikulmia. Tätä tietoa ei kuitenkaan tarvita todistuksessa.

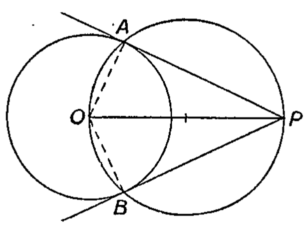
Toistensa käänteislauseet 1 ja 2 voidaan yhdistää yhdeksi lauseeksi seuraavalla kahdella tavalla:

Lause A: *Nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä silloin ja vain silloin, kun sen vastakkaiset kulmat ovat supplementtikulmia.*

Lause B: *Välttämätön ja riittävä ehto sille, että nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä, on, että sen vastakkaiset kulmat ovat supplementtikulmia.*

84 §. Teht.: *Ympyrän* (O, kuv. 126) *ulkopuolella olevan pisteen* (P) *kautta on piirrettävä ympyrälle tangentit.*

Ratk.: Piirretään jana OP halkaisijana ympyrä, joka leikatkoon ympyrää O pisteissä A ja B. Suorat PA ja PB ovat silloin vaaditut tangentit (31 §, kohta b)), sillä $\wedge PAO$ ja $\wedge PBO$ ovat suoria (80 §, seur. 4).



Kuv. 126.

$\wedge APB$ on nimeltään *tangenttikulma* ja $\wedge AOB$ sitä *vastaava keskuskulma*. Kuvion 126 symmetrisyydestä suoran OP suhteen johtuu, että *janat PA ja PB, tangenttien »pituudet», ovat yhtäsuuret*, samoin kuin että *PO puolittaa tangenttikulman*. Nämä seikat ilmenevät myös kolmioiden PAO ja PBO yhtenevyydestä (ssk).

Lause: *Tangenttikulma ja vastaava keskuskulma ovat supplementtikulmia* (80 §, seur. 5; ks. kuv. 126).

Harj.teht.: 275) Kuinka muuttuu tangenttikulman suuruus, kun sen kärki etääntyy ympyrän kehältä lähtien yhä kauemmaksi ja kauemmaksi?

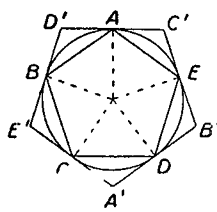
276) Ympyrälle piirrettävä annetun kulman suuruinen tangenttikulma.

277) Piirrettävä niiden pisteiden ura, joista annettu ympyrä »näkyy» määrätyn suuruisessa kulmassa, so. joista piirretyt tangentit muodostavat ko. kulman suuruisen tangenttikulman.

278) Todistettava, että ympyrän ympäri piirretyn nelikulmion vastakkaisten sivujen summat ovat yhtäsuuret. *Ohje:* Sivuamispisteet jakavat sivut kahteen osaan. Merkitään keskenään yhtäsuuria osia samoilla kirjaimilla ja muodostetaan vastakkaisten sivujen summia esittävät lausekkeet.

VII. YMPYRÄN SISÄÄN JA YMPÄRI PIIRRETYT SÄÄNNÖLLISET MONIKULMIOT

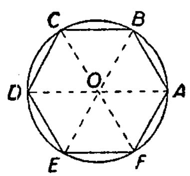
85 §. Jos ympyrän kehä jaetaan n:ään yhtäsuureen osaan ja vierekkäiset jakopisteet yhdistetään, niin syntyy ympyrän sisään piirretty säännöllinen n-kulmio ($ABCDE$, kuv. 127). Jos taas jakopisteisiin asetetaan tangentit, niin ne muodostavat ympyrän ympäri piirretyn säännöllisen n-kulmion ($A'B'C'D'E'$, kuv. 127). Monikulmioiden sivut ja kulmat voidaan todeta yhtäsuuriksi esim. ajattelemalla kuviota kierretyksi ympyrän keskipisteen ympäri niin, että kukin jakopiste tulee viereisen jakopisteen entiselle paikalle, jolloin kukin sivu ja kulma yhtyy viereisen sivun ja kulman entiseen paikkaan.



Kuv. 127.

Ympyrän sisään ja ympäri voidaan siis piirtää harpin ja viivoittimen avulla säännöllinen n-kulmio, kun vain saadaan ympyrän kehä jaetuksi mainituilla apuneuvoilla n:ään yhtäsuureen osaan. Seuraavassa esitämme muutamia tapauksia, joissa tämä on mahdollista.

1) $n = 6$. Jakopisteet saadaan tällöin määrätyksi erottamalla harpilla jostakin ympyrän kehän pisteestä A lähtien peräkkäin kaaria AB, BC, ..., joiden jänteet ovat säteen suuruisia (kuv. 128). Ovathan nimittäin kolmiot AOB, BOC, ... tasasivuisia, joten keskuskulmat ja niitä vastaavat kaaret ovat 60°. Kuusi tällaista kaarta muodostaa siis ympyrän kehän. Näin huomataan, että *ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 6-kulmion sivu = ympyrän säde.*



Kuv. 128.

2) $n = 3$. Jakopisteet saadaan nyt, kun otetaan joka toinen edellisessä tapauksessa määrätyistä jakopisteistä.

3) $n = 12$. Jakopisteet saadaan, kun

ensimmäisessä tapauksessa määrättyjen jakopisteiden lisäksi otetaan vierekkäisten jakopisteiden välisten kaarien keskipisteet. Ne saadaan määrätyksi puolittamalla vastaavat keskuskulmat. Puolittuvathan tällöin vastaavat kaaretkin (11 §, lause).

4) $n = 4$. Jakopisteet ovat tällöin kahden kohtisuoran halkaisijan päätepisteet.

5) $n = 8$. Edellisessä tapauksessa määrättyjen jakopisteiden lisäksi otetaan vierekkäisten jakopisteiden välisten kaarien keskipisteet.

Voidaan näyttää, että harpin ja viivoittimen avulla voidaan ympyrän kehä jakaa myös 5:een ja 10:een yhtäsuureen osaan, mutta ei esim. 7:ään. Likimääräisesti voidaan jakopisteet viimeksi mainitussakin tapauksessa määrätä harpilla samalla tavalla kuin jaettaessa ympyrän kehää 6:een yhtäsuureen osaan, kun harpin kärkien väli valitaan kokeilemalla sopivan suuruiseksi.

Harj.teht.: 279) Piirrettävä ympyrän sisään ja ympäri a) tasasivuinen kolmio, b) neliö.

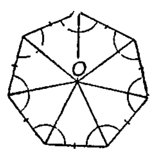
280) Piirrettävä ympyrän sisään säännöllinen a) 12-kulmio, b) 8-kulmio.

281) Piirrettävä (kokeilemalla) ympyrän sisään säännöllinen 7-kulmio.

86 §. Ympyrän sisään ja ympäri voidaan siis aina piirtää säännöllinen n-kulmio, vaikka emme piirtämistä joka tapauksessa voikaan suorittaa harpin ja viivoittimen avulla tarkkaan. Kääntäen on voimassa

Lause: *Säännöllisen n-kulmion ympäri ja sisään voidaan aina piirtää ympyrä.*

Tod.: Piirretään monikulmion kulmien puolittajat (kuv. 129). Silloin syntyy tasakylkisiä kolmioita, joiden kannat (monikulmion sivut) ja samoin kantakulmat (monikulmion kulmien puolikkaat) ovat yhtäsuuria. Kolmiot ovat siis yhteneviä (ksk). Koska niiden kyljet niin ollen ovat kaikki yhtäsuuria, niin aina kahden



Kuv. 129.

vierekkäisen kolmion ja siis kaikkien kolmioiden huiput yhtyvät. Tämä yhteinen huippupiste O onkin yhtä kaukana monikulmion kärjistä ja sivuista ja siis ympäri ja sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Pisteen O määräämiseksi tarvitsee tietenkin piirtää vain monikulmion kahden kulman puolittajat, joiden leikkauspiste se on. O on myös kahden sivun keskinormaalien leikkauspiste.

Pistettä O sanotaan monikulmion *keskipisteeksi.* Mainittuja tasakylkisiä kolmioita sanotaan monikulmion *keskuskolmioksi,* niiden kylkiä (= ympäri piirretyn ympyrän säde) monikulmion *isoiksi säteiksi* ja korkeusjanoja (= sisään piirretyn ympyrän säde) *pieniksi säteiksi* eli *apoteemoiksi.*

VIII. KERTAUSHARJOITUSTEHTÄVIÄ

87 §. Kolmatta lukua koskevia harj.tehtäviä.

282) On todistettava, että kolmion korkeussuorien muodostamat 6 vierekkäistä kulmaa ovat kolmion kulmien suuruisia. *Ohje:* 18 §, lause 2.

283) Kolmiossa on 42° ja 64° suuruiset kulmat. Kuinka suuret ovat ne 6 vierekkäistä kulmaa, jotka kolmion kulmien puolittajat keskenään muodostavat? Tehtävä ratkaistava a) laskemalla, b) piirtämällä ja mittaamalla. *Ohje:* Laskettaessa nojataan 21 §:n lauseeseen ja sen seurauslauseeseen 1.

284) Todistettava, että jos kolmion korkeusjanoista kaksi on yhtäsuurta, niin kolmio on tasakylkinen.

285) Jos puolisuunnikkaan erisuuntaiset sivut, »kyljet», ovat yhtäsuuret, niin puolisuunnikasta sanotaan *tasakylkiseksi.* Todistettava lause: »Tasakylkisen puolisuunnikkaan kulmat ovat parittain yhtäsuuret.» Kuinka kuuluu tämän käänteislause? Todistettava sekin. *Ohje:* Piirretään lyhyemmän yhdensuuntaisen sivun päätepisteistä normaalit toiselle yhdensuuntaiselle sivulle.

286) Ympyrän ympäri on piirrettävä kolmio, jonka kulmat ovat yhtäsuuret kuin annetun kolmion kulmat. *Ohje:* Tehtävä voidaan ratkaista joko piirtämällä ympyrälle annetun kolmion sivujen suuntaiset tangentit (vrt. harj.teht. 98) tai nojaamalla 84 §:n lauseeseen.

287) Annetun pisteen kautta on piirrettävä suora, jonka etäisyys toisesta annetusta pisteestä on määrätyn janan suuruinen. *Ohje:* 31 §, kohta c).

288) Piirrettävä ympyrä, joka sivuaa kahta toisiaan leikkaavaa suoraa ja niistä toista määrätyssä pisteessä.

289) Piirrettävä ympyrä, joka sivuaa kahta yhdensuuntaista suoraa ja lisäksi kulkee annetun pisteen kautta.

290) Mikä on niiden ympyröiden keskipisteiden ura, joiden säde on määrätyn janan suuruinen ja jotka sivuavat annettua ympyrää? Ura piirrettävä.

291) Määrätty jana säteenä on piirrettävä ympyrä, joka sivuaa annettua ympyrää ja jonka keskipiste on annetulla viivalla.

292) Määrätty jana säteenä on piirrettävä ympyrä, joka sivuaa a) kahta toisiaan leikkaavaa suoraa, b) annettua suoraa ja ympyrää, c) kahta annettua ympyrää.

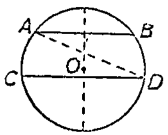
293) On määrättävä piste, josta a) kaksi annettua janaa, b) annettu jana ja ympyrä, c) kaksi annettua ympyrää näkyy samassa määrätyn suuruisessa kulmassa.

294) Määrättävä piste, josta annetun kolmion sivut näkyvät yhtäsuurissa kulmissa.

295) Samasta ympyrän kehän pisteestä piirretään ympyrälle jänteitä ja kullekin jänteelle ympyrän keskipisteestä normaali. Mikä on näiden normaalien kantapisteiden ura? On todellakin piirrettävä useita jänteitä ja niille mainitut normaalit.

296) **Lause:** *Jännettä vastaan kohtisuora halkaisija puolittaa a) jänteen b) vastaavat kaaret, c) näitä kaaria vastaavat keskuskulmat.* Todistus suoritettava nojaamalla α) symmetrisyyteen, β) kolmioiden yhtenevyyteen.

297) Yhdensuuntaisten jänteiden (AB ja CD, kuv. 130) väliset kaaret ovat yhtäsuuret. Tämä on todistettava a) nojaamalla symmetrisyyteen, b) harj.tehtävän 296 b-kohdan avulla, c) piirtämällä jana AD ja nojaamalla sitten 17 §:n lauseeseen 2 ja 80 §:n seuraukseen 2.



Kuv. 130.

298) Todistettava, että jos kahden toisiaan leikkaamattoman jänteen väliset kaaret (AC ja BD, kuv. 130) ovat yhtäsuuret, niin jänteet ovat yhdensuuntaiset.

299) Suoran (a) ulkopuolella olevan pisteen (P) kautta on piirrettävä tämän suoran suuntainen suora (vrt. 19 §). Tehtävä on ratkaistava ed. harj.tehtävään nojautuen. *Ohje:* Piirretään ensin mielivaltainen ympyrä, joka kulkee P:n kautta ja leikkaa a:ta.

300) Puolisuoran AB alkupisteeseen A voidaan piirtää normaali jatkamatta puolisuoraa A:n toiselle puolelle seuraavasti. Piirretään A:n kautta mielivaltainen ympyrä, jonka keskipiste on puolisuoran ulkopuolella ja joka leikkaa puolisuoran jossakin pisteessä C. Sitten piirretään se ympyrän halkaisija, jonka toinen päätepiste on C. Tämän halkaisijan toisen päätepisteen ja A:n kautta piirretty suora on vaadittu normaali. Miksi? Piirros on suoritettava.

301) Mikä on sen kaaren asteluku, jonka sisältämien kehäkulmien asteluku = itse kaaren asteluku?

302) Ympyrän ympäri piirretyn kolmion sivujen sivuamispisteet yhdistetään. Kuinka suuret ovat näin syntyneen kolmion kulmat, jos ympäri piirretyn kolmion kaksi kulmaa on 40° ja 64°?

303) Kuperan nelikulmion kulmien puolittajat muodostavat uuden nelikulmion. Todistettava, että sen ympäri voidaan piirtää ympyrä. *Ohje:* Merkitään alkuperäisen nelikulmion kulmia esim. kirjaimilla α, β, γ ja δ ja lasketaan sitten uuden nelikulmion kulmat. Todistuksessa käytetään edelleen hyväksi 22 ja 83 §:n lauseita.

304) Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Piirretään ympyröille halkaisijat AD ja AE. Todistettava, että pisteet B, D ja E ovat samalla suoralla. *Ohje:* Todistus voidaan suorittaa joko suorasti, jolloin yhdistetään D ja E pisteeseen B ja piirretään ympyröiden yhteinen jänne, tai epäsuorasti, jolloin piirretään suora pisteiden D ja E kautta ja todetaan, että jos se ei kulkisi B:n kautta, vaan leikkaisi ympyröitä pisteissä F ja G, niin $\triangle AFG$:ssä olisi kaksi suoraa kulmaa.

305) Todistettava:

a) Jos kulman kärki on ympyrän sisäpuolella, niin sen asteluku on puolet ko. kulmaan ja sen ristikulmaan jäävien kaarien astelukujen summasta.

b) Jos kulman kärki on ympyrän ulkopuolella ja kyljet kohtaavat ympyrän, niin sen asteluku on puolet ko. kulmaan jäävien kaarien astelukujen erotuksesta.

Ohje: Yhdistetään kaarien toiset päätepisteet ja nojataan 21 §:n seuraukseen 1 ja 80 §:n seuraukseen 1.

88 §. Toista lukua koskevia harj.tehtäviä.

306) Näytettävä laskemalla, että

$$\text{neliön lävistäjä} = s\sqrt{2} \quad (s = \text{sivu}).$$

Laskettava lävistäjä mm:n tarkkuudellaa, kun $s = 6$ cm.

307) Näytettävä laskemalla, että

$$\text{tasasivuisen kolmion korkeus} = \frac{s\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ala} = \frac{s^2\sqrt{3}}{4} \quad (s = \text{sivu}).$$

Kaavojen avulla on sitten laskettava korkeus ja ala, kun $s = 5{,}2$ m.

308) Laskettava vinoneliön ala, kun sen sivu on 5 cm ja yksi kulma a) 30°, b) 45°, c) 60°, d) 67,2°. *Ohje:* Viimeinen kohta lasketaan trig. taulukoita käyttäen ja muut ilman niitä.

309) Näytettävä, että r-säteisessä ympyrässä on 120° keskuskulmaa vastaava jänne $= r\sqrt{3}$.

310) Puolisuunnikkaan kolme sivua = 6 cm ja neljäs sivu = 12 cm. Kuinka suuri on puolisuunnikkaan ala?

311) Suunnikas, jonka eräs kulma = 45°, on piirretty ympyrän ympäri. Kuinka suuri on suunnikkaan ala, jos ympyrän säde = 2 dm?

312) Tasakylkisen kolmion kyljet = 29 cm ja kanta = 42 cm. Laskettava kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

313) Ympyrän sisään on piirretty tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma = 45°. Kuinka suuri on kolmion ala, jos ympyrän säde = 2 cm?

314) Ympyrän säde on 7,2 cm. Kuinka suuri on sen sisään piirretyn säännöllisen viisikulmion a) sivu, b) ala. *Ohje:* Käytetään apuna trig. taulukoita.

315) Säännöllisen 7-kulmion sivu on 3 cm. Kuinka suuri on sen sisään piirretyn ympyrän säde?

316) Vuonna 1867 Venäjä möi Alaskan Yhdysvalloille 7 200 000 dollarilla. Kartalla, jonka mittakaava on 1: 20 000 000, on Alaskan pinta-ala 38,3 cm^2. Kuinka suuri oli hinta hehtaaria kohti?

317) Mikä on ympyrän säde, jos sen a) kehä $= 1$ m, b) ala $= 1$ m²?

318) Montako % suurenee ympyrän a) kehä, b) ala, jos sen sädettä suurennetaan p%? Esim. $p = 10$.

319) Ajatellaan, että maapallon ympäri on pingotettu köysi. Se katkaistaan sitten eräästä kohdasta ja liitetään siihen 1 m pituinen jatke. Sitten ajatellaan köysi kohotetuksi maasta kaikkialla yhtä korkealle, niin että se uudestaan pingottuu. Mahtuisikohan tämän jälkeen nyrkki köyden ja maanpinnan väliin? *Ohje:* Merkitään maapallon sädettä r:llä ja köyden ja maanpinnan väliin jäävän raon korkeutta x:llä ja lasketaan sitten yhtälön avulla x:n arvo. Maapallo oletetaan tietysti sileäksi palloksi.

320) Kappale upotettiin tilavuuden määräämistä varten suorakulmaisen särmiön muotoiseen vesiastiaan, jonka pohjan särmät ovat 20 ja 30 cm. Kuinka suuri on kappaleen tilavuus, kun veden pinta nousi 8,6 cm? Kuinka suuri on edelleen kappaleen tiheys, jos kappale painaa 13,2 kg?

321) Suorakulmaisen särmiön särmät ovat a, b ja c. Näytettävä, että särmiön lävistäjä $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

322) Kuinka pitkälti on 3 mm paksuista rautalankaa vyyhdessä, joka painaa 4,3 kg? Rautalangan tiheys on 7,8 g/cm³. *Ohje:* Rautalanka suoristettuna on pitkä ympyrälieriö.

323) Paljonko peltiä on mennyt suoran ympyrälieriön muotoiseen litran mittaan, jos sen pohjan halkaisija on 9 cm?

324) Kuinka paljon vettä juoksee minuutissa kanavassa, jos veden nopeus on 0,6 m/sek ja veden »poikkileikkaus» on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka korkeus on 1,2 m ja kannat 3,2 ja 3,6 m?

325) Suoran ympyräkartion sivujana ja pohjan halkaisija $= 10$ cm. Kuinka suuri on kartion a) vaippa, b) korkeus, c) tilavuus?

326) Tornin katto on säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoinen. Mikä on sen pinta-ala, jos räystään sivun pituus on 5 m ja katon särmä 4 m?

327) Säännöllisen nelisivuisen pyramidin tilavuus $= 15$ cm³ ja korkeus $=$ 5 cm. Kuinka suuri on sen pinta-ala?

328) Jos pallon pinta $= 3$ m², niin kuinka suuri on sen tilavuus?

329) Todettava laskemalla, että jos pallon halkaisija $=$ kuution särmä, niin pallon ja kuution pinta-alojen suhde $=$ tilavuuksien suhde.

330) Kuinka suuri on sen pallon halkaisija, jonka tilavuus on yhtä monta dm³:ä kuin pinta-ala on dm²:ä?

331) Metallista, jonka tiheys on 8 g/cm³, on valettu ontto pallo, jonka halkaisija on 12 cm. Pallo painaa 4 kg. Kuinka suuri on ontelon tilavuus?

332) Todistettava Arkhimedeen lause: Pallon ympäri piirretyn suoran lieriön tilavuus ja kokonaispinta-ala ovat 1 ½ kertaa niin suuret kuin pallon tilavuus ja pinta-ala.

NELJÄS LUKU

Tasogeometrian täydennys

I. VERRANNON MUUNNOKSET

89 §. Verrantoa

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

voidaan *muuntaa,* toisin sanoen siitä voidaan johtaa uusia verrantoja eri tavoilla:

1) *Kääntämällä:* $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Ovathan näet yhtäsuurien lukujen käänteisluvutkin yhtäsuuret.

2) *Vuorottamalla:* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.[1]

Tähän päästään kertomalla alkuperäisen verrannon molemmat puolet suhteella $\frac{b}{c}$.

3) *Yhdistämällä:* $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

Nämä saadaan alkuperäisestä ja käännetystä verrannosta lisäämällä molempiin puoliin 1.

Alkuperäisestä verrannosta *yhdistämällä* saaduiksi sanotaan niitäkin kahta verrantoa, jotka saadaan kääntämällä yllä olevat verrannot. Mitkä ne ovat?

4) *Erottamalla:* $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$.

[1] Tällöin edellytetään, että a, b, c ja d ovat kaikki samanlaatuisia.

Edellinen näistä saadaan vähentämällä alkuperäisen verrannon molemmista puolista 1 ja jälkimmäinen vähentämällä käännetyn verrannon molemmat puolet 1:stä.

Alkuperäisestä verrannosta *erottamalla* saaduiksi sanotaan niitäkin kahta verrantoa, jotka saadaan kääntämällä viimeksi kirjoitetut verrannot. Mitkä ne ovat? Verrantojen jäseninä olevissa erotuksissa voidaan myös vähennettävät ja vähentäjät vaihtaa keskenään.

Lause 1: *Verrannon äärimmäisten jäsenien tulo = keskimmäisten jäsenien tulo.*[1]

Jos näet verrannon

(I) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

molemmilla puolilla kerrotaan tulo bd, saadaan yhtälö

(II) $$ad = bc.$$

Jos kääntäen yhtälö (II) on voimassa, niin muodostamalla sen molempien puolien suhde tuloon bd tullaan verrantoon (I). Näin on todistettu

Lause 2: *Kahden yhtäsuuren tulon* (II) *tekijöistä voidaan muodostaa verranto* (I), *jonka äärimmäisinä jäseninä ovat toisen ja keskimmäisinä jäseninä toisen tulon tekijät.*

Lause 3: *Jos on kaksi tai useampia yhtäsuuria suhteita, niin ne ovat yhtäsuuret kuin edellisten jäsenien summan suhde jälkimmäisten jäsenien summaan.*

Tod.: Olkoon

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Jos näiden yhtäsuurien suhteiden suuruutta merkitään k:lla, niin

$$a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2,\ \ldots,\ a_n = kb_n.$$

Laskemalla näiden yhtälöiden vasemmat puolet yhteen ja samoin oikeat saadaan

[1] Tällöin pitää tietysti ainakin verrannon toisen puolen jäsenien paikalle ajatella sijoitetuksi niiden mittaluvut, elleivät jäsenet jo ole paljaita lukuja.

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = k(b_1+b_2+\ldots+b_n),$$

joten

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = k.$$

Harj.teht.: 333) Jana on jaettu kahteen osaan (a ja b), joiden suhde on $3:4$. Kuinka suuri on a) koko janan ($a + b$) suhde edelliseen osaan, b) jälkimmäisen osan suhde koko janaan?

334) Näytettävä, että verranto (I) voidaan muuntaa muotoon

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

90 §. Suureita $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sanotaan *(suoraan) verrannollisiksi suureisiin* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, jos

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Tämä merkintä tarkoittaa alkuaan, että

(A) $$a_1 : a_2 = b_1 : b_2,\ a_2 : a_3 = b_2 : b_3, \ldots$$

Tästä seuraa kuitenkin, että mitkä kaksi suuretta a tahansa suhtautuvat toisiinsa niinkuin vastaavat suureet b. Jos näet esimerkiksi kahden ensimmäisen verrannon (A) vasemmat puolet kerrotaan keskenään ja samoin oikeat, niin saadaan $a_1 : a_3 = b_1 : b_3$. Jne.

Jos suureet a ja b kaikki ovat samanlaatuiset, niin verrannoista (A) saadaan vuorottamalla:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Suureita $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sanotaan *kääntäen verrannollisiksi* suureisiin $b_1, b_2, \ldots b_n$, jos

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2} : \ldots : \frac{1}{b_n}.$$

Tällöin on

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_1,\quad a_2 : a_3 = b_3 : b_2, \ldots$$

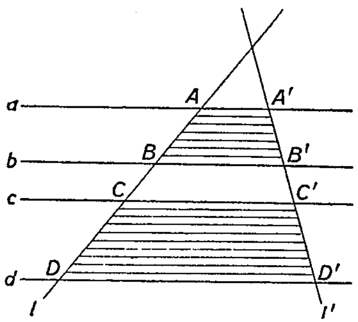
Harj.teht.: 335) $a : b = 2 : 3$ ja $b : c = 4 : 5$. On määrättävä pienimmät positiiviset kokonaisluvut, joihin a, b, c ovat a) suoraan, b) kääntäen verrannolliset. *Ohje:* a) Lavennetaan verrantojen oikeita puolia niin, että ed. verrannon neljäs jäsen ja jälk. verrannon kolmas jäsen tulevat samoiksi. b) Kirjoitetaan ensin

$$a : b = \frac{1}{3} : \frac{1}{2},\ b : c = \frac{1}{5} : \frac{1}{4}.$$

II. YHDENSUUNTAISET LEIKKAAJAT

91 §. Lause: *Jos yhdensuuntaiset suorat* (a, b, c ja d, kuv. 131) *leikkaavat kahta suoraa* (l ja l'), *niin niiden toisesta suorasta erottamat osat* (AB ja CD) *ovat verrannolliset niiden toisesta suorasta erottamiin vastaaviin osiin* ($A'B'$ ja $C'D'$).

Tod.: Oletamme, että janat AB ja CD ovat *yhteismitalliset,* millä tarkoitetaan, että on olemassa sellainen mittajana, jolla mitattaessa molempien mainittujen janojen mittaluvut ovat kokonaislukuja. Kuviossa 131 ovat nämä mittaluvut 7 ja 10, joten $AB : CD = 7 : 10$. Kun mittauksessa tarpeellisten l:llä olevien jakopisteiden kautta piirretään ko. yhdensuuntaisten suuntaiset suorat, niin ne jakavat janan $A'B'$ 7:ään ja janan $C'D'$ 10:een yhtäsuureen osaan (66 §, lause), joten $A'B' : C'D' = 7 : 10$. Siis



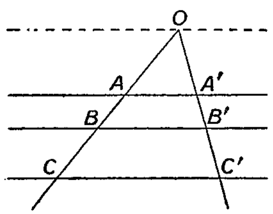
Kuv. 131.

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Siinä tapauksessa, että janat AB ja CD ovat *yhteismitattomat,* niiden suhde on irrationaaliluku. Voidaan todistaa, että lause pätee tässäkin tapauksessa.

Seur.: *Jos yhdensuuntaiset suorat leikkaavat kulman kylkiä, niin niiden toisesta kyljestä erottamat osat ovat verrannolliset niiden toisesta kyljestä erottamiin vastaaviin osiin.*

Tämä seurauslause johtuu välittömästi edellisestä lauseesta, kun ajatellaan kulman kärjen O (kuv. 132) kautta piirretyksi mainittujen yhdensuuntaisten suuntainen suora.



Kuv. 132.

On muuten huomattava, että seurauslause sisältää, paitsi verrannot

$$OA : AB : BC = OA' : A'B' : B'C',$$

myös mm. verrannot

$$OA : OB : OC = OA' : OB' : OC'.$$

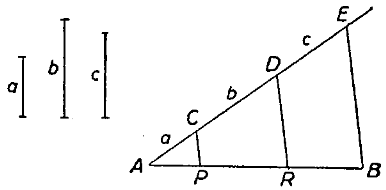
92 §. Teht. 1: *Jana* (AB, kuv. 133) *on jaettava osiin, jotka suhtautuvat toisiinsa niinkuin annetut janat* (a, b ja c) *tai luvut* (m, n ja p).

Ratk.: Piirretään A:sta alkava, janasta AB erillinen puolisuora, ja erotetaan siitä peräkkäin

$$AC = a,\ CD = b,\ DE = c.$$

Yhdistetään sitten E ja B sekä piirretään CP ja $DR \parallel EB$. Silloin onkin ed. seurauslauseen mukaan

$$AP : PR : RB = a : b : c.$$



Kuv. 133.

Jos jana on jaettava osiin, jotka suhtautuvat toisiinsa kuten luvut m, n ja p, niin valitaan mielivaltainen jana a ja piirretään janat ma, na ja pa sekä jaetaan sitten jana osiin, jotka suhtautuvat toisiinsa kuten nämä janat.

Verrannossa

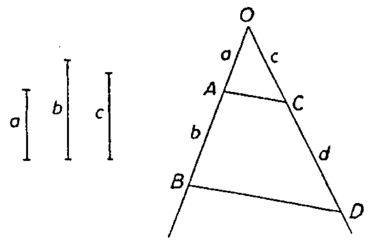
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

sanotaan d:tä suureiden a, b ja c *neljänneksi verroksi.* Jos erikoisesti

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

niin c:tä sanotaan suureiden a ja b *kolmanneksi verroksi* ja b:tä suureiden a ja c *keskiverroksi.*

Teht. 2: *Piirrettävä kolmen janan* (a, b ja c, kuv. 134) *neljäs verto* (d).



Kuv. 134.

Ratk.: Piirretään jokin kulma O ja erotetaan sen toisesta kyljestä janat $OA = a$, $AB = b$ ja toisesta kyljestä jana $OC = c$. Kun sitten A ja C yhdistetään ja piirretään $BD \parallel AC$, niin jana $CD = d$ onkin vaadittu neljäs verto, sillä onhan ed. §:n seur.:n mukaan $a : b = c : d$.

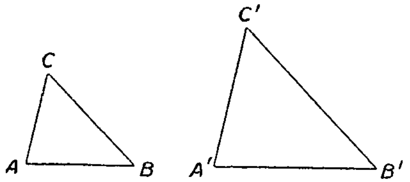
Harj.teht.: 336) Piirrettävä kolmen janan neljäs verto a) kuten edellä selitettiin, b) erottamalla kaikki kolme janaa kulman kärjestä lähtien (vrt. ed. §:n loppuhuomautusta).

337) Piirrettävä kahden janan kolmas verto.

338) Jana on jaettava kahteen osaan, joiden suhde on 2 : 3.

339) Piirrettävä jana, joka on $\frac{4}{5}$ annetusta janasta.

III. KOLMIOIDEN YHDENMUOTOISUUS



Kuv. 135.

93 §. Olemme aikaisemmin tutustuneet lyhyesti yhdenmuotoisuuden perusominaisuuksiin. Nyt otamme yhdenmuotoisuuden järjestelmällisesti käsiteltäväksi. Alamme kolmioilla.

Määritelmä: *Kahta kolmiota ABC ja $A'B'C'$* (kuv. 135) *sanotaan yhdenmuotoisiksi ja merkitään*

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC,$$

jos seuraavat kaksi ehtoa ovat täytetyt:

1) *toisen kolmion kulmat ovat yhtäsuuret kuin toisen kolmion vastinkulmat:*

$$\wedge A = \wedge A', \quad \wedge B = \wedge B', \quad \wedge C = \wedge C',$$

2) *toisen kolmion sivut ovat verrannolliset toisen kolmion vastinsivuihin:*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \; (= k)$$

eli

$$A'B' : A'C' : B'C' = AB : AC : BC.$$

Luku k on $\triangle A'B'C'$:n *yhdenmuotoisuussuhde* eli *mittakaava* $\triangle ABC$:n suhteen. Myös sanotaan, että $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ *mittakaavassa* k (kuviossa $k = 1\frac{1}{2}$ eli 3 : 2).

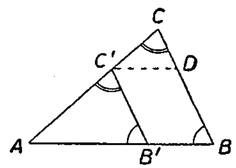
Harj.teht.: 340) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. $AB = 6$ cm ja $A'B' = 3$ m ovat vastinsivuja. Kuinka suuri on jälkimmäisen kolmion yhdenmuotoisuussuhde edellisen suhteen, ja kääntäen? Jos $AC = 5$ cm, niin kuinka suuri on sen vastinsivu $A'C'$?

341) Kolmio, jonka sivut ovat 125 m, 110 m ja 90 m on piirretty mittakaavassa 2: 5 000. Kuinka suuret ovat tämän kolmion sivut?

94 §. Lause: *Kolmiota leikkaava, sivun suuntainen suora erottaa kolmiosta sen kanssa yhdenmuotoisen kolmion.*

Oletus: $B'C' \parallel BC$ (kuv. 136).

Väitös: $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$.



Kuv. 136.

Tod.: 1) Kolmioilla on $\wedge A$ yhteisenä ja $\wedge B' = \wedge B$ ja $\wedge C' = \wedge C$ (17 §, lause 2).

2) $$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \quad (91 \text{ §, seur.}).$$

Kun piirretään $C'D \parallel AB$, niin

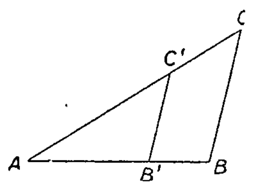
$$\frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC} \quad (91 \text{ §, seur.}).$$

Mutta koska $BD = B'C'$, niin huomioimalla molemmat edelliset verrannot saadaan:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Molemmat määritelmässä mainitut yhdenmuotoisuusehdot ovat siis täytetyt, joten ko. kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Teht.: *Piirrettävä kolmio, joka on yhdenmuotoinen annetun kolmion* (ABC, kuv. 137) *kanssa mittakaavassa k.*



Kuv. 137.

Ratk.: Erotetaan puolisuorasta AB jana $AB' = k \cdot AB$ (kuviossa on $k = \frac{3}{5}$). Kun sitten piirretään $B'C' \parallel BC$, niin ed. lauseen mukaan

$$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC.$$

Ratkaisun mukaan on lisäksi mittakaava k.

Harj.teht.: 342) Ratkaistava ed. tehtävä, kun a) $k = 3:5$, b) $k = a:b$, jossa a ja b ovat kaksi tunnettua janaa. *Ohje:* Käytetään 91 §:n menettelytapoja.

343) Piirrettävä annetun kolmion muotoinen kolmio, jossa alkuperäisen kolmion tietyn sivun vastinsivu on tunnetun janan suuruinen.

95 §. Edellisen tehtävän ratkaisusta ilmenee, että annetun kolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio voidaan piirtää missä mittakaavassa tahansa. Tähän tosiasiaan perustuen voidaan kunkin (kolmioiden) yhtenevyyslauseen avulla todistaa vastaava *yhdenmuotoisuuslause.* Todistus on periaatteessa aina sama.

Yhdenm.lause »kk»: *Jos kolmion* (A, kuv 138) *kaksi kulmaa ovat yhtäsuuret kuin toisen kolmion* (B) *kaksi kulmaa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

Tod.: Merkitään k:lla $\triangle A$:n ja $\triangle B$:n puheena olevien kulmien välisten sivujen suhdetta (kuviossa $k = 2$). Piirretään sitten

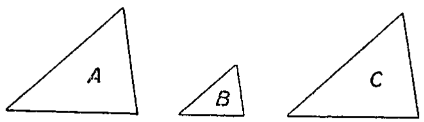
$$\triangle C \sim \triangle B$$

mittakaavassa k. Silloin

$$\triangle C \cong \triangle A \text{ (ksk).}$$

Siis myös

$$\triangle A \sim \triangle B, \text{ m.o.t.}$$



Kuv. 138.

Jos olisi merkitty k:lla $\triangle A$:n ja $\triangle B$:n toisia yhtäsuuria kulmia vastassa olevien sivujen suhdetta, niin olisi todistus voitu suorittaa aivan samalla tavalla nojaamalla yhtenevyyslauseeseen »kks». Molempia mainittuja yhtenevyyslauseita vastaa siis puheena oleva sama yhdenmuotoisuuslause.

Yhdenm.lause »sss»: *Jos kolmion* (A, kuv. 138) *sivut ovat verrannolliset toisen kolmion* (B) *sivuihin, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*[1]

Tod.: Merkitään k:lla $\triangle A$:n ja $\triangle B$:n vastinsivujen suhteita, jotka oletuksen mukaan ovat yhtäsuuret. Sitten menetellään kuten edellisessä todistuksessa, paitsi että nojataan yhtenevyyslauseeseen »sss».

Yhdenm.lause »sks»: *Jos kolmion* (A, kuv. 138) *kaksi sivua ovat verrannolliset toisen kolmion* (B) *kahteen sivuun ja väliset kulmat ovat yhtäsuuret, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

Tod.: Merkitään k:lla vastinsivujen yhtäsuuria suhteita ja menetellään kuten edellisissä todistuksissa, paitsi että nojataan yhtenevyyslauseeseen »sks».

Yhdenm.lause »ssk»: *Jos kolmion* (A, kuv. 138) *kaksi sivua ovat verrannolliset toisen kolmion* (B) *kahteen sivuun ja toisten vastinsivujen vastaiset kulmat ovat yhtäsuuret, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset, edellyttäen, että toisten vastinsivujen vastaiset kulmat eivät ole vinoja supplementtikulmia.*

Tod.: Menetellään kuten edellisessä todistuksessa, paitsi että nojataan yhtenevyyslauseeseen »ssk».

Harj.teht.: 344) Kolmio, jonka sivut on 25 km, 30 km ja 40 km on piirrettävä mittakaavassa 1: 400 000.

345) Kolmion kaksi sivua ovat 0,87 mm ja 1,12 mm sekä välinen kulma 30°. Kolmio on piirrettävä mittakaavassa 75: 2. Piirrosta hyväksi käyttäen on määrättävä, kuinka suuri on alkuperäisen kolmion kolmas sivu.

[1] Edellä esitettyyn kahden kolmion yhdenmuotoisuuden määritelmään olisi siis riittänyt sisällyttää ainoastaan kohta 2), vastinsivujen verrannollisuus, koska yhdenmuotoisuuslauseen sss perusteella tästä seuraa kohta 1), vastinkulmien yhtäsuuruus. Samoin olisi riittänyt sisällyttää mainittuun määritelmään ainoastaan vastinkulmien yhtäsuuruus tai oikeastaan vain kahden vastinkulmaparin yhtäsuuruus, koska tällöin kolmannetkin vastinkulmat olisivat yhtäsuuret ja yhdenmuotoisuuslauseen kk perusteella myös vastinsivut olisivat verrannolliset.

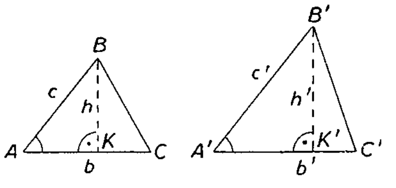
346) Tasaisella maalla kasvavan puun ja 2 m pituisen pystyssä olevan seipään varjon pituus mitattiin yht'aikaa. Kuinka korkea on puu, jos mainitut varjot ovat 16,70 m ja 2,45 m?

347) *Lause:* Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmien kärjistä piirretyt a) korkeusjanat, b) keskijanat ovat verrannolliset vastinsivuihin. *Ohje:* Todistetaan nojautumalla yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen verrannollisuuteen.

96 §. Lause: *Jos kolmion kulma* (A', kuv. 139) *on yhtäsuuri kuin jokin toisen kolmion kulma* (A), *niin kolmioiden alojen suhde = mainittujen kulmien viereisten sivujen suhteiden tulo.*

Tod.: Kuvion 139 merkintöjä käyttäen saadaan ensin (42 §, seur. 3):

$$\triangle A'B'C' : \triangle ABC = \frac{b'h'}{2} : \frac{bh}{2} = \frac{b'h'}{bh} = \frac{b'}{b} \cdot \frac{h'}{h}.$$



Kuv. 139.

Mutta koska $\triangle A'B'K' \sim \triangle ABK$ (kk), niin

$$\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c},$$

joten

$$\triangle A'B'C' : \triangle ABC = \frac{b'}{b} \cdot \frac{c'}{c}.$$

Koska kahden yhdenmuotoisen kolmion vastinkulmat ovat yhtäsuuret ja niiden viereisten sivujen (vastinsivujen) suhteet ovat yhtäsuuret, niin ed. lauseesta saadaan

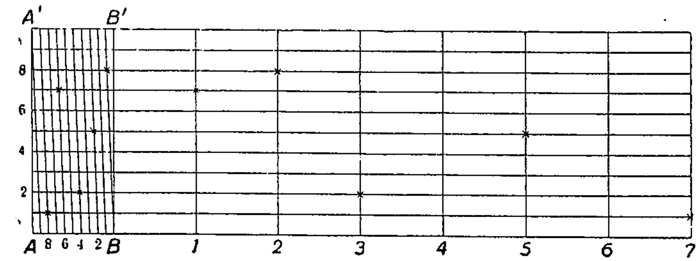
Seur.: *Yhdenmuotoisten kolmioiden alojen suhde = vastinsivujen suhteen neliö ja siis = yhdenmuotoisuussuhteen neliö* (k^2).

Harj.teht.: 348) Kolmio, jonka ala on 15 m², on piirretty mittakaavassa 3 : 200. Kuinka suuri on tämän kolmion ala?

349) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 ja 8 cm. Kuinka suuri on sen kolmion ala, jonka yhtenä kulmana on suorakulmaisen kolmion pienempi terävä kulma ja sen viereiset sivut = 6 ja 4 cm?

** 97 §. Tavallisiin astelevyihinkin on usein liitetty kuvion 140 esittämä *transversaalimittakaava*, jonka avulla voidaan mitata lyhyitä janoja 0,01 cm eli 0,1 mm tarkkuudella. Siinä on jana $AB = A'B' = 1$ cm ja kumpikin on jaettu kymmeneen yhtäsuureen osaan, jotka siis = 0,1 cm. Jana AA',

jonka pituus voi olla mikä tahansa, on niinikään jaettu kymmeneen yhtäsuureen osaan. Sitten on piirretty yhdensuuntaisia suoria kuvion osoittamalla tavalla. Kapeasta kolmiosta, jonka yksi kärki on B:ssä ja toinen B':ssä, erottavat vaakasuorat yhdensuuntaiset suorat sen kanssa yhdenmuotoisia kolmioita mittakaavoissa 1 : 10, 2 : 10, . . ., 9 : 10. Näistä yhdensuuntaisista leikkaajista kolmion sisään jäävät osat ovat siis alhaalta lukien 0,01 cm, 0,02 cm, . . ., 0,09 cm. Kapeiden vierekkäisten suunnikkaiden sisään jäävät osat leikkaajista taas = 0,1 cm.



Kuv. 140.

Näytteeksi on muutamille vaakasuorille viivoille merkitty ristillä kaksi pistettä, joiden välin suuruus nähdään mittakaavasta: esim. viivalla 8 väli = 2,08 cm, viivalla 5 väli = 5,25 cm, viivalla 1 väli = 7,81 cm.

Edellä kuvattua transversaalimittakaavaa voidaan käyttää apuna myös, kun on suoritettavana jokin piirros esim. mittakaavassa 1: 100. Silloin vastaa metriä mittakaavan yksikkö (= cm). Jos taas piirretään mittakaavassa 1: 100 000, niin mittakaavan yksikkö vastaa kilometriä. Jos halutaan piirtää esim. mittakaavassa 1: 50, niin silloin on valmistettava transversaalimittakaava siten, että siinä yksikön AB pituus on 2 cm, jolloin se tulee vastaamaan metriä.

Harj.teht.: 350) Kuinka suuri on kuviossa 140 esitetyssä transversaalimittakaavassa a) viivalle 2, b) viivalle 7 ristillä merkittyjen pisteiden väli?

351 a) Merkittävä paperin reunaan terävällä kynällä kaksi reunaa vastaan kohtisuoraa piirua ja mitattava sitten transv.m.kaavan avulla niiden väli.

351 b) Asetettava transv.m.kaavaa käyttäen harpin kärjet 4,76 cm etäisyydelle toisistaan ja piirrettävä sitten tämän pituinen jana paperille.

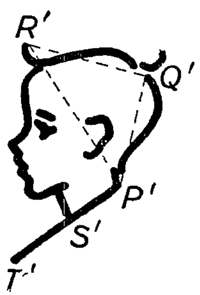
* IV. YLEINEN YHDENMUOTOISUUSOPPI

98 §. Yleiseksi yhdenmuotoisuuden määritelmäksi voidaan ottaa kumpi tahansa 47 §:ssä mainituista kahdesta yhdenmuotoisuuden perusominaisuudesta, joista toinen sitten voidaan todistaa määritelmään nojautuen. Valitsemme edellisen:

Määritelmä: *Kahta kuviota sanotaan yhdenmuotoiseksi, jos niissä vastinjanat ovat verrannolliset.*

Tämä lyhyt määritelmä on täydellisemmin sanottuna:

Kuv. 141 a.



Kuv. 141 b.

Kahta kuviota sanotaan *yhdenmuotoisiksi*, jos kummankin kuvion jokaista pistettä vastaa määrätty piste, *vastinpiste*, toisessa kuviossa siten, että saman kuvion pisteiden yhdistysjanat ovat verrannolliset toisen kuvion vastinpisteiden yhdistysjanoihin, *vastinjanoihin*.

Jos $P, Q, R, \ldots$ ovat jonkin kuvion (kuv. 141 a) pisteitä ja $P', Q', R', \ldots$ yhdenmuotoisen kuvion (kuv. 141 b) vastinpisteitä, niin on siis

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{P'R'}{PR} = \frac{Q'R'}{QR} = \ldots = k.$$

Luku k (kuviossa $k = 1\frac{1}{2}$) on kuvion b *yhdenmuotoisuussuhde* eli *mittakaava* kuvion a suhteen.

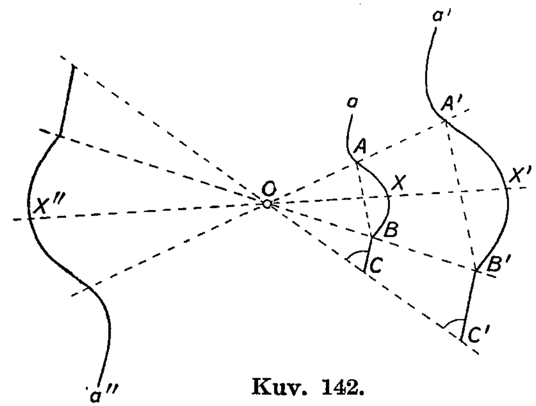
Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkolmiot (esim. PQR ja $P'Q'R'$, kuv. 141) ovat yhdenmuotoiset (sss), joten *vastinkulmat* (esim. $\wedge R$ ja $\wedge R'$) ovat yhtäsuuret. Siis on voimassa

Lause 1: *Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkulmat ovat yhtäsuuret.*

Jos kolme pistettä (P, S ja T, kuv. 141 a) ovat samalla suoralla, niin yhdenmuotoisessa kuviossa niiden vastinpisteet (P', S' ja T', kuv. 141 b) ovat myös samalla suoralla, sillä onhan $\wedge PST$ oikokulma, joten ed. lauseen mukaan myös $\wedge P'S'T'$ on oikokulma. Tästä seuraa

Lause 2: *Kuvioon kuuluvaa suoraa viivaa vastaa yhdenmuotoisessa kuviossa suora viiva.*

99 §. Teht.: *Piirrettävä kuvio, joka on yhdenmuotoinen annetun kuvion* (a, kuv. 142) *kanssa mittakaavassa k.*



Kuv. 142.

Ratk.: Valitaan ensin mielivaltainen kiinteä piste O. Merkitköön sitten X yleensä kuvion a pistettä. Erotetaan puolisuorasta OX jana $OX' = k \cdot OX$ (kuviossa $k = 2$). Kun sitten X liikkuu pitkin viivaa a, niin X' muodostaa viivan a', joka on vaadittu kuvio.

Tod.: Olkoot A ja B kaksi mielivaltaista X:n asentoa ja A' ja B' vastaavat X':n asennot. Silloin

$$\triangle OA'B' \sim \triangle OAB \text{ (sks)}$$

mittakaavassa k ja siis $A'B' : AB = k$. Yhdenmuotoisuuden määritelmän mukaan on niin ollen $a' \sim a$ mittakaavassa k ja X' ja X ovat joka hetki toistensa vastinpisteitä.

Käytännössä a' piirretään siten, että määrätään esitetyllä keinolla tarpeeksi monta sen pistettä X' ja piirretään sitten viiva niiden kautta.

Kuvioita a' ja a sanotaan *(suoraan) homoteettisiksi* pisteen O suhteen. O on *homoteettisuuskeskus*, ja yhdenmuotoisuussuhdetta k sanotaan myös *homoteettisuussuhteeksi*.

Jos kunkin puolisuoran OX vastakkaisesta puolisuorasta erotetaan jana $OX'' = k \cdot OX$, niin X'' muodostaa viivan a'', joka on viivan a' kanssa symmetrinen pisteen O suhteen ja siis yhtenevä sen kanssa (29 §). Kuvioita a'' ja a sanotaan *(vastakkain) homoteettisiksi* pisteen O suhteen.

Lause: *Kaksi ympyrää ovat aina yhdenmuotoiset ja yhdenmuotoisuussuhde = säteiden suhde = halkaisijain suhde.*

Jos näet ympyrät asetetaan samankeskisiksi, niin ne ovat homoteettiset yhteisen keskipisteensä suhteen ja siis yhdenmuotoiset. Tästä selviää myös, että yhdenmuotoisuussuhde = säteiden suhde.

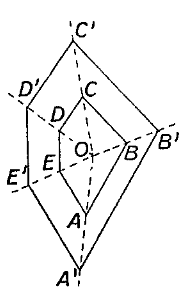
Harj.teht.: 352) On piirrettävä jokin suljettu (umpinainen) käyrä viiva ja sitten sen kanssa yhdenmuotoinen viiva mittakaavassa 3 : 2. Homoteettisuuskeskukseksi valitaan jokin piste viivan rajoittaman alueen sisältä.

100 §. Kuvioon a (kuv. 142) kuuluvaa janaa BC vastaa kuviossa a' jana $B'C'$ (98 §, lause 2). Koska $\triangle OB'C' \sim \triangle OBC$ (sks), niin $\wedge C' = \wedge C$, joten $B'C' \parallel BC$. Siis *homoteettisten kuvioiden vastinjanat ovat yhdensuuntaiset.* Tähän perustuen voidaan yksinkertaisesti ratkaista edellisen tehtävän erikoistapaus:

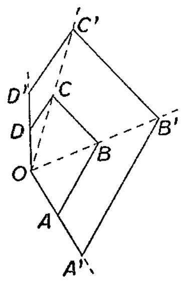
Teht.: *Piirrettävä monikulmio, joka on yhdenmuotoinen annetun monikulmion* ($ABCDE$, kuv. 143) *kanssa mittakaavassa k.*

Ratk.: Valitaan mielivaltainen homoteettisuuskeskus O (kuviossa 143 a on O monikulmion sisällä, kuviossa 143 b kärjessä ja kuviossa 143 c ulkopuolella). Piirretään puolisuorat OA, OB, OC, OD ja OE ja erotetaan ensin mainitusta puolisuorasta jana $OA' = k \cdot OA$ (kuvioissa on $k = 2$). Sitten piirretään peräkkäin

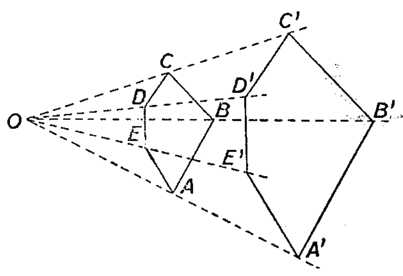
$$A'B' \parallel AB, \quad B'C' \parallel BC, \quad C'D' \parallel CD, \quad D'E' \parallel DE$$



Kuv. 143 a.



Kuv. 143 b.



Kuv. 143 c.

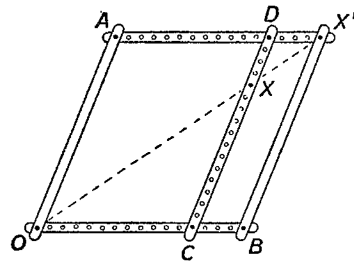
Harj.teht.: 353) Piirrettävä mielivaltainen nelikulmio ja sitten sen kanssa yhdenmuotoinen nelikulmio a) mittakaavassa 3 : 5, b) siten, että annetun nelikulmion tietyn sivun vastinsivu on tunnetun janan suuruinen.

ja yhdistetään lopuksi E' ja A'. Silloin ilmeisesti $A'B'C'D'E'$ on vaadittu monikulmio. Siinä tapauksessa, että O on annetun monikulmion kärjessä (E, kuv. 143 b), tarvitsee piirtää vain kolme ensin mainittua yhdensuuntaista ja $OA'B'C'D'$ on silloin vaadittu monikulmio.

** **101 §.** 99 §:n tehtävän ratkaisussa käytettyyn periaatteeseen perustuu erikoinen koje, *pantografi* (kuva 144), jonka avulla voidaan piirtää annetun kuvion kanssa yhdenmuotoinen kuvio halutussa mittakaavassa. Pantografin muodostaa neljä suunnikkaan muotoon toisiinsa nivellettyä tankoa OA, BX', OB ja AX', joista kaksi viimeksi mainittua on rei'illä varustettu. Näihin nivelletään OA:n suuntaiseksi tanko CD, joka niinikään on rei'itetty. O kiinnitetään piirustusalustaan niin, että laitetta voidaan kiertää O:n ympäri. X:ssä on tylppäkärkinen neula ja X':ssa kynä. X:n paikka on niin valittu, että O, X ja X' ovat samalla suoralla.

Kun nyt neulaa X kuljetetaan pitkin annettua viivaa, niin kynä X' piirtää sen kanssa yhdenmuotoisen viivan mittakaavassa $OX' : OX = OB : OC = k$ (kuviossa $k = 4 : 3$). Että O, X ja X' todellakin pysyvät neulaa liikuteltaessa samalla suoralla, seuraa yksinkertaisesti siitä, että koko ajan $\triangle OCX \sim \triangle OBX'$ (sks) ja siis $\wedge O$ on kolmioilla aina yhteisenä.

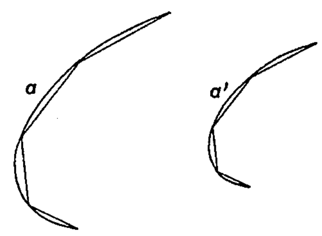
Jos vaihdetaan neulan X ja kynän X' paikat, saadaan piirretyksi annetun kuvion pienennys (mittakaavassa 3 : 4).



Kuv. 144.

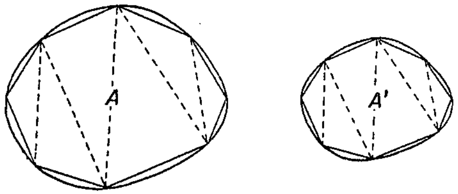
102 §. Lause 1: *Yhdenmuotoisten viivojen* (a ja a', kuv. 145) *pituuksien suhde = yhdenmuotoisuussuhde* (k).

** *Tod.:* Piirretään viivojen a ja a' »sisään» murtoviivat m ja m' niin, että niiden kärkinä ovat a:n ja a':n vastinpisteet. Koska tällöin murtoviivojen m ja m' vastinsivujen suhde $= k$, niin myös $m : m' = k$ (89 §, lause 3). Näin on asianlaita, olkoon murtoviivojen sivujen luku kuinka suuri tahansa. Koska sivujen luvun rajattomasti kasvaessa ja sivujen samalla rajattomasti pienetessä murtoviivan m pituus lähenee viivan a pituutta ja samoin m':n pituus lähenee a':n pituutta, niin voidaan päättää, että myös $a : a' = k$.



Kuv. 145.

Lause 2: *Yhdenmuotoisten alueiden* (A ja A', kuv. 146) *alojen suhde* = *yhdenmuotoisuussuhteen neliö* (k^2).



Kuv. 146.

** *Tod.:* Piirretään alueiden »sisään» monikulmiot M ja M' niin, että niiden kärkinä ovat alueiden reunaviivojen vastinpisteet. Jaetaan sitten M ja M' vastinlävistäjillä kolmioihin. Koska tällöin vastinkolmiot ovat yhdenmuotoiset (sss), niin niiden alojen suhteet $= k^2$ (95 §, seur.). Tästä seuraa taas, että myös $M : M' = k^2$ (89 §, lause 3). Tästä päätellään sitten edelleen vastaavalla tavalla kuin ed. todistuksessa, että samoin $A : A' = k^2$.

Harj.teht.: 354) Määrättävä mittaamalla kuvioiden 146 yhdenmuotoisuussuhde ja laskettava sitten ko. alueiden a) alojen suhde, b) reunaviivojen pituuksien suhde.

355) Suomen pinta-ala on 337 113 km². Kuinka suuri on Suomen pinta-ala kartalla, jonka mittakaava on 1 : 4 000 000?

V. JANAN HARMONINEN JAKO

103 §. Jos piste X on janalla AB (kuv. 147) ja

(1) $$XA : XB = p : q,$$

niin sanotaan, että *piste X jakaa janan AB* s i s ä p u o l i s e s t i suhteeseen $p : q$. Jos taas piste Y on janan AB jatkeella ja

(2) $$YA : YB = p : q,$$

niin sanotaan, että *piste Y jakaa janan AB* u l k o p u o l i s e s t i suhteeseen $p : q$. Jos molemmissa tapauksissa $p : q$ on sama, toisin sanoen, jos on voimassa verranto

(3) $$XA : XB = YA : YB \; (= p : q),$$

niin sanotaan myös, että *pisteet X ja Y jakavat janan AB* *h a r m o n i s e s t i* suhteeseen $p : q$.[1] Kuviossa 147 on $p : q = 3 : 2$.

Kuv. 147.

Lause: *Jos pisteet X ja Y jakavat janan AB = a harmonisesti suhteeseen p : q, niin*

(4) $$\begin{cases} XA = \dfrac{p}{p+q}\,a, \\ XB = \dfrac{q}{p+q}\,a, \end{cases}$$

(5)[2] $$\begin{cases} YA = \dfrac{p}{p-q}\,a, \\ YB = \dfrac{q}{p-q}\,a. \end{cases}$$

Nämä kaavat saadaan muuntelemalla (89 §) sopivasti verrantoja (1) ja (2). Johdamme näytteeksi edellisen kaavoista (4). Verrannosta (1) saadaan »yhdistämällä»

$$\frac{XA}{XA+XB} = \frac{p}{p+q}.$$

Tästä seuraakin suhteen määritelmän perusteella edellinen kaavoista (4), kun otetaan huomioon, että $XA + XB = a$.

Seur.: *On olemassa vain yksi pistepari X, Y, joka jakaa annetun janan AB harmonisesti määrättyyn suhteeseen p : q.*

Jos erikoisesti $p : q = 1$, niin X on janan AB keskipiste ja Y on äärettömän kaukana.

Harj.teht.: 356) Johdettava verrannon muunnosten avulla a) jälkimmäinen kaavoista (4), b) edellinen kaavoista (5).

---

[1] Kun on kysymyksessä janan AB jako, niin verrannoissa (1), (2) ja (3) on A ja B otettava esitetyssä järjestyksessä. Vastaavasti esim. sanonta »X jakaa janan BA sisäpuolisesti suhteeseen $p : q$» merkitsee, että

$$XB : XA = p : q.$$

[2] Kaavat (5) ovat voimassa edellyttäen, että $p > q$, jolloin Y on pisteen B oikealla puolella, kuten kuviossa 147. Jos sitä vastoin $q > p$, niin Y on pisteen A vasemmalla puolella ja kaavoihin (5) pitää panna $q-p$ erotuksen $p-q$ paikalle.

357) Johdettava kaavat (4) ja (5) ratkaisemalla yhtälöt, jotka saadaan a) verrannoista (1) ja (2) ottamalla tuntemattomiksi $XA = x$ ja $YA = y$, b) merkitsemällä $XA = px$, $XB = qx$, $YA = py$, $YB = qy$, kuten verrantojen (1) ja (2) perusteella voidaan tehdä. *Ohje:* Yhtälöitä muodostettaessa nojaudutaan kuvioon 147.

358) Kuinka suuret ovat janat XA, XB, YA, YB, kun $AB = 6$ cm ja X ja Y jakavat sen harmonisesti suhteeseen $3:2$?

359) Todistettava, että jos X ja Y jakavat harmonisesti janan AB, niin B ja A jakavat harmonisesti janan XY. *Ohje:* Muodostetaan »vuorottamalla» (89 §) verrannosta (3) uusi verranto.

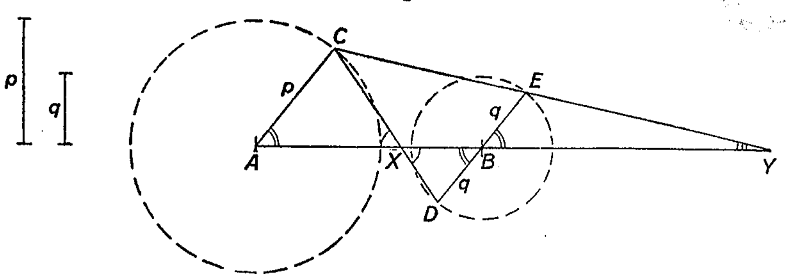
104 §. Teht.: *Jana (AB, kuv. 148) on jaettava harmonisesti suhteeseen $p:q$.*

Tämä tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä hyväksi ed. §:n kaavoja (4) ja (5), mutta tarkoituksemme on nyt ratkaista tehtävä mainituista kaavoista riippumatta, puhtaasti geometrisesti.

Ratk.: 1) Olkoot p ja q janoja. Piirretään pisteestä A puolisuora, joka ei ole suoralla AB ja erotetaan siitä jana $AC = p$. Sitten piirretään pisteen B kautta ed. puolisuoran suuntainen suora ja erotetaan siitä janat $DB = BE = q$. Suorat CD ja CE leikatkoot suoraa AB pisteissä X ja Y. Väitetään, että nämä pisteet ovat vaaditut jakopisteet.

Tod.: $\triangle XAC \sim \triangle XBD$ (kk). Siis $XA : XB = p : q$.
$\triangle YAC \sim \triangle YBE$ (kk). Siis $YA : YB = p : q$.

2) Olkoot p ja q lukuja. Otetaan mielivaltainen jana a ja muodostetaan janat pa ja qa, joiden suhde siis $= p:q$. Jana AB jaetaan sitten harmonisesti suhteeseen $pa : qa$ edellisessä kohdassa opitulla tavalla.



Kuv. 148.

* Ajatellaan nyt, että kuviossa 148 jana AC kiertyy pisteen A ympäri, jolloin C muodostaa ympyräviivan. Silloin mainitun janan suuntainen jana DE kiertyy B:n ympäri ja D ja E muodostavat myös ympyräviivan. Suora CE kulkee joka hetki kiinteän pisteen Y kautta (ed. §, seur). Ja koska

$$\triangle ACY \sim \triangle BEY \text{ (kk)},$$

niin aina

$$CY : EY = p : q.$$

Ympyrät ovat siis suoraan homoteettiset pisteen Y suhteen (99 §). Samalla tavalla voidaan päätellä, että ympyrät ovat vastakkain homoteettiset pisteen X suhteen. Siis on voimassa

*** Lause:** *Kaksi ympyrää on aina homoteettiset niiden pisteiden suhteen, jotka jakavat ympyröiden keskusjanan harmonisesti säteiden suhteeseen.*

*** Seur.:** *Kahden ympyrän yhteiset tangentit kulkevat niiden pisteiden kautta, jotka jakavat ympyröiden keskusjanan harmonisesti säteiden suhteeseen.*

Jos näet $AC \perp CE$ (kuv. 148), niin myös $BE \perp CE$, joten tällöin pisteen Y kautta kulkeva suora CE on ympyröiden yhteinen tangentti. Tällaisia yhteisiä »ulkopuolisia tangentteja» on kaksi. Samoin päätetään, että toiset kaksi yhteistä tangenttia, »sisäpuoliset tangentit», kulkevat pisteen X kautta.[1]

Harj.teht.: 360) Annettu jana jaettava harmonisesti suhteeseen $5:2$.

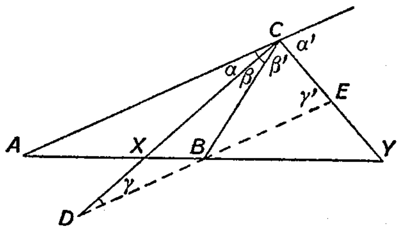
361) Kuinka muuttuvat kuviossa 148 pisteiden X ja Y paikat, jos janan p pituus pysyy muuttumattomana, mutta q:n pituus kasvaa a) 0:sta p:ksi, b) p:stä ∞:ksi? Kuinka samalla muuttuu suhteen $p:q$ arvo?

362) Määrättävä kahden toistensa ulkopuolella olevan ympyrän homoteettisuuskeskukset ja piirrettävä sitten ympyröiden yhteiset tangetit.

[1] Yhteisten tangenttien lukua koskevat päätelmämme pätevät vain, kun ympyrät ovat toistensa ulkopuolella. Kuinka on asianlaita muulloin?

105 §. Lause 1: *Kolmion* (ABC, kuv. 149) *kulman* (C) *ja sen vieruskulman puolittajat* (CX *ja* CY) *jakavat vastaisen sivun harmonisesti viereisten sivujen suhteeseen* ($CA : CB$).

Tod.: Piirretään B:n kautta suora $DE \parallel AC$. Silloin on $\triangle XAC \sim \triangle XBD$ (kk), joten



Kuv. 149.

$$XA : XB = CA : DB.$$

Mutta koska

$$\wedge\beta = \wedge\alpha = \wedge\gamma,$$

niin

$$DB = CB \text{ (78 §, lause 1).}$$

Siis

$$XA : XB = CA : CB.$$

Edelleen on $\triangle YAC \sim \triangle YBE$ (kk), joten

$$YA : YB = CA : EB.$$

Mutta koska

$$\wedge\beta' = \wedge\alpha' = \wedge\gamma',$$

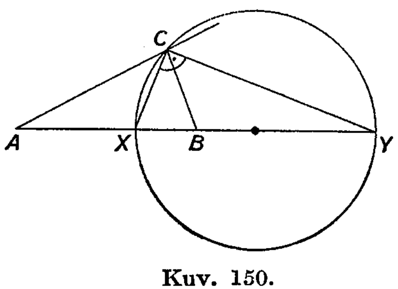
niin

$$EB = CB \text{ (78 §, lause 1).}$$

Siis

$$YA : YB = CA : CB.$$

** Tarkastellaan $\triangle ABC$:tä (kuv. 150) ja ajatellaan, että sen kanta AB pysyy muuttumattomana, mutta kärki C liikkuu siten, että $CA : CB$ pysyy koko ajan samana ($= p : q$). Kulman C ja sen vieruskulman puolittajat CX ja CY kulkevat silloin ed. lauseen mukaan joka hetki niiden kiinteiden pisteiden X ja Y kautta, jotka jakavat janan AB harmonisesti suhteeseen $p : q$. Koska $\wedge XCY$ on suora kulma (15 §, lause 1), niin C liikkuu sillä ympyräviivalla, jonka halkaisijana on



Kuv. 150.

jana XY (82 §, seur.). Voidaan todistaa (todistus sivuutetaan), että C puheena olevalla tavalla liikkuessaan voi saavuttaa kaikki tämän ympyrän pisteet, joten on voimassa

** **Lause 2:** *Jos pisteet* X *ja* Y *jakavat janan* AB *harmonisesti suhteeseen* $p{:}q$, *niin jana* XY *halkaisijana piirretty ympyrä, ns.* A p o l l o n i o k s e n y m p y r ä, *on niiden pisteiden ura, joiden etäisyydet pisteistä* A *ja* B *suhtautuvat toisiinsa kuten* $p{:}q$.

Harj.teht.: 363) 104 §:n teht. on ratkaistava lauseeseen 1 nojaamalla.

364) Kolmion sivut ovat 4, 5 ja 2 cm. Kuinka suuriin osiin jakaa ensin mainitun sivun sen vastaisen kulman puolittaja? Tulos on tarkistettava piirtämällä ja mittaamalla.

** 365) Piirrettävä niiden pisteiden ura, joiden etäisyyksien suhde kahdesta pisteestä on a) 5 : 3, b) 3 : 5, c) 1.

VI. PISTEEN POTENSSI YMPYRÄN SUHTEEN

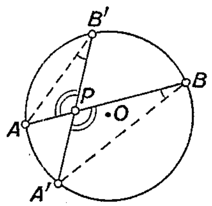
106 §. Lause: *Jos pisteen* (P, kuv. 151 a ja b) *kautta piirretään ympyrälle* (O) *sekantti, niin pisteen ja ympyrän kehän välisten sekantin osien tulo, ns.* p i s t e e n (P) p o t e n s s i y m p y r ä n s u h t e e n, *on riippumaton sekantin suunnasta.*

Väitös: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.

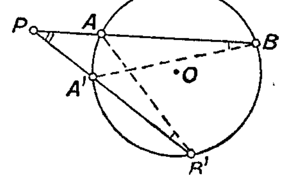
Tod.: $\triangle PAB' \sim \triangle PA'B$ (kk; 80 § seur. 2). Siis

$$PA : PA' = PB' : PB.$$

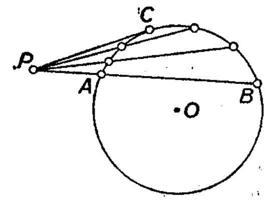
Tästä seuraakin väitöksemme (88 §, lause 1).



Kuv. 151 a.



Kuv. 151 b.



Kuv. 152.

Seur.: *Ympyrän ulkopuolella olevan pisteen potenssi = pisteestä ympyrälle piirretyn tangentin neliö.*

Jos näet sekantti kiertyy pisteen P ympäri läheten raja-asentoaan, tangenttia (kuv. 152), niin sekantin osat PA ja PB lähenevät tangenttia PC (= jana PC).

Harj.teht.: 366) Todettava laskemalla, että jos ympyrän säde $= r$ ja pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä $= a$, niin

$$\textit{pisteen P potenssi} = \begin{cases} r^2 - a^2, & \text{jos } P \text{ on ympyrän sisäpuolella,} \\ a^2 - r^2, & \text{» » » ulkopuolella.} \end{cases}$$

367) Ympyrän säde = 7 cm ja pisteen P etäisyys keskipisteestä = 5 cm. Kuinka pitkä on pisteen P kautta piirretty jänne, jonka P jakaa siten, että a) toinen osa = 3 cm, b) osien suhde = 2 : 3?

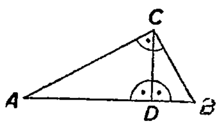
368) Ympyrän säde = 7 cm ja pisteen P etäisyys keskipisteestä = 9 cm. P:stä piirretään ympyrälle sekantti siten, että siitä P:n ja ympyrän väliin jäävä osa = ympyrän sisään jäävä osa. Kuinka pitkät nämä osat ovat?

369) **Lause:** *Jos pisteestä* (P) *piirretään ympyrälle tangentti ja sekantti, niin pisteen ja ympyrän kehän välinen tangentin osa* (PC) *on pisteen ja ympyrän kehän välisten sekantin osien* (PA ja PB) *keskiverto.* Todistus on suoritettava a) seurauslauseeseen nojautuen, b) yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

VII. SUORAKULMAISTA KOLMIOTA KOSKEVIA VERRANTOJA — KESKIVERRON KONSTRUOINTI

107 §. Lause: *Hypotenuusaa vastaava korkeus* (CD, kuv. 153) *jakaa suorakulmaisen kolmion* (ABC) *kahteen suorakulmaiseen kolmioon, jotka ovat yhdenmuotoisia alkuperäisen kolmion kanssa ja siis myös keskenään.*

Tod.: Kummallakin osakolmioista on yksi kulma yhteisenä alkuperäisen kolmion kanssa. Koska kolmiot ovat lisäksi suorakulmaisia, niin osakolmiot ovat yhdenmuotoisia alkuperäisen kolmion kanssa (kk) ja siis myös keskenään.

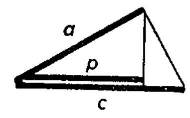


Kuv. 153.

Seur. 1: *Suorakulmaisessa kolmiossa kateetti* (a) *on hypotenuusan* (c) *ja hypotenuusalla olevan projektionsa* (p) *keskiverto:*

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{p}.$$

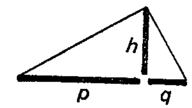
Tämä verranto johtuu koko kolmion ja vasemmanpuoleisen osakolmion yhdenmuotoisuudesta (kuv. 154).



Kuv. 154.

Seur. 2: *Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusaa vastaava korkeus* (h) *on kateettien (hypotenuusalla olevien) projektioiden* (p *ja* q) *keskiverto:*

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q}.$$

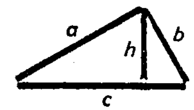


Kuv. 155.

Tämä verranto johtuu osakolmioiden yhdenmuotoisuudesta (kuv. 155).

Seur. 3: *Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusaa vastaava korkeus* (h) *on hypotenuusan* (c) *ja kateettien* (a ja b) *neljäs verto:*

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{h}.$$



Kuv. 156.

Tämä verranto johtuu koko kolmion ja jommankumman osakolmion yhdenmuotoisuudesta (kuv. 156).

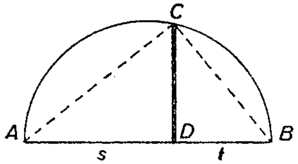
Harj.teht.: 370) Suorakulmaisessa kolmiossa ovat kateettien projektiot hypotenuusalla 2 ja 8 cm. Laskettava yllä olevia seurauslauseita käyttäen hypotenuusaa vastaava korkeus ja kateetit.

371) Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on $\frac{4}{5}$ hypotenuusasta ja toinen = 6 cm. Kuinka suuri on hypotenuusaa vastaava korkeus?

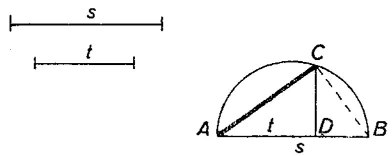
372) Suorakulmaisessa kolmiossa on hypotenuusa = 4 cm ja sitä vastaava korkeus = 1 cm. Laskettava kateettien projektiot hypotenuusalla (tulee ratkaistavaksi toisen asteen yhtälö).

108 §. Teht.: *Piirrettävä kahden janan* (s ja t, kuv. 157) *keskiverto.*

Ratk. 1: Asetetaan jollekin suoralle p e r ä k k ä i n janat $AD = s$ ja $DB = t$ (kuv. 157 a). Piirretään sitten AB halkaisijana puoliympyrä ja D:n kautta suoran AB normaali. Jos C on piste, jossa normaali kohtaa puoliympyrän kaaren, niin $\triangle ABC$ on suorakulmainen (57 §, seur. 4) ja ed. §:n seur. 2:n mukaan CD on vaadittu keskiverto.



Kuv. 157 a.



Kuv. 157 b.

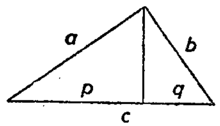
Ratk. 2: Asetetaan jollekin suoralle päällekkäin janat $AB = s$ ja $AD = t$ (kuv. 157 b). Sitten menetellään kuten ed. ratkaisussa. Seur. 1:n mukaan on nyt AC vaadittu keskiverto.

Harj.teht.: 373) Kuinka voidaan kuvion 157 a avulla päättää, että kahden janan keskiverto $\leq$ keskiarvo? Milloin keskiverto = keskiarvo?

374) Jana on jaettava kahteen osaan, joiden keskiverto = toinen tunnettu jana.

VIII. PYTHAGORAAN LAUSEET

109 §. Esitämme nyt uuden todistuksen Pythagoraan lauseelle (44 §). Olkoon suorakulmaisen kolmion (kuv. 158) hypotenuusa c, kateetit a ja b sekä kateettien projektiot hypotenuusalla vastaavasti p ja q. 106 §:n seur. 1:n mukaan saadaan verrannot



Kuv. 158.

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{p}, \qquad \frac{c}{b} = \frac{b}{q},$$

joista seuraa yhtälöt

$$a^2 = cp, \qquad b^2 = cq.$$

Laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan

$$a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c^2.$$

Siis

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tähän kaavaan sisältyykin

Pythagoraan lause: *Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan neliö = kateettien neliöiden summa.*[1]

Edellä olevasta kaavasta seuraa:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Edellistä kaavaa käytetään, kun tunnetaan kateetit ja on laskettava hypotenuusa, ja jälkimmäistä kaavaa taas, kun tunnetaan hypotenuusa ja toinen kateetti ja on laskettava toinen kateetti.

Harj.teht.: 375) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 5 ja 12 cm. Laskettava hypotenuusa ja sitä vastaava korkeus.

376) Tasakylkisen kolmion kylki = 8,1 cm ja kanta 13,8 cm. Laskettava kolmion korkeus ja ala.

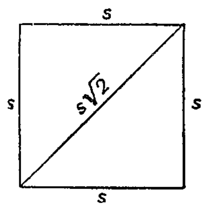
377) Kuinka kaukana keskipisteestä on r-säteisessä ympyrässä jänne, jonka pituus = a? Esim. $r = 3$ m, $a = 2$ m.

110 §. Pythagoraan lausetta käyttäen voidaan laskemalla todeta oikeaksi seuraavat säännöt, jotka on painettava muistiin, koska niitä joudutaan usein tarvitsemaan (kuv. 159—161).

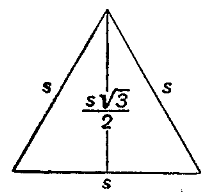
Seur. 1: *Neliön lävistäjä* $= s\sqrt{2}$, *kun sivu* $= s$.
Seur. 2: *Tasasivuisen kolmion*

$$\textit{korkeus} = \frac{s\sqrt{3}}{2}, \quad \textit{ala} = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}, \quad \textit{kun sivu} = s.$$

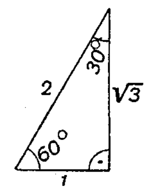
Seur. 3: *Suorakulmaisessa kolmiossa, jonka terävät kulmat ovat* 60° *ja* 30°, *hypotenuusa, pienempi kateetti ja suurempi kateetti suhtautuvat toisiinsa kuten* $2 : 1 : \sqrt{3}$.



Kuv. 159.



Kuv 160.



Kuv. 161.

[1] Hypotenuusa ja kateetit tarkoittavat tässä niiden mittalukuja (vrt lauseen aikaisempaa sanamuotoa 44 §:ssä ja alimuist. s. 42).

Harj.teht.: 378) Neliön lävistäjä $= d$. Kuinka suuri on neliön sivu? Esim. $d = 3$ m.

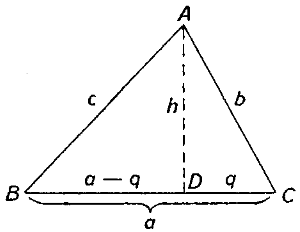
379) Tasasivuisen kolmion sivu on 5,2 cm. Laskettava kolmion korkeus ja ala.

380) Tasasivuisen kolmion a) korkeus $= 1$ dm, b) ala $= 1$ dm^2. Kuinka suuri on kolmion sivu?

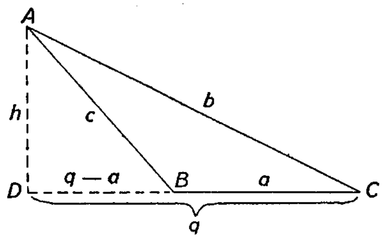
381) Suorakulmaisessa kolmiossa toinen terävä kulma $= 30°$. Laskettava mm:n tarkkuudella muut sivut, kun a) pienempi kateetti $= 3$ cm, b) hypotenuusa $= 7{,}2$ cm, c) suurempi kateetti $= 5$ cm.

***111 §. Laajennettu Pythagoraan lause:** *Vinokulmaisessa kolmiossa* (ABC, kuv. 162) *on sivun* (c) *neliö = toisen* (a) *ja kolmannen* (b) *sivun neliöiden summa — tai + kaksi kertaa se tulo, jonka tekijöinä ovat toinen sivu ja kolmannen sivun toisella oleva projektio* (q), *sen mukaan, onko ensinmainittua sivua vastassa oleva kulma* (C) *terävä vai tylppä:*

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2aq.$$



Kuv. 162 a.



Kuv. 162 b.

Tod.: 1) $\wedge C$ on terävä (kuv. 162 a ja b).

Suorakulmaisesta kolmiosta ABD saadaan Pythagoraan lauseen mukaan

$c^2 = (a-q)^2+h^2$, jos $\wedge B$ on terävä (kuv. 162 a),
$c^2 = (q-a)^2+h^2$, » » » tylppä (kuv. 162 b).

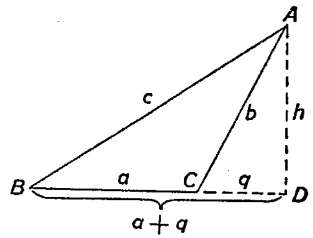
Kummassakin tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2-2aq+q^2+h^2 \\ &= a^2-2aq+q^2+(b^2-q^2) \\ &= a^2+b^2-2aq. \end{aligned}$$

2) $\wedge C$ on tylppä (kuv. 162 c).

Tällöin saadaan Pythagoraan lausetta käyttäen

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+q)^2+h^2 \\ &= a^2+2aq+q^2+h^2 \\ &= a^2+2aq+q^2+(b^2-q^2) \\ &= a^2+b^2+2aq. \end{aligned}$$



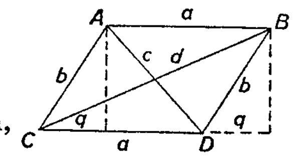
Kuv. 162 c.

Seur. 1: *Kolmion kulma on terävä, suora tai tylppä sen mukaan, onko vastaisen sivun neliö pienempi, yhtäsuuri vai suurempi kuin muiden sivujen neliöiden summa.*

Seur. 2: *Suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa = kaikkien sivujen neliöiden summa.*

Edellinen näistä seurauslauseista johtuu välittömästi Pythagoraan lauseista ja jälkimmäinen havaitaan oikeaksi seuraavasti. Kuvion 163 merkintöjä käyttäen saadaan soveltamalla laajennettu Pythagoraan lause kolmioihin ACD ja BCD:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2aq, \\ d^2 &= a^2+b^2+2aq. \end{aligned}$$



Kuv. 163.

Ja kun nämä yhtälöt lasketaan yhteen, saadaankin todistettava yhtälö

$$c^2+d^2 = a^2+a^2+b^2+b^2.$$

Harj.teht.: 382) Kolmion kahden sivun pituudet ovat 3 ja 5 cm. Kuinka suuri on kolmas sivu, jos sen vastainen kulma on a) 45°, b) 135°?

383) Kolmion kahden sivun pituudet ovat 8 ja 7 cm ja jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 60°. Kuinka suuri on kolmas sivu?

384) Kolmion sivut ovat 10, 17 ja 21 cm. Kuinka suuri on a) pienimmän sivun projektio suurimmalla sivulla, b) suurinta sivua vastaava korkeus, c) ala?

385) Minkä laatuinen on suurin kulma kolmiossa, jonka sivut ovat 4, 7 ja 8 m?

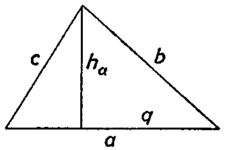
386) Näytettävä, että jos kolmion sivut ovat a, b ja c, niin viimeksi mainittua sivua vastaava keskijana

$$m_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2+b^2)-c^2}.$$

Ohje: Piirretään suunnikas, jonka puolisko on ko. kolmio ja toisena lävistäjänä c, sekä käytetään hyväksi seurauslausetta 2.

*112 §.[1] Olkoot kolmion (kuv. 151) sivut a, b, c tunnetut. Johdetaan kaavat vastaavien korkeuksien h_a, h_b, h_c laskemiseksi.

Ratkaisemalla laajennetun Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö



Kuv. 164.

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2aq$$

q:n suhteen saadaan

$$q = \pm\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Haluttuun kaavaan h_a:n laskemiseksi tullaan, kun tämä q:n arvo sijoitetaan yhtälöön

$$h_a^2 = b^2 - q^2.$$

Tunnettuja algebran sääntöjä käyttäen saadaan

$$h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$$

Kun merkitään p:llä kolmion piirin puolikasta, so.

$$p = \frac{a+b+c}{2},$$

niin

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2p, \\ -a+b+c &= 2p-2a = 2(p-a), \\ a-b+c &= 2p-2b = 2(p-b), \\ a+b-c &= 2p-2c = 2(p-c), \end{aligned}$$

[1] Tämä pykälä voidaan sivuuttaa, jos trigonometriassa käytetään allekirjoittaneen laatimaa oppikirjaa, jossa (kolmannesta painoksesta lähtien) johdetaan Heronin kaava ja siihen liittyen kaavat kolmion korkeuksien, kulmien sekä sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteiden laskemiseksi.

joten

$$h_a^2 = \frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4a^2}$$

ja siis

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

Sijoittamalla tämä korkeuden lauseke kolmion alan kaavaan $\triangle = \frac{1}{2}ah_a$ saadaan alan laskemiseksi ns. *Heronin kaava:*

$$\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Tämän avulla lausuttuina ovat *kolmion korkeudet*

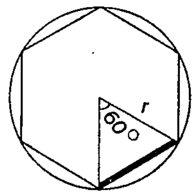
$$h_a = \frac{2\triangle}{a}, \quad h_b = \frac{2\triangle}{b}, \quad h_c = \frac{2\triangle}{c}.$$

Harj.teht.: 387) Kolmion sivut ovat 4, 13 ja 15 cm. Laskettava kolmion ala ja korkeudet.

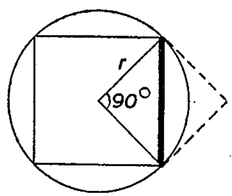
IX. YMPYRÄN SISÄÄN JA YMPÄRI PIIRRETTYJEN SÄÄNNÖLLISTEN MONIKULMIOIDEN SIVUJEN LASKEMINEN

113 §. Lause: *r-säteisen ympyrän sisään piirretyn*

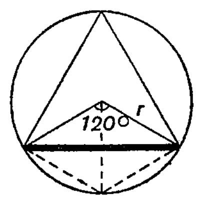
1) *säännöll. 6-kulmion sivu* = 60° *kaaren jänne* = r,
2) *neliön* » = 90° » » = $r\sqrt{2}$,
3) *tasasivuisen kolmion* » = 120° » » = $r\sqrt{3}$.



Kuv. 165.



Kuv. 166.



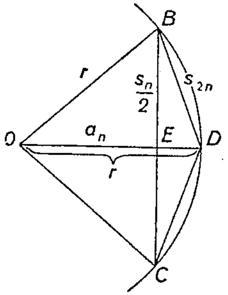
Kuv. 167.

Lauseen ensimmäinen kohta (kuv. 165), joka selvitettiin jo 85 §:ssä, johtuu siitä, että keskuskolmio on tasasivuinen. Toinen kohta (kuv. 166) taas voidaan päättää oikeaksi nojaamalla 110 §:n seur. 1:een ja kolmas kohta (kuv. 167) seur. 2:n avulla.

Harj.teht.: 388) Kuinka suuret ovat ed. lauseessa mainittujen monikulmioiden alat?

389) Jos a) säännöll. 6-kulmion, b) neliön, c) tasasivuisen kolmion sivu = 6 cm, niin kuinka suuri on sen ympäri piirretyn ympyrän säde?

390) Laskettava r-säteisen ympyrän ympäri piirretyn a) neliön, b) tasasivuisen kolmion, c) säännöll. 6-kulmion sivu.



Kuv. 168.

***114 §.** Olkoon r-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion sivu $= s_n$. Johdamme kaavan s_{2n}:n laskemiseksi, kun s_n oletetaan tunnetuksi.

Kuviossa 168 on $BC = s_n$, $BD = s_{2n}$. Soveltamalla laajennettu Pythagoraan lause $\triangle BOD$:hen saadaan

$$s_{2n}^2 = r^2 + r^2 - 2ra_n.$$

a_n merkitsee tässä säännöllisen n-kulmion apoteemaa. $\triangle BOE$:stä saadaan Pythagoraan lauseen nojalla

$$\text{(I)} \qquad a_n = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Kun tämä sijoitetaan edelliseen yhtälöön, se saa muodon

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2},$$

joten

$$\text{(II)} \qquad s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}.$$

Esim. Koska $s_4 = r\sqrt{2}$ (ed. §, lause), niin kaavan (II) mukaan saadaan

$$s_8 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - 2r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Tähän tulokseen nojautuen saadaan uudestaan kaavaa (II) käyttäen

$$s_{16} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2(2 - \sqrt{2})}}$$

$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2 + r^2\sqrt{2}}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Samalla tavalla edelleen laskemalla havaitaan, että

$$s_{32} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Jos ympyrän halkaisija = 1 ja siis säde $r = \frac{1}{2}$, niin suorittamalla laskut saadaan ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 32-kulmion piirin pituudeksi

$$32 \cdot s_{32} = 3{,}137.$$

Koska tämä piiri liittyy jo hyvin läheisesti ympyrän kehään, jonka pituus $= \pi \cdot 1 = \pi$ (52 §, seur.), niin saatu piirin pituus esittää π:n likiarvoa. Itse asiassa näin saadaankin π:n kaksidesimaalinen likiarvo 3,14. Laskemalla edelleen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 64-, 128-, . . . kulmion piirit saadaan π:n arvo määrätyksi kuinka tarkkaan tahansa.

Harj. teht.: 391) Näytettävä kaavaa (II) käyttäen, että

$$s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \qquad s_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

392) Laskettava suoraan, käyttämättä kaavaa (II), ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 8-kulmion sivu ja ala, kun ympyrän säde on 3 cm.
Ohje: Keskuskolmion alaa laskettaessa on mukavampi valita kannaksi ympyrän säde kuin 8-kulmion sivu.

393) Säännöllisen 12-kulmion a) piiri = 1 m, b) ala = 1 m². Laskettava ympäri piirretyn ympyrän säde.

***115 §.** Olkoon r-säteisen ympyrän ympäri piirretyn säännöllisen n-kulmion sivu $= S_n$. Johdamme kaavan S_n:n laskemiseksi, kun s_n oletetaan tunnetuksi.

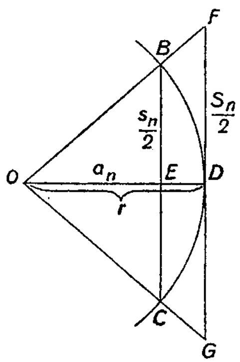
Kuviossa 169 on $BC = s_n$, $FG = S_n$. Koska $\triangle FOD \sim \triangle BOE$ (kk), niin

$$\frac{S_n}{2} : \frac{s_n}{2} = r : a_n.$$

Tästä seuraa, että

$$S_n = \frac{rs_n}{a_n}.$$

Kun tähän sijoitetaan a_n:n lauseke ed. §:n kaavasta (I), saadaan



Kuv. 169.

$$\text{(III)} \qquad S_n = \frac{2rs_n}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}.$$

Esim. Lasketaan S_8. Sijoittamalla kaavaan (III) ed. §:n esimerkissä johdettu s_8:n lauseke saadaan

$$S_8 = \frac{2r \cdot r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4r^2 - r^2(2-\sqrt{2})}} = \frac{2r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{r\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

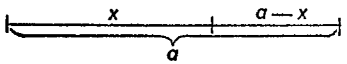
Kun juuren poistamiseksi nimittäjästä neliöjuuren alla oleva murtolauseke lavennetaan $(2-\sqrt{2})$:lla, saadaan edelleen

$$S_8 = 2r\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2r(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1).$$

Harj.teht.: 394) Näytettävä, että $S_{12} = 2r(2-\sqrt{3})$.

395) Laskettava säännöllisen 8-kulmion sisään piirretyn ympyrän säde, kun 8-kulmion a) sivu = 5 cm, b) ala = 10 cm².

116 §. Jos jana on jaettu kahteen osaan siten, että suurempi osa on koko janan ja pienemmän osan keskiverto, niin janan sanotaan olevan jaettu *jatkuvaan suhteeseen*. Myös sanotaan, että janassa on toimitettu *kultainen leikkaus*. Laskeaksemme tällöin osien pituudet, kun janan pituus $= a$, merkitsemme suurempaa osaa x:llä, jolloin pienempi osa $= a-x$ (kuv. 170). On siis voimassa verranto



Kuv. 170.

$$a : x = x : (a-x).$$

Tästä saamme ensin

$$x^2 = a(a-x)$$

ja sitten edelleen

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Kun tämä toisen asteen yhtälö ratkaistaan, sen positiiviseksi juureksi saadaan

(A) $$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2},$$

joka voidaan sieventää muotoon

(B) $$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = 0{,}62\, a.$$

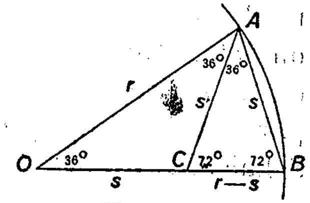
Tämä on siis suurempi osa. Pienemmäksi osaksi saadaan

$$a - x = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}) = 0{,}38\, a.$$

* **Lause:** *Ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 10-kulmion sivu (s) eli 36° kaaren jänne = säteen (r) suurempi osa, kun säde on jaettu jatkuvaan suhteeseen:* $s = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Tod.: Säännöllisen 10-kulmion keskuskolmio AOB (kuv. 171) on tasakylkinen. Sen huippukulma = 36° ja siis kantakulmat = 72°. Kantakulman A puolittaja AC jakaa keskuskolmion kahteen kolmioon, joissa

$$\wedge COA = \wedge CAO = 36°,$$
$$\wedge ABC = \wedge ACB = 72°.$$



Kuv. 171.

Tästä seuraa, että

$$CO = CA = AB = s \quad (78\ §,\ \text{lause } 1)$$

ja niin ollen $CB = r - s$. 105 §:n lauseen 1 mukaan saadaan näin verranto[1]

$$r : s = s : (r-s),$$

josta näkyy, että todellakin s = säteen r suurempi osa, kun säde on jaettu jatkuvaan suhteeseen.

Harj.teht.: 396) Näytettävä, että jos janassa toimitetaan kultainen leikkaus ja suuremmassa osassa edelleen kultainen leikkaus, niin tällöin saatava suurempi osa = edellisen kultaisen leikkauksen pienempi osa.

* 397) Laskettava r-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen viisikulmion sivu s_5.

Vastaus: $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. *Ohje:* s_5 saadaan panemalla 114 §:n yhtälöön (II) $n = 5$ ja ratkaisemalla sitten yhtälö s_5:n suhteen tai laskemalla tasakylkisen kolmion ABC (kuv. 171) korkeus, joka on puolet s_5:stä.

* 398) Näytettävä laskemalla, että

$$\cos 36° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1), \quad \cos 72° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

* 399) Ympyrän säde = 4 cm. Kuinka suuri on sen sisään piirretyn säännöllisen a) 10-kulmion, b) 5-kulmion ala?

Vastaus: a) $20\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ = ? cm, b) $10\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ = ? cm².

* 400) Kun säännölliseen viisikulmioon piirretään kaikki lävistäjät niin, muodostuu toinen säännöllinen viisikulmio. On näytettävä, että sen sivu = alkuperäisen viisikulmion sivun pienempi osa, kun sivu on jaettu jatkuvaan suhteeseen.

[1] Samaan verrantoon päästään myös nojautumalla kolmioiden OAB ja ABC yhdenmuotoisuuteen.

X. KONSTRUKTIOTEHTÄVIEN RATKAISEMINEN ALGEBRAA JA HOMOTEETTISUUTTA HYVÄKSI KÄYTTÄEN

*** 117 §.** Merkitkööt $a, b, c, \ldots$ janojen mittalukuja, kun ne ovat mitatut samalla mitalla. Samoilla kirjaimilla merkitsemme itse janojakin. Jana, jonka mittaluku x on jokin tunnettujen janojen mittalukujen lauseke, voidaan konstruoida suorittamalla asianomaiset laskut ja piirtämällä sitten jana, jonka mittaluku on saatu tulos. Sellaisissa tapauksissa kuin esim. $x = a + b$, $x = a - b$, $x = na$, $x = \frac{a}{n}$ (n kokonaisluku) osaamme piirtää janan x käyttämättä hyväksi janojen a ja b mittalukuja (ks. 3 ja 66 §). On eräitä muitakin tällaisia tapauksia. Yksinkertaisimmat niistä ovat seuraavat:

1) $x = \frac{bc}{a}$ on janojen a, b ja c *neljäs verto*, sillä tällöin on voimassa verranto $a : b = c : x$ (92 §, teht. 2).

2) $x = \frac{b^2}{a}$ on janojen a ja b *kolmas verto*, sillä tällöin on voimassa verranto $a : b = b : x$ (ed. kohdan erikoistapaus $b = c$).

3) $x = \sqrt{ab}$ on janojen a ja b *keskiverto*, sillä tällöin on voimassa verranto $a : x = x : b$ 108 §).

4) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ on sen suorakulmaisen kolmion *hypotenuusa*, jonka kateetit ovat a ja b (Pythagoraan lause).

5) $x = \sqrt{c^2 - a^2}$ on sen suorakulmaisen kolmion *kateetti*, jonka hypotenuusa on c ja toinen kateetti a (Pythagoraan lause).

6) $x = a\sqrt{n}$ on janojen a ja na keskiverto, sillä voidaan kirjoittaa $x = \sqrt{a \cdot na}$. Sitäpaitsi erikoisesti:

a) $x = a\sqrt{2}$ on 90° kaaren jänne, kun säde $= a$ (113 §),

b) $x = a\sqrt{3}$ » 120° » » , » » » » » ».

Kaikissa edellä luetelluissa tapauksissa on piirrettävän janan mittaluku x annettujen janojen mittalukujen **ensimmäisen asteen homogeeninen** lauseke.[1] Vain tällä edellytyksellä onkin piirrettävä jana riippumaton siitä, mitä mittaa on käytetty. Voidaan todistaa, että janan x konstruoiminen yksinomaan harppia ja viivoitinta käyttäen on mahdollista silloin ja vain silloin, kun asianomainen x:ää esittävä ensimmäisen asteen homogeeninen lauseke voidaan saattaa sellaiseen muotoon, että siinä ei ole muita irrationaalisuuksia kuin korkeintaan neliöjuuria.

Esim. 1. $x = \frac{cde}{ab}$.

Kirjoitetaan $x = \frac{c}{a} \cdot \frac{de}{b}$ ja piirretään ensin neljäs verto $y = \frac{de}{b}$ ja sitten neljäs verto $x = \frac{cy}{a}$.

Esim. 2. $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

Ratk. 1: Kirjoitetaan

$$x = \frac{a\left(a + \frac{b^2}{a}\right)}{a + b}$$

ja piirretään ensin kolmas verto $y = \frac{b^2}{a}$, sitten summat $a + b$ ja $a + y$ ja lopuksi neljäs verto $x = \frac{a(a + y)}{a + b}$.

Ratk. 2: Kirjoitetaan

$$x = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2})^2}{a + b}$$

ja piirretään ensin hypotenuusa $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, sitten summa $a + b$ ja lopuksi kolmas verto $x = \frac{y^2}{a + b}$.

Esim. 3. $x = \sqrt{ab - 3c^2}$.

Ratk. 1: Kirjoitetaan

$$x = \sqrt{a\left(b - \frac{3c^2}{a}\right)}$$

---

[1] Tällöin on huomattava, että
tulon aste = tekijöiden asteiden summa,
osamäärän aste = jaettavan ja jakajan asteiden erotus,
juuren aste = juurrettavan aste jaettuna juuren indeksillä.

ja piirretään ensin neljäs verto $y = \frac{3c \cdot c}{a}$, sitten $b - y$ ja lopuksi keskiverto $x = \sqrt{a(b-y)}$.

Ratk. 2: Kirjoitetaan $x = \sqrt{(\sqrt{ab})^2 - (c\sqrt{3})^2}$ ja piirretään ensin keskiverto $y = \sqrt{ab}$, sitten 120° kaaren jänne $z = c\sqrt{3}$ ja lopuksi kateetti $x = \sqrt{y^2 - z^2}$.

Harj.teht.: 401) $x = \frac{a^3}{b^2}$ (vrt. esim. 1).

402) $x = \frac{ab + cd}{2(a + c)}$ (vrt. esim. 2 ratk. 1).

403) $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$ (vrt. esim. 3 mol. ratk.).

404) $x = a\sqrt{5}$. *Ohje:* Voidaan piirtää, paitsi kohdassa 6) esitetyllä tavalla, myös kirjoittamalla $x = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$.

405) $x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$. *Ohje:* Kirjoitetaan $x = \sqrt{\frac{a^2}{c} \cdot b}$.

406) $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$. *Ohje:* Joko erotetaan juurrettavasta tekijäksi esim. a tai kirjoitetaan

$$x = \sqrt{(a-b)^2 + (\sqrt{ab})^2} \text{ tai } x = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 - (\sqrt{ab})^2}.$$

407) $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$. *Ohje:* Kirjoitetaan $x = \sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}}$.

408) **Piirrettävä yhtälön $x^2 - ax + b^2 = 0$ juuret.**

118 §.[1] Konstruktiotehtävän ratkaisu voidaan usein löytää mukavasti algebraa apuna käyttäen. Tällöin menetellään seuraavasti:

1) Piirretään »mallikuvio», jossa tehtävä on likimääräisesti ratkaistuna. Lisäksi suoritetaan tarvittaessa tehtävän ratkaisua edistäviä apupiirroksia.

2) Merkitään x:llä sellaista mallikuviossa esiintyvää janaa, jonka tuntemisen jälkeen konstruointi voidaan helposti suorittaa.

3) Annettujen ehtojen avulla muodostetaan yhtälö tuntemattoman x ja tunnettujen janojen a, b, c, ... välille.

4) Tämä yhtälö ratkaistaan.

5) Saatu x:n lauseke piirretään ed. §:ssä esitetyillä keinoilla.

[1] Tästä pykälästä kuuluu lukion lyhyempään matematiikan kurssiin ainoastaan teht. 1, joka voidaan käsitellä aivan erillään yleisestä esityksestä.

6) Suoritetaan tehtävän lopullinen ratkaisu.

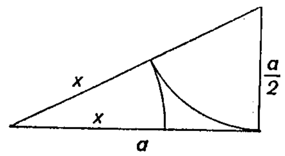
Usein on syytä suorittaa lopuksi tavanmukainen »tarkastelu», jossa selvitetään, millä edellytyksellä tehtävä on mahdollinen ja montako ratkaisua tehtävällä on.

Teht. 1: *Jana on jaettava jatkuvaan suhteeseen.*

Olkoon annettu jana a ja x sen suurempi osa, kun jana on jaettu jatkuvaan suhteeseen. Asianomaisesta verrannosta ratkaisemalla olemme jo aikaisemmin (116 § (A)) saaneet:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Tämän konstruoimiseksi piirretään (kuv. 172) suorakulmainen kolmio, jonka kateetteina ovat a ja $\frac{a}{2}$, ja vähennetään sitten hypotenuusasta jana $\frac{a}{2}$. Jäännös $= x$.



Kuv. 172.

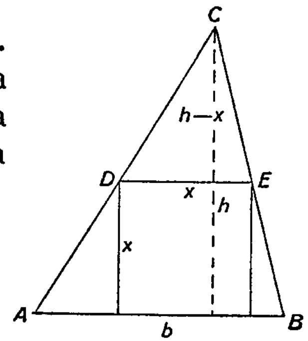
* **Teht. 2:** *Kolmion sisään on piirrettävä neliö* (neliön kärkien on oltava kolmion sivuilla).

Piirretään mallikuvio (kuv. 173). Olkoon b se kolmion sivu, jolla on kaksi neliön kärkeä, ja h vastaava korkeus. Piirrettävän neliön sivua merkitään x:llä. Koska

$\triangle DEC \sim \triangle ABC$ (94 §, lause),

niin

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{b}.$$



Kuv. 173.

Tästä yhtälöstä saadaan ratkaisemalla

$$x = \frac{bh}{b+h}.$$

Siis neliön sivu on janojen $b+h$, b, ja h neljäs verto. Kun tämä on piirretty, voidaan helposti piirtää itse neliö kolmion sisään. Suoritettava piirros täydellisesti!

* **Teht. 3:** *Monikulmio on neliöitävä, so. muunnettava neliöksi.*

Monikulmio muunnetaan ensin kolmioksi (43 §, teht. 3). Olkoon tämän kolmion kanta $= b$ ja korkeus $= h$. Jos piirrettävän neliön sivua merkitään x:llä, saadaan yhtälö

$$x^2 = \frac{bh}{2}.$$

Tästä seuraa $x = \sqrt{b \cdot \frac{h}{2}}$, joten x on janojen b ja $\frac{h}{2}$ keskiverto.

* **Harj.teht.:** 409) Ympyrän sisään on piirrettävä säännöllinen a) 10-kulmio, b) 5-kulmio (116 §, lause).

410) Tunnetaan janan pienempi osa, kun jana on jaettu jatkuvaan suhteeseen. On piirrettävä itse jana.

411) Tasakylkisestä kolmiosta on kannan suuntaisella suoralla erotettava kolmio niin, että jäljelle jäävässä puolisuunnikkaassa kolme pienintä sivua ovat yhtä pitkiä (94 §).

412) Neliöstä on leikattava kulmat pois niin, että syntyy säännöllinen 8-kulmio.

413) Puoliympyrän sisään on piirrettävä neliö (kaksi kärkeä halkaisijalla ja kaksi kaarella). *Ohje:* Mallikuviossa ympyrän keskipiste yhdistetään neliön kärkeen ja käytetään hyväksi Pythagoraan lausetta.

414) Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä on piirrettävä sekantti niin, että siitä ympyrän sisään jäävä osa on annetun janan suuruinen (106 §; vrt. myös 64 §:n harj.teht. 17:n ratkaisemistapaa).

415) Kolmio on jaettava kahtia a) kannan suuntaisella suoralla (94 ja 96 §), b) sivulla annetun pisteen kautta kulkevalla suoralla. *Ohje:* Toinen osista on kolmio, jonka ala on puolet alkuperäisen kolmion alasta.

416) Piirrettävä ympyrä, joka sivuaa annettua suoraa ja kulkee kahden annetun pisteen kautta. *Ohje:* Piirretään annettujen pisteiden kautta suora ja määrätään tämän ja annetun suoran leikkauspisteen etäisyys sivuamispisteestä pisteen potenssiin nojautuen (106 §).

417) Neliö on muunnettava tasasivuiseksi kolmioksi.

418) Jana on jaettu mielivaltaisesti kahteen osaan ja nämä osat sekä koko jana halkaisijoina on piirretty samalle puolelle janaa puoliympyrän kaaret. Niiden rajoittama alue (»Arkhimedeen sirppi») on muunnettava ympyräksi.

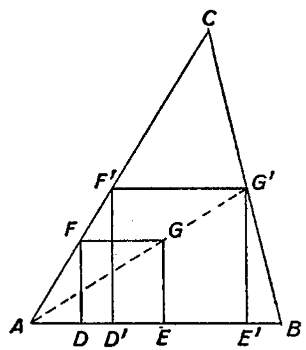
419) Piirrettävä ympyrä, jonka ala = kolmen annetun ympyrän alojen summa.

420) Ympyrän sisään on piirrettävä annetun puolisuunnikkaan suuruinen suorakulmio. *Ohje:* On mukavinta valita tuntemattomaksi suorakulmion kärjen etäisyys lävistäjästä.

421) Kolmio on muunnettava toisen tunnetun kolmion muotoiseksi. *Ohje:* Kun merkitään muunnettavan kolmion kantaa a:lla ja korkeutta h:lla, toisen annetun kolmion kantaa b:llä ja korkeutta k:lla sekä piirrettävän kolmion kantaa x:llä, niin saadaan verranto (ks. 96 §):

$$\frac{ah}{2} : \frac{bk}{2} = x^2 : b^2.$$

* **119 §.** Oppikirjan kolmannessa luvussa olemme oppineet ratkaisemaan konstruktiotehtäviä urien avulla. Edellisessä §:ssä olemme nähneet, kuinka tällaisen tehtävän ratkaisu usein löydetään algebraa apuna käyttäen. Nyt esitämme vielä esimerkkien avulla, kuinka konstruktiotehtävä joskus voidaan sangen mukavasti ratkaista nojautumalla homoteettisuuteen (99 ja 100 §).



Kuv. 174.

Teht.: *Kolmion* (*ABC*, kuv. 174) *sisään on piirrettävä neliö* (vrt. ed. §:n teht. 2).

Ratk.: Piirretään mielivaltainen neliö $DEFG$ niin, että sen kärjet D ja E ovat sivulla AB ja kärki F sivulla AC. Sitten piirretään suora AG, joka leikatkoon sivua BC pisteessä G'. Kun nyt piirretään $G'F' \parallel GF$, $G'E' \parallel GE$ ja $F'D' \parallel FD$, niin näin syntynyt kolmion sisään piirretty nelikulmio $D'E'F'G'$ on neliö, koska se on homoteettinen neliön $DEFG$ kanssa pisteen A suhteen (100 §).

Harj.teht.: 422) Harj.teht. 413 on ratkaistava homoteettisuuteen nojautumalla.

423) Ympyrän sektorin sisään on piirrettävä annetun suorakulmion muotoinen suorakulmio siten, että a) kaksi kärkeä on kaarella ja yksi kummallakin säteellä, b) kaksi kärkeä on toisella säteellä ja yksi toisella säteellä ja yksi kaarella.

424) Kolmion sisään on piirrettävä kolmio, jonka sivut ovat kolmen annetun suoran suuntaiset.

425) Ympyrän sektorin sisään on piirrettävä ympyrä.

426) Piirrettävä ympyrä, joka sivuaa kahta toisiaan leikkaavaa suoraa ja kulkee annetun pisteen kautta. *Ohje:* Siihen suorien muodostamaan kulmaan, jossa annettu piste P on, piirretään ensin mielivaltainen ympyrä, joka sivuaa suoria. Sitten piirretään tämän ympyrän kanssa suorien leikkauspisteen suhteen homoteettinen ympyrä, joka kulkee pisteen P kautta. Tämän piirtämistä varten määrätään pisteen P vastinpiste ensin piirretyn ympyrän kehällä.

427) Harj.teht. 416 ratkaistava homoteettisuuteen nojautumalla. *Ohje:* Annettujen pisteiden yhdistysjanan keskinormaalin ja annetun suoran leikkauspiste valitaan homoteettisuuskeskukseksi.

XI. KERTAUSHARJOITUSTEHTÄVIÄ

120 §. Pythagoraan lauseet ja kolmioiden yhdenmuotoisuus.

428) 120° suuruisen tangenttikulman kärjen etäisyys ympyrän kehästä = 1 cm. Kuinka suuri on ympyrän säde? *Vast.:* 6,46 cm.

429) Neliön sisään on piirretty ympyrä ja sitten pienempi ympyrä, joka sivuaa tätä ympyrää ja kahta neliön sivua. Kuinka suuri on edellisen ympyrän säteen suhde jälkimmäisen ympyrän säteeseen? *Vast.:* $3 + 2\sqrt{2}$.

430) Tasasivuisen kolmion sisään on piirretty kolme yhtäsuurta ympyrää, joista kukin sivuaa molempia muita ympyröitä ja kolmion kahta sivua. Kuinka suuri on kolmion sivun ja ympyrän säteen suhde? *Vast.:* $2+2\sqrt{3}$.

431) Tasasivuisen kolmion ja neliön piirit ovat yhtäsuuret. Kuinka suuri on niiden alojen suhde? *Vast.:* $\frac{4}{9}\sqrt{3} = ?$

432) Kahden ympyrän säteet ovat 7 cm ja 1 cm sekä keskusjana 10 cm. Laskettava niiden yhteisten tangenttien pituudet (sivuamispisteiden väliset osat tangenteista). *Vast.:* 8 cm ja 6 cm.

433) Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan ulkopuolitse. Näytettävä, että sivuamispisteiden välinen osa niiden yhteisestä tangentista on ympyröiden halkaisijain keskiverto.

434) Ympyrän sektorin keskuskulma on 45° ja säde 15 cm. Sen sisään on piirretty neliö siten, että kaksi kärkeä on toisella säteellä ja yksi toisella säteellä sekä yksi kaarella. Kuinka suuri on neliön sivu? *Vast.:* 6,71 cm.

435) Ympyrän sektorin keskuskulma on 60° ja säde 2 cm. Sen sisään on piirretty neliö siten, että kaksi kärkeä on kaarella ja yksi kummallakin säteellä. Kuinka suuri on neliön sivu? *Vast.:* 1,04 cm.

436) Kahden samankeskisen ympyrän säteet ovat 7 ja 5 dm. Kuinka pitkä on se suuremman ympyrän jänne, jonka pienemmän ympyrän kehä jakaa kolmeen yhtäsuureen osaan? *Vast.:* 1,039 m.

437) Ympyrän sisään on piirretty suorakulmio, joka = neliö, jonka sivu = ympyrän säde. Kuinka suuri on suorakulmion suuremman ja pienemmän sivun suhde? *Vast.:* $2 + \sqrt{3}$.

438) Ympyrässä on kaksi yhdensuuntaista jännettä, joista toinen on kaksi kertaa ja toinen neljä kertaa niin pitkä kuin jänteiden väli. Mikä on ympyrän halkaisijan ja lyhyemmän jänteen suhde? *Vast.:* $\sqrt{5}$.

439) Jana ja sen puolikkaat halkaisijoina piirretään samalle puolelle janaa puoliympyrät. Kuinka suuri on janan ja mainittuja kolmea puoliympyrää sivuavan ympyrän halkaisijan suhde? *Vast.:* 3.

440) Suorakulmio, jonka kahdesta erisuuresta sivusta toinen on 25 cm suurempi kuin toinen, on piirretty ympyrän segmentin sisään. Kuinka suuret ovat suorakulmion sivut, jos ympyrän säde = 25 cm ja segmentin jänne = 40 cm? *Vast.:* 30 ja 5 cm.

441) Jos Helsinkiin ja Tallinnaan ajatellaan rakennettaviksi meren pinnasta laskien yhtä korkeat tornit, niin kuinka korkeiksi ne on vähintäänkin tehtävä, jotta toisen huipusta voitaisiin nähdä toisen huippuun? Tornien huippujen väli oletetaan 80 km:ksi ja maapallon säde 6 370 km:ksi.

442) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle on piirretty kolmioon päin ja kateeteille kolmiosta poispäin puoliympyrät. Todettava, että niiden rajoittamien alueiden, »Hippokrateen puolikuiden», alojen summa = suorakulmaisen kolmion ala.

443) Tasakylkisen kolmion kanta on 26 cm ja kylkeä vastaan piirretty korkeus 24 cm. Laskettava kolmion ala. *Vast.:* 405,6 cm².

444) Tasakylkisen kolmion korkeus = 3,6 cm ja sisään piirretyn ympyrän säde = 1 cm. Laskettava kolmion ala. *Vast.:* 5,4 cm².

445) Tasakylkisen kolmion kyljet ovat 48 cm ja kanta 24 cm. Kannan suuntaisella suoralla erotetaan kolmiosta puolisuunnikas, jolla on kolme yhtäsuurta sivua. Laskettava näiden sivujen pituus ja puolisuunnikkaan ala. *Vast.:* Sivut 16 cm ja ala $64\sqrt{15}$ cm = ?

446) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 cm ja 8 cm. Kolmion sisään on piirretty suurin mahdollinen neliö siten, että yksi neliön sivu on a) hypotenuusalla, b) kummallakin kateetilla. Kuinka suuri nn neliön sivu? *Vast.:* $3\frac{9}{37}$ cm, b) $5\frac{5}{7}$ cm.

447) Neliön lävistäjän sekä kärjen ja sivun keskipisteen yhdistysjana jakavat neliöu neljään osaan. Laskettava osien alat, kun neliöu sivu = 4 cm. *Vast.:* $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$ cm².

---

* 448) r-säteisen puoliympyrän sisään on piirretty ympyrä, jonka halkaisija = r. Kuinka suuri on sellaisen ympyrän säde, joka sivuaa tätä ympyrää, ja puoliympyrän kaarta ja halkaisijaa? *Vast.:* $\frac{1}{4}r$. *Ohje:* Merkitään kysyttyä sädettä x:llä ja sovelletaan laaj. Pyth. lause kolmioon, jonka kärkinä ovat molempien ympyröiden ja puoliympyrän keskipisteet.

* 449) Ympyrä O, jonka halkaisija AB = 60 cm, sivuaa suoraa pisteessä A. Kuinka suuri on sen tätä suoraa sivuavan ympyrän säde, jonka keskipiste C on mainitun ympyrän kehällä ja jonka kehä kulkee pisteen B kautta? *Vast.:* 37,1 cm. *Ohje:* Sovell. laaj. Pyth. lause $\triangle OBC$:hen.

* 450) Ympyrän sisään piirretyn kolmion yksi kulma = 60° ja toinen sen viereisistä sivuista = 6 cm. Kuinka suuri on toinen viereinen sivu, jos ympyrän säde = 5 cm? *Vast.:* 9,93 cm. *Ohje:* (80 §, seur. 1 ja 113 §, lause).

* 451) Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan sisäpuolisesti pisteessä A. Piirretään keskussuoraa vastaan mielivaltainen kohtisuora, joka leikatkoon toista ympyrää pisteessä B ja toista pisteessä C. Osoitettava että $BA : CA$ = säteiden suhteen neliöjuuri, joten suhteen arvo on riippumaton kohtisuoran paikasta.

121 §. Pisteen potenssi ja kolmion kulman puolittaja.

452) Kuinka suuri on r-säteisen ympyrän kehän ja pisteen P väli, jos se on puolet pisteestä ympyrälle piirretystä tangentista. *Vast.:* $\frac{2}{3}r$.

453) Tasasivuisen kolmion kärjen kautta piirretään ympyrä, joka sivuaa vastakkaista sivua keskipisteessä. Mihin suhteeseen tämä ympyrä jakaa kolmion toiset sivut? *Vast.:* 1 : 3.

454) r-säteisen ympyrän sisään on piirretty tasasivuinen kolmio. Laskettava sen jänteen pituus, jonka kolmion kaksi sivua jakaa kolmeen yhtäsuureen osaan. *Vast.:* $r\sqrt{3}$.

455) Ympyrä, jonka säde = 6 cm, on jaettu halkaisijalla kahteen puoliympyrään. Toisen puoliympyrän kaaren keskipisteestä on piirretty jänne niin, että siitä toiseen puoliympyrään jäävä osa = 1 cm. Kuinka pitkä jänne on? *Vast.:* 9 cm.

456) Puoliympyrän ympäri on piirretty suorakulmio niin, että puoliympyrän halkaisija on suorakulmion yhtenä sivuna. Mihin suhteeseen jakaa puoliympyrän kaari suorakulmion lävistäjän? *Vast.:* 1 : 4.

* 457) Ympyrän halkaisija jakaa jänteen kahteen osaan, joiden pituudet ovat a ja b, ja muodostaa jänteen kanssa 45° kulman. Kuinka suuri on ympyrän säde?

Vast.: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

---

458) Kuinka suuri on tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kantakulman puolittajasta kolmion sisään jäävän osan ja kannan suhde? *Vast.:* $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

459) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 9 ja 12 cm. Laskettava niiden kolmioiden alat, joihin suoran kulman puolittaja jakaa kolmion (106 §, seur. 3). *Vast.:* 30,9 cm² ja 23,1 cm².

460) Tasakylkisen kolmion kanta = 4 cm ja kyljet = 8 cm. Kuinka suuri on kantakulman puolittajan kolmiosta kannan puolelle erottaman kolmion ala? *Vast.:* 5,16 cm².

461) Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti = 4 m ja sen viereisen terävän kulman puolittajasta kolmion sisään jäävä osa = 5 m. Kuinka suuri on toinen kateetti? *Vast.:* 13,71 m.

462) Puolisuunnikkaan sivut ovat: AB = 16 m, CD = 10 m ja $AD = BC$ = 5 m. Kulman A puolittaja leikkaa sivun BC jatkeen pisteessä E. Laskettava BE. *Vast.:* 7,27 m.

463) $\triangle ABC$:ssä on AB = 7 cm, AC = 15 cm ja $\wedge A = 60°$. $\wedge A$:n puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Laskettava BD. *Vast.:* 4,1 cm.

464) Laskettava suorakulmaisen kolmion suoran kulman puolittajasta kolmion sisään jäävän osan pituus, kun kateetit ovat a ja b.

Vast.: $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

465) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3 ja 4 cm. Kulmien puolittajien ja vastaisten sivujen leikkauspisteet yhdistetään. Laskettava yhdistysjanojen muodostaman kolmion ala. *Vast.:* $1\frac{4}{7}$ cm². *Ohje:* Lasketaan ensin niiden kolmen kolmion alat, jotka suorakulmaisesta kolmiosta jäävät laskettavan kolmion ulkopuolelle (96 §, lause).

VIIDES LUKU

Suorien ja tasojen keskinäiset asennot avaruudessa

I. JOHDANTO

122 §. Tähän asti olemme olettaneet, että kulloinkin tarkasteltavana olevat kuviot ovat kokonaisuudessaan samassa tasossa. Monet lauseet, kuten esim. kolmioiden yhtenevyys- ja yhdenmuotoisuuslauseet, joissa on kysymys kahdesta tai useammasta eri kuviosta, pätevät silloinkin, kun eri kuviot ovat eri tasoissa. Nyt vapaudumme puheena olevasta rajoituksesta ja ryhdymme tarkastelemaan kuvioita, joiden ei tarvitse olla kokonaisuudessaan samassa tasossa.

Olemme jo aikaisemmin (4 §) esittäneet seuraavan tason perusominaisuuden, jota voidaan pitää tason määritelmänä: *Taso on pinta, joka sisältää kokonaan jokaisen suoran, jonka kanssa sillä on kaksi yhteistä pistettä.* Käsityksemme mukaan on selvää, että *yksi ja vain yksi taso voidaan asettaa*

1) *kolmen pisteen kautta, jotka eivät ole samalla suoralla,*
2) *suoran ja sen ulkopuolella olevan pisteen kautta,*
3) *kahden toisiaan leikkaavan suoran kautta,*
4) *kahden yhdensuuntaisen suoran kautta.*

On huomattava, että kohdat 2 ja 3 seuraavat kohdasta 1 tason määritelmän perusteella ja samoin myös kohta 4, kun lisäksi otetaan huomioon, että yhdensuuntaiset ovat määritelmän (alla *b*-kohta) perusteella aina samassa tasossa.

K a h d e n e r i s u o r a n erilaiset keskinäiset asennot avaruudessa ovat:

a) suorat *leikkaavat* toisensa, kun niillä on yhteisenä yksi ja vain yksi piste, leikkauspiste,

b) suorat ovat *yhdensuuntaiset*, kun niillä ei ole yhteistä pistettä mutta suorat ovat kuitenkin samassa tasossa,

c) suorat ovat *ristikkäin*, kun niillä ei ole yhteistä pistettä eivätkä suorat ole samassa tasossa.

S u o r a n j a t a s o n erilaiset keskinäiset asennot avaruudessa ovat:

a) suora ja taso *leikkaavat* toisensa, kun niillä on yksi ja vain yksi yhteinen piste, leikkauspiste,

b) suora ja taso ovat *yhdensuuntaiset*, kun niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä,

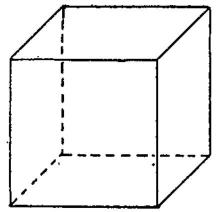
c) *suora on kokonaan tasossa*, heti kun suoralla ja tasolla on kaksikin yhteistä pistettä.

K a h d e n e r i t a s o n erilaiset keskinäiset asennot avaruudessa ovat:

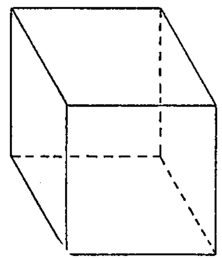
a) tasot *leikkaavat* toisensa suoraa pitkin, heti kun tasoilla on yksikin yhteinen piste, ja leikkaussuora koostuu tasojen kaikista yhteisistä pisteistä,

b) tasot ovat *yhdensuuntaiset*, kun niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä.

123 §. Tasogeometriassa havainnollistetaan kuviot piirtämällä. Avaruudessa ei piirtämistä voida suorittaa. Sen sijaan voidaan avaruuskuviot havainnollistaa rakentamalla malleja, joissa suorien kuvaajina käytetään esim. puutikkuja, oljenkorsia tai suoria metallilangan palasia ja tasojen kuvaajina esim. pahvi- tai peltilevyjä. Tällaisten mallien rakentaminen on opettavaista ja helpottaa avaruuskuvioiden käsittämistä. Mutta toiselta puolen on



Kuv. 175 a.



Kuv. 175 b.

tärkeätä oppia mielessään kuvittelemaan tällaisia rakennelmia, niitä rakentamattakin.

Avaruuskuviota voidaan havainnollistaa myös piirtämällä sen k u v a. Piirustustunneilla on opittu piirtämään esineiden ns. *perspektiivisiä kuvia*. Erinäisistä syistä ei tällaista kuvaamista kuitenkaan geometriassa yleensä käytetä. Sen sijaan on geometriassa käytettäväksi sangen sopiva ns. *vino yhdensuuntaisprojektio*, jonka piirtäminenkin on hyvin helppoa. Tällaisen kuvan muodostaa esimerkiksi avaruusrakennelman varjo, kun rakennelma pannaan paperille, jolle aurinko paistaa vinosti. Kuviot 175 a ja 175 b esittävät vinossa yhdensuuntaisprojektiossa kuutiota, jonka yhden sivuneliön ajatellaan olevan paperilla. Edellisessä kuviossa valosäteet tulevat edestä vinosti oikealta ja jälkimmäisessä kuviossa vinosti vasemmalta. Edellisessä kuviossa valosäteet tulevat ylhäältä jyrkempään ja enemmän sivulta päin kuin jälkimmäisessä.

Vinossa yhdensuuntaisprojektiossa kuvattaessa

1) ***piirustustasossa ja sen suuntaisissa tasoissa olevat kuviot säilyttävät muotonsa, kokonsa ja suuntansa,***

2) ***yhdensuuntaiset suorat pysyvät yhdensuuntaisina,***

3) ***yhdensuuntaiset janat lyhenevät tai pitenevät samassa suhteessa.***

Hyvin usein käytetään kuviossa 175 a esitettyä erikoista vinoa yhdensuuntaisprojektiota, ns. *kavaljeeriperspektiiviä,* jossa piirustustasoa vastaan kohtisuorat janat lyhenevät puoleen pituuteensa ja muodostavat 45° kulman vaakasuoran suunnan kanssa.

Kuten kumpaankin suuntaan rajatonta suoraa kuvataan rajoitetulla suoralla viivalla, janalla, samoin kaikkiin suuntiin rajatonta tasoa esitetään rajoitetulla tasaisella pinnalla, tavallisesti suorakulmiolla. Kun sitten tämä suorakulmio kuvataan tasoon vinossa yhdensuuntaisprojektiossa, kuvaksi tulee aina suunnikas (poikkeustapauksessa suunnikkaan rajatapaus, jana). Niinpä esim. kuviossa 176 esiintyvä suunnikas kuvaa tasoa τ, jonka ajatellaan olevan kohtisuorassa paperin tasoa vastaan ja leikkaavan sitä vaakasuoraa pitkin.

II. TASON NORMAALIT JA SUORAN NORMAALITASOT

124 §. Jos suora leikkaa tason ja on kohtisuorassa kaikkia leikkauspisteen kautta tasoon piirrettyjä suoria vastaan, niin suoran sanotaan olevan *kohtisuorassa* tasoa vastaan ja tason *kohtisuorassa* suoraa vastaan. Suoraa sanotaan tällöin myös tason *normaaliksi* ja tasoa taas suoran *normaalitasoksi*. Leikkauspiste on normaalin *kantapiste*. Jos tason leikkaava suora ei ole kohtisuorassa tasoa vastaan, niin sen sanotaan olevan *vinossa* tasoa vastaan.

Lause 1: *Jos tasoa* (τ, kuv. 176) *leikkaava suora* (s) *on kohtisuorassa kahta leikkauspisteen* (Q) *kautta tasoon piirrettyä suoraa* (a ja b) *vastaan, niin suora on tason normaali.*

Tod.: Meidän on siis vain näytettävä, että kun c on mielivaltainen pisteen Q kautta tasoon τ piirretty suora, niin $s \perp c$. Todistusta varten piirretään tasoon τ suora, joka leikatkoon suoria a, b ja c vastaavasti pisteissä A, B ja C. Erotetaan sitten s:stä yhtä pitkät janat QM ja QN sekä yhdistetään M ja N pisteisiin A, B ja C.

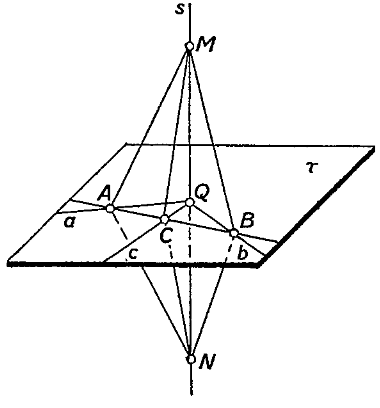
Koska tällöin

$$\begin{aligned} AM &= AN \\ BM &= BN \end{aligned} \quad (71\ \S,\ \text{lause 1}),$$

niin

$$\triangle ABM \cong \triangle ABN \quad (\text{sss}).$$

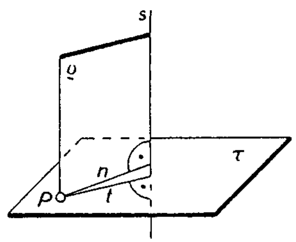
Koska siis CM ja CN yhtenevien kolmioiden vastinjanoina ovat yhtäsuuret ja Q on janan MN keskipiste, niin suora CQ eli c on janan MN keskinormaali. Siis $s \perp c$.



Kuv. 176.

* **Lause 2:** *Jos suoran* (s, kuv. 177) *normaalilla* (n) *ja normaalitasolla* (τ) *on yksikin yhteinen piste* (P), *niin normaali on kokonaan normaalitasossa.*

Tod.: Suorien s ja n kautta asetettu taso ϱ leikatkoon tasoa τ suoraa t myöten. Koska $s \perp \tau$, niin $s \perp t$. Koska siis n ja t ovat tasossa ϱ olevia P:n kautta kulkevia suoran s normaaleja, niin n yhtyy t:hen (14 §, lause), joten n on tasossa τ.

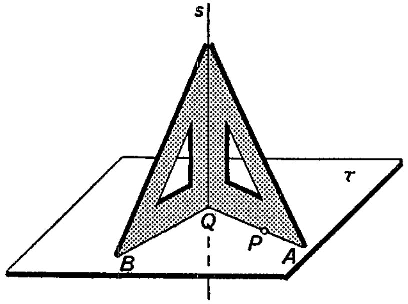


Kuv. 177.

* **125 §.** Ed. §:n lauseeseen 1 nojautuen voidaan ratkaista avaruusgeometriset tehtävät: pisteen kautta on asetettava a) suoran normaalitaso, b) tason normaali. Tällaisten tehtävien ratkaisemisella tarkoitamme asianomaisten rakennelmien muodostamista (123 §). Tavallisesti kuitenkin tyydytään vain selittämään, kuinka rakennelma on muodostettava.

Teht. 1: *Pisteen* (P, kuv. 178) *kautta on asetettava annetun suoran* (s) *normaalitaso.*

Ratk.: Esim. kulmaviivoitinta käyttäen asetetaan suoralle s ensin P:n kautta kulkeva normaali AQ ja sitten toi-



Kuv. 178.

sen kulmaviivoittimen avulla jokin muu Q:n kautta kulkeva normaali BQ. Ed. §:n lauseen 1 perusteella on silloin näiden normaalien kautta asetettu taso τ vaadittu normaalitaso.

Tark.: Tehtävä on aina mahdollinen, olkoonpa P suoran s ulkopuolella, kuten kuviossa 178, tai itse suoralla. Ja koska ed. §:n lauseen 2 mukaan normaalin AQ täytyy olla asetettavassa normaalitasossa ja samoin normaalin BQ, niin saadaan

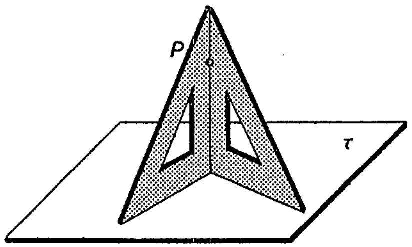
Lause 1: *Pisteen kautta voidaan asettaa suoralle yksi ja ja vain yksi normaalitaso.*

Tästä lauseesta johtuu epäsuorasti päätellen välittömästi

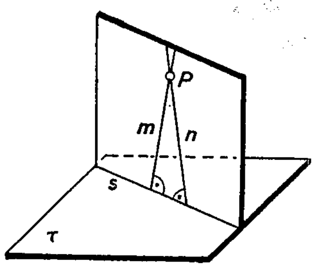
Seur.: *Suoran normaalitasot ovat yhdensuuntaisia.*

Teht. 2: *Pisteen* (P, kuv.179) *kautta on asetettava annetun tason* (τ) *normaali.*

Ratk.: Asetetaan kaksi kulmaviivoitinta niin, että suorien kulmien toiset kyljet ovat tasolla τ (esim. pöydän levy) ja toiset kyljet yhtyvät. Sitten annetaan kulmaviivoittimien ensin mainittujen kylkien liukua tasolla τ niin, että yhteinen kylki (tai kärki) kohtaa pisteen P. Tällöin ed. §:n lauseen 1 perusteella yhteinen kylki esittääkin vaadittua normaalia.



Kuv. 179.



Kuv. 180.

Tark.: Tehtävä on aina mahdollinen, olkoonpa P tason τ ulkopuolella, kuten kuviossamme, tai itse tasolla. P:n kautta voidaan asettaa vain yksi normaali, sillä jos voitaisiin asettaa kaksi normaalia m ja n (kuv. 180), ne olisivat kohtisuorassa niiden määräämän tason ja tason τ leikkaussuoraa s vastaan, mikä on mahdotonta (14 §, lause):

Lause 2: *Pisteen kautta voidaan asettaa tasolle yksi ja vain yksi normaali.*

78 §:n seur. 3:sta johtuu välittömästi

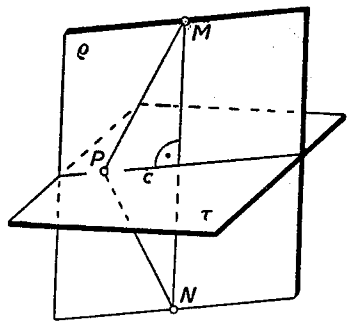
Lause 3: *Pisteen ja tason välinen normaali on lyhin pisteen ja tason välijanoista.*

Pisteen ja tason välisen normaalin pituutta sanotaan pisteen *etäisyydeksi* tasosta eli pisteen ja tason *väliksi.*

126 §. Janan keskipisteen kautta asetettua normaalitasoa sanotaan janan *keskinormaalitasoksi.*

Lause 1: *Janan* (MN, kuv. 181) *keskinormaalitaso* (τ) *on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä.*

Tod.: Olkoon P mielivaltainen piste sekä ϱ sen ja suoran MN kautta asetettu taso. Tasojen ϱ ja τ leikkaussuora c on MN:n keskinormaali tasossa ϱ. Koska myös piste P on tasossa ϱ, voidaan päätellä:

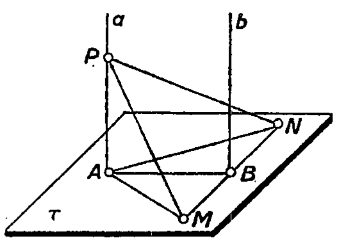


Kuv. 181.

1) Jos P on tasossa τ, niin P on c:llä, joten $PM = PN$ (71 §, lause 1),

2) Jos kääntäen $PM = PN$, niin P on c:llä (71 §, lause 2), joten P on tasossa τ. Siis τ on väitetty ura.

* **Lause 2:** *Tason normaalit* (a ja b, kuv. 182) *ovat yhdensuuntaisia.*

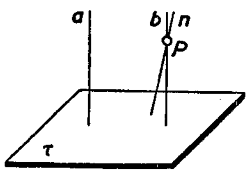


Kuv. 182.

Tod.: Koska a ja b ovat kohtisuorassa kantapisteiden A ja B kautta kulkevaa suoraa vastaan, niin todistaaksemme, että $a \parallel b$, tarvitsee vain näyttää, että a ja b ovat samassa tasossa (17 §, seur. 1).

Todistusta varten piirretään tasoon τ pisteen B kautta kohtisuora suoraa AB vastaan ja erotetaan siitä $BM = BN$. Olkoon sitten P mielivaltainen suoran a piste. Koska $AM = AN$ (71 §, lause 1), niin voidaan päättää, että suorakulmaiset kolmiot PAM ja PAN ovat yhtenevät (sks), joten $PM = PN$. Ed. lauseen mukaan on siis P ja niin ollen koko suora a janan MN keskinormaalitasossa. Mutta tässä tasossahan on myös suora b, janan MN keskinormaali (124 §, lause 2).

* **Lause 3:** *Jos kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta* (a ja b, kuv. 183) *toinen* (a) *on kohtisuorassa tasoa* (τ) *vastaan, niin toinenkin* (b) *on kohtisuorassa samaa tasoa vastaan.*



Kuv. 183.

Tod.: Jos suoralla b olevan pisteen P kautta asetetaan suora $n \perp \tau$, niin ed. lauseen mukaan $n \parallel a$. Mutta koska oletuksen mukaan myös $b \parallel a$, niin täytyy suorien n ja b yhtyä, joten $b \perp \tau$.

* **Lause 4:** *Jos kaksi suoraa* (a ja b) *ovat kolmannen* (c) *suuntaiset, niin ne ovat keskenäänkin yhdensuuntaiset.*

Tod.: Ed. lauseen mukaan a ja b ovat kohtisuorassa suoran c normaalitasoa vastaan. Lauseen 2 perusteella a ja b ovat siis yhdensuuntaiset.

127 §. Kahden pisteen M ja N (kuv. 181) sanotaan olevan *symmetrisessä asennossa* eli *symmetrisiä* jonkin tason, *symmetrisyystason* τ, suhteen, jos τ on pisteiden M ja N yhdistysjanan keskinormaalitaso.

Kahden avaruuskuvion sanotaan olevan *symmetrisessä asennossa* eli *symmetrisiä* jonkin tason suhteen, jos kummankin kuvion jokaista pistettä vastaa mainitun tason suhteen symmetrinen piste toisessa kuviossa. Symmetrisiä kuvioita sanotaan myös toistensa *peilikuviksi.*

Tasossa ovat suoran suhteen symmetrisessä asennossa olevat kuviot aina yhteneviä (30 §). Avaruudessa sitävastoin tason suhteen symmetrisessä asennossa olevat kuviot eivät yleensä ole yhteneviä, vaikkakin niiden vastinjanat ja -kulmat ovat aina yhtäsuuria.

Jos kuvion pisteet ovat parittain symmetrisiä tason τ suhteen, toisin sanoen, jos kuvio on symmetrinen itsensä kanssa tämän tason suhteen, niin sanotaan lyhyesti, että *kuvio on symmetrinen (tason τ suhteen).*

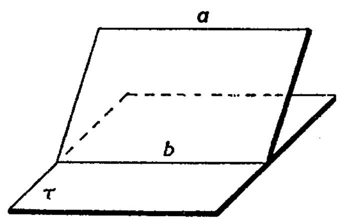
Harj.teht.: 466) Esitettävä kaksi kappaletta, jotka ovat symmetrisiä jonkin tason suhteen ja jotka a) ovat, b) eivät ole yhteneviä.

467) Lausuttava esimerkkejä symmetrisistä kuvioista (esineistä), joiden keskenään symmetriset puoliskot a) ovat, b) eivät ole yhteneviä.

* III. TASON SUUNTAISET SUORAT JA TASOT

128 §. Lause 1: *Jos suora* (a, kuv. 184) *on tasossa* (τ) *olevan suoran* (b) *suuntainen, niin se on itse tasonkin suuntainen tai on tässä tasossa.*

Tod.: Edellyttäen että a ei ole tasossa τ, yhdensuuntaisten suorien a ja b kautta asetetun tason ja tason τ yhteiset pisteet ovat tasojen leikkaussuoralla b. Jos siis a leikkaisi tason τ, niin se leikkaisi myös suoran b, mikä on vastoin oletusta. Siis $a \parallel \tau$.



Kuv. 184.

Lause 2: *Jos tason* (τ, kuv. 184) *suuntaista suoraa* (a) *myöten asetettu taso leikkaa ensin mainitun tason, niin leikkaussuora* (b) *on mainitun suoran suuntainen.*

Tod.: Suorat a ja b ovat ensiksikin samassa tasossa ja toiseksi ne eivät voi leikata toisiaan, koska muutoin a leikkaisi tason τ, mikä on vastoin oletusta. Siis $b \parallel a$.

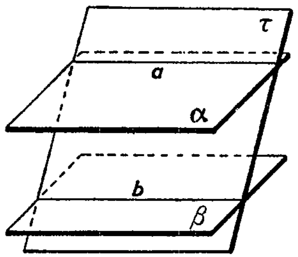
Harj.teht.: 468) Suoran (a) kautta on asetettava toisen suoran (b) suuntainen taso. *Ratk.:* Asetetaan jonkin a:lla olevan pisteen kautta suoran b suuntainen suora ja sitten tämän ja a:n kautta taso. *Tark.:* ?

469) Pisteen kautta on asetettava taso, joka on kahden annetun suoran suuntainen.

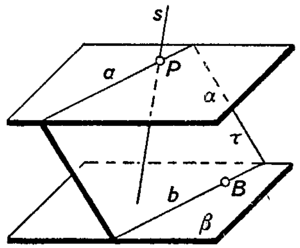
470) Todistettava, että tason ja sen suuntaisen suoran väliset yhdensuuntaiset välijanat ovat yhtäsuuret. Tasoa vastaan kohtisuorien välijanojen pituutta sanotaan suoran *etäisyydeksi* tasosta.

129 §. Lause 1: *Jos taso* (τ, kuv. 185) *leikkaa kahta yhdensuuntaista tasoa* (α ja β), *niin leikkaussuorat* (a ja b) *ovat yhdensuuntaiset.*

Tod.: Koska tasoilla α ja β ei ole yhteistä pistettä, niin ei myöskään suorilla a ja b voi olla yhteistä pistettä, ja koska suorat lisäksi ovat samassa tasossa (τ), niin ne ovat yhdensuuntaiset.



Kuv. 185.



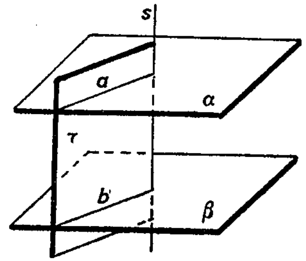
Kuv. 186.

Lause 2: *Jos suora* (s, kuv. 186) *leikkaa toisen* (α) *kahdesta yhdensuuntaisesta tasosta* (α ja β), *niin se leikkaa toisenkin* (β).

Tod.: Asetetaan suoran s ja tason β jonkin pisteen B kautta taso τ. Leikatkoon tämä tasoa β suoraa b ja tasoa α suoraa a myöten. Ed. lauseen mukaan on $a \parallel b$. Koska s on näiden yhdensuuntaisten suorien tasossa (τ) ja leikkaa niistä toisen (a), niin se leikkaa toisenkin (b) (16 §, seur. 1). Siis s leikkaa tason β.

Lause 3: *Jos suora* (s, kuv. 187) *on kohtisuorassa toista* (α) *vastaan kahdesta yhdensuuntaisesta tasosta* (α ja β), *niin se on kohtisuorassa toistakin* (β) *vastaan.*

Tod.: Ed. lauseen perusteella s leikkaa myös tason β. Piirretään leikkauspisteen kautta tasoon β mielivaltainen suora b ja asetetaan taso τ sen ja suoran s kautta. Jos a on suora, jota myöten τ leikkaa tason α, niin $a \parallel b$ (lause 1). Ja koska $s \perp a$, niin $s \perp b$ (17 §, seur. 2). Tason normaalin määritelmän mukaan on siis $s \perp \beta$.



Kuv. 187.

Lause 4: *Tason* (τ) *ulkopuolella olevan pisteen* (P) *kautta voidaan asettaa yksi ja vain yksi mainitun tason suuntainen taso.*

Tod.: Asetetaan pisteen P kautta normaali n tasolle τ (125 §, teht. 2) ja sitten pisteen P kautta suoran n normaalitaso (125 §, teht. 1). Tämä taso on yhdensuuntainen tason τ kanssa (125 §, seur.). — Koska ed. lauseen perusteella jokainen τ:n suuntainen taso on suoran n normaalitaso, niin P:n kautta ei voida asettaa äsken mainitun lisäksi muita τ:n suuntaisia tasoja (125 §, lause 1).

Lause 5: *Yhdensuuntaisten tasojen yhdensuuntaiset välijanat ovat yhtäsuuria.*

Tod.: Kun kahden yhdensuuntaisen välijanan päätepisteet kummassakin tasossa yhdistetään syntyy suunnikas (lause 1), joten välijanat ovat yhtäsuuret.

Jos yhdensuuntaisista välijanoista yksikin on kohtisuorassa toista tasoa vastaan, niin ne kaikki ovat kohtisuorassa sitä vastaan (126 §, lause 3) ja siis myös toista tasoa vastaan (lause 3). Näiden kohtisuorien välijanojen yhteistä pituutta sanotaan yhdensuuntaisten tasojen *etäisyydeksi* toisistaan eli *väliksi*.

Harj.teht.: 471) Todistettava (epäsuorasti), että jos taso leikkaa toisen kahdesta yhdensuuntaisesta tasosta, niin se leikkaa toisenkin.

472) Todistettava (epäsuorasti), että jos kaksi tasoa ovat kolmannen tason suuntaiset, niin ne ovat keskenäänkin yhdensuuntaiset.

473) Todistettava, että jos tason kolme pistettä ovat yhtä kaukana toisesta tasosta ja samalla puolella sitä, niin tasot ovat yhdensuuntaiset.

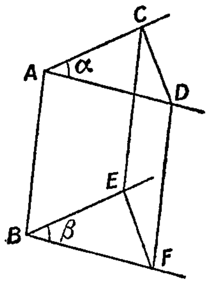
474) Kahden suoran kautta on asetettava toistensa suuntaiset tasot.

IV. DIEDRI — KOHTISUORAT TASOT

130 §. Lause: *Jos kahden koveran kulman* (α ja β, kuv. 188) *samannimiset kyljet ovat yhdensuuntaiset, niin kulmat ovat yhtäsuuret.*

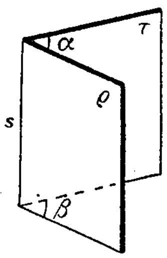
Vaikkakin tämä lause on kirjaimellisesti sama kuin 18 §:n lause 1, niin sisältönsä puolesta se eroaa kuitenkin viimeksi mainitusta siinä suhteessa, että nyt ei oleteta kuten ennen, että kulmat ovat samassa tasossa. Ja koska aikaisempi todistuksemme perustui olennaisesti tähän oletukseen, niin todistus on nyt suoritettava uudestaan.

Tod.: Mitataan $AC = BE$ ja $AD = BF$. Silloin nelikulmiot $ABEC$ ja $ABFD$ ovat suunnikkaita (63 §, lause). Koska siis janat CE ja DF ovat yhdensuuntaisia ja yhtäsuuria janan AB kanssa, niin ne ovat keskenäänkin yhdensuuntaisia (126 §, lause 4) ja yhtäsuuria. Tästä seuraa, että nelikulmio $CEFD$ on suunnikas, joten $CD = EF$. Koska niin ollen $\triangle ACD \cong \triangle BEF$ (sss), niin $\wedge\alpha = \wedge\beta$.



Kuv. 188.

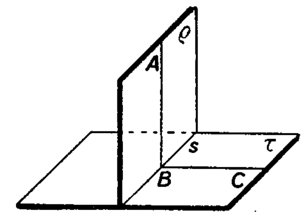
131 §. Kahden samasta suorasta (s, kuv. 189) alkavan puolitason (ϱ ja τ) rajoittamaa avaruuden osaa sanotaan *diedriksi* (vrt. kulman määr., 8 §). s on diedrin *särmä* ja puolitasot ϱ ja τ diedrin *kylkiä*. Kulmaa α, jonka diedrin kyljet erottavat särmän normaalitasosta, sanotaan diedrin *normaalileikkaukseksi*. Edellisestä lauseesta seuraa, että *diedrin kaikki normaalileikkaukset* (esim. α ja β) *ovat yhtäsuuria.* Normaalileikkauksen suuruutta sanotaan myös diedrin suuruudeksi. Ilmeisesti *yhtäsuuret diedrit ovat yhteneviä.* Samoin kuin kulmasta myös diedristä käytetään nimityksiä *terävä, suora, tylppä, vino, kovera* ja *kupera.*



Kuv. 189.

Jos kahden toisensa leikkaavan tason ϱ ja τ muodostamista diedreistä yksikin on suora, niin ne kaikki ovat suoria. Tasojen ϱ ja τ sanotaan tällöin olevan *kohtisuorassa* toisiaan vastaan eli toistensa *normaalitasoja.* Jos taas yksikin ko. diedreistä on vino, niin ne kaikki ovat vinoja. Tasojen ϱ ja τ sanotaan tällöin olevan *vinossa* toisiaan vastaan.

* **132 §. Lause 1:** *Jos tason* (τ, kuv. 190) *normaalia* (AB) *myöten asetetaan taso* (ϱ), *niin se on kohtisuorassa ensin mainittua tasoa vastaan.*



Kuv. 190.

Tod.: Piirretään tasoon τ tasojen leikkaussuoraa s vastaan kohtisuora BC. Suorien AB ja BC määräämä taso on silloin suoran s normaalitaso (124 §, lause 1) ja niin ollen $\wedge ABC$ on tasojen ϱ ja τ rajoittaman diedrin normaalileikkaus. Koska oletuksesta johtuu, että se on suora kulma, niin $\varrho \perp \tau$.

* **Lause 2:** *Jos tason* (τ, kuv. 190) *normaalitasoon* (ϱ) *piirretään leikkaussuoraa* (s) *vastaan kohtisuora* (AB), *niin se on kohtisuorassa ensin mainittua tasoakin vastaan.*

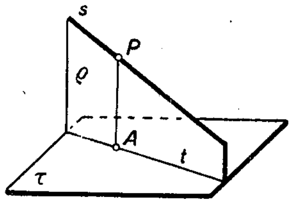
Tod.: Menetellään kuten ed. todistuksessa. Koska nytkin oletuksen perusteella normaalileikkaus ABC on suora kulma ja $AB \perp s$, niin $AB \perp \tau$ (124 §, lause 1).

* **Seur.:** *Jos tason* (τ) *normaalitasossa* (ϱ) *olevan pisteen* (P) *kautta asetetaan kohtisuora ensinmainittua tasoa vastaan, niin se on kokonaan normaalitasossa.*

Saadaanhan nimittäin ed. lauseen mukaan P:n kautta kulkeva tason τ ainoa normaali (125 §, lause 2) piirtämällä P:n kautta normaalitasoon ϱ kohtisuora leikkaussuoraa s vastaan.

* **Teht.**: *Suoran* (s, kuv. 191) *kautta on asetettava annetun tason* (τ) *normaalitaso.*

Ratk.: Asetetaan suoralla s olevan pisteen P kautta normaali PA tasolle τ (125 §, teht. 2.) Tämän ja suoran s määräämä taso ϱ on silloin vaadittu normaalitaso (lause 1).



Kuv. 191.

Tark.: Voidaan asettaa yksi normaalitaso, jos s ei ole kohtisuorassa tasoa τ vastaan, ja äärettömän monta, jos $s \perp \tau$.

Harj.teht.: 475) Todistettava, että jos taso on kohtisuorassa toista vastaan kahdesta yhdensuuntaisesta tasosta, niin se on kohtisuorassa toistakin vastaan.

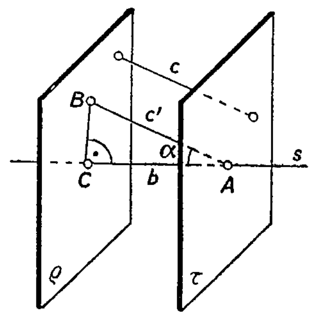
V. PROJEKTIOT

* **133 §.** Kun puhutaan *kahden ristikkäisen suoran välisen kulman* suuruudesta, niin tarkoitetaan kulmaa, jonka muodostaa kaksi jonkin pisteen kautta piirrettyä ko. suorien suuntaista suoraa. 130 §:n lauseen perusteella tämän kulman suuruus on riippumaton mainitun pisteen valinnasta. Kahden ristikkäisen suoran sanotaan olevan *kohtisuorassa* toisiaan vastaan, jos niiden välisen kulman suuruus $= 90°$.

J a n a n *projektiolla* tietyllä s u o r a l l a tarkoitetaan janan päätepisteiden projektioiden välistä janaa silloinkin, kun jana ei ole suoran kanssa samassa tasossa (vrt. 77 §). Janan c (kuv. 192) projektio suoralla s saadaan asettamalla janan päätepisteiden kautta suoran normaalitasot ϱ ja τ, jolloin tasojen välinen osa b suorasta s on ko. projektio. Jos janan b toisesta päätepisteestä asetetaan

tasojen ϱ ja τ väliin jana $c' \parallel c$, niin $c' = c$ (129 §, lause 5) ja c:n ja s:n välisen kulman suuruus $= c'$:n ja b:n välinen kulma α. Suorakulmaisesta kolmiosta ABC saadaan projektion laskemiseksi vanhastaan tuttu kaava (51 §):

$$b = c \cos \alpha.$$



Kuv. 192.

134 §. P i s t e e n *projektiolla* tietyllä t a s o l l a, *projektiotasolla*, tarkoitetaan pisteen kautta tasolle asetetun normaalin kantapistettä. K u v i o n *projektiolla* taas tarkoitetaan sen kaikkien pisteiden projektioiden muodostamaa kuviota. Projektion määräämistä sanotaan *projisoimiseksi.*

Lause 1: *Jos suoran* (s, kuv. 191) *kautta asetetaan taso* (ϱ) *kohtisuoraan jotakin tasoa* (τ) *vastaan, niin leikkaussuora* (t) *on suoran projektio mainitulla tasolla.*[1]

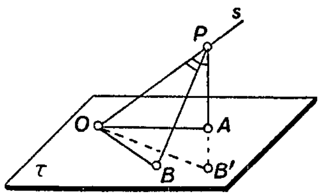
* *Tod.*: Jos suoran s mielivaltaisen pisteen P kautta asetetaan normaali PA leikkaussuoralle t, niin se on myös tason τ normaali (132 §, lause 2), joten P:n projektio τ:lla on t:llä oleva piste A. Samoin voidaan kääntäen päättää, että jokainen t:n piste on jonkin s:n pisteen projektio tasolla τ. Leikkaussuora t on siis suoran s projektio tasolla τ.

Jos suora on vinossa projektiotasoa vastaan, niin suoran ja sen projektion muodostamaa terävää kulmaa sanotaan suoran *kaltevuuskulmaksi* tason suhteen. Jos suora on tason suuntainen, niin kaltevuuskulman sanotaan olevan $= 0°$. Jos taas suora on kohtisuorassa tasoa vastaan, jolloin suoran projektio on piste, niin kaltevuuskulman sanotaan olevan $= 90°$.

[1] **Tällöin edellytetään tietysti, että ko. suora ei ole projektiotason normaali. Normaalin projektio tasolla on normaalin kantapiste.**

Lause 2: *Tasoa* (τ, kuv. 193) *vastaan vinossa olevan suoran* (s) *kaltevuuskulma on pienin niistä kulmista, jotka suora muodostaa leikkauspisteen* (O) *kautta kulkevien tason suorien kanssa.*

Tod.: Asetetaan suoralla s olevan pisteen P kautta normaali PA tasolle τ. Silloin $\wedge POA = s$:n kaltevuuskulma tason τ suhteen. Olkoon sitten OB mielivaltainen OA:sta eriävä tason τ suora ja B tällä suoralla niin valittu piste, että $\wedge OPB = \wedge OPA$. Käännetään edellinen kulma kyljen OP ympäri niin, että se yhtyy jälkimmäiseen kulmaan. Silloin B joutuu janan PA jatkeelle johonkin pisteeseen B', koska $PA < PB$ (125 §, lause 3). Tästä seuraa, että $\wedge POA < \wedge POB'$ ja siis myös $< \wedge POB$.



Kuv. 193.

* **135 §.** Koska ilmeisesti janan projektio tasolla on janan päätepisteiden projektioiden välinen jana, niin 51 §:n lauseesta seuraa välittömästi

Lause 1: *Janan* (c) *projektio* (b) *tasolla = jana kerrottuna kaltevuuskulman* (α) *kosinilla:*

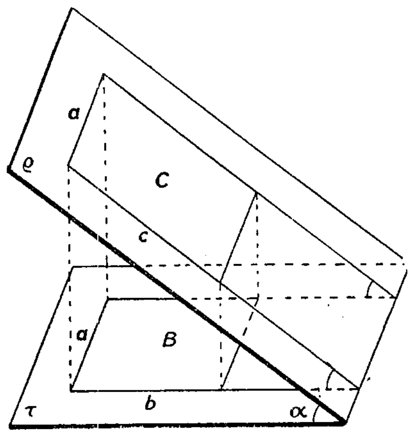
$$b = c \cos \alpha.$$

Kahden tason muodostaman diedrin normaalileikkausta ($\leq 90°$) sanotaan toisen tason *kaltevuuskulmaksi* toisen tason suhteen.

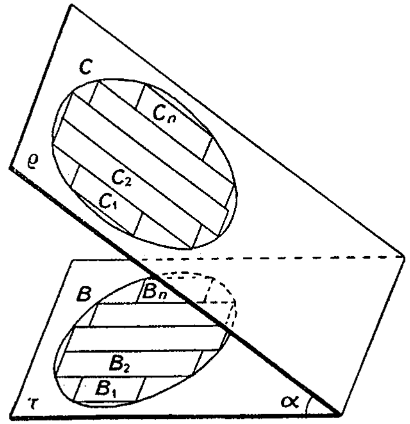
Lause 2: *Tasolla* (ϱ, kuv. 194) *olevan alueen* (C) *projektio* (B) *toisella tasolla* (τ) *= alue kerrottuna kaltevuuskulman kosinilla:*

$$B = C \cos \alpha.$$

** *Tod.:* 1) Olkoon ensin C suorakulmio, jonka toiset kaksi sivua, pituus $= a$, ovat tasojen leikkaussuoran s suuntaiset ja siis toiset kaksi, pituus $= c$, kohtisuorassa s:ää vastaan (kuv. 194 a). Silloin C:n projektio tasolla τ on



Kuv. 194 a.



Kuv. 194 b.

suorakulmio B, jonka toiset kaksi sivua $= a$ ja toiset kaksi $= c \cos \alpha$. Siis $B = a \cdot c \cos \alpha = C \cos \alpha$.

2) Olkoon sitten C mielivaltainen alue (kuv. 194 b). Jaetaan se leikkaussuoraa s vastaan kohtisuoraan piirretyillä suorilla kapeisiin kaistaleisiin, joiden sisään piirretään kuviossa esitetyllä tavalla suorakulmiot $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Näiden projektiot ovat silloin ed. kohdan mukaan:

$$B_1 = C_1 \cos \alpha,\ B_2 = C_2 \cos \alpha, \ldots,\ B_n = C_n \cos \alpha.$$

Kun nämä yhtälöt lasketaan yhteen, saadaan

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n = (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \cos \alpha.$$

Kun kaistaleet otetaan yhä kapeammiksi ja kapeammiksi, so. $n \to \infty$, niin oikealla puolella sulkeissa oleva summa lähenee C:tä ja vasemmalla puolella oleva summa B:tä. Tästä voidaankin päättää todistettava kaava oikeaksi.

Harj. teht.: 476) Kuinka suuri on 2 cm pituisen janan projektio tasolla, kun kaltevuuskulma on a) 45°, b) 37,7°?

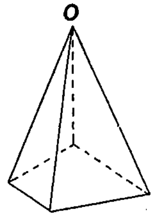
477) Kuinka suuri on ympyrän projektio tasolla, kun ympyrän tason kaltevuuskulma projektiotason suhteen on a) 60°, b) 73,4° ja ympyrän säde = 5 cm?

KUUDES LUKU

Kappaleet sekä niiden tilavuudet ja pinta-alat

I. SÄÄNNÖLLISET MONITAHOKKAAT

136 §. Jos kolmella tai useammalla kulmalla on yhteinen kärki ja parittain yhteinen kylki, niin niiden erottamaa avaruuden osaa sanotaan *sopeksi* eli *avaruuskulmaksi* (kuv. 195). Kulmien yhteinen kärki (O) on myös sopen *kärki*, itse kulmat ovat sopen *sivuja* ja kulmien kyljet taas sopen *särmiä.* *Kuperan*[1] *sopen sivuina olevien kulmien summa* $< 360°$. Tämä käsitetään, kun sopen rajapinta ajatellaan »leikatuksi auki» jotakin särmää myöten ja levitetyksi tasolle.

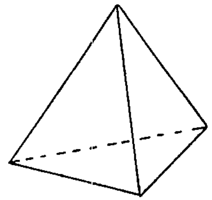


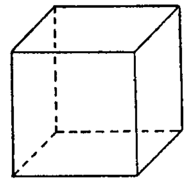
Kuv. 195.

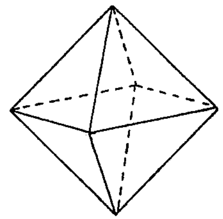
Kappaletta, jonka pinta koostuu monikulmioista, sanotaan *monitahokkaaksi.* Monikulmiot ovat monitahokkaan *tahkoja.* Monikulmioiden sivut ovat monitahokkaan *särmiä* ja kärjet monitahokkaan *kärkiä.* Monitahokkaan *lävistäjä* on kahden sellaisen kärjen yhdistysjana, jotka eivät ole samalla tahkolla.

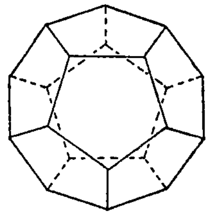
Jos kuperan[1] monitahokkaan tahkot ovat yhteneviä säännöllisiä monikulmioita, niin monitahokasta sanotaan *säännölliseksi.* Koska kuhunkin kärkeen muodostuvan sopen sivuina olevien kulmien summa $< 360°$, niin on olemassa vain seuraavat viisi säännöllistä monitahokasta:

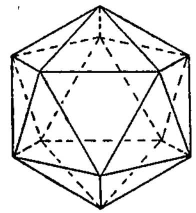
[1] Soppea sanotaan *kuperaksi*, jos se on kokonaan samalla puolella jokaisen sivunsa määräämää tasoa. Vastaavasti määritellään monitahokkaan kuperuus.


Kuv. 196. Tetraedri.


Kuv. 197. Heksaedri.


Kuv. 198. Oktaedri.


Kuv. 199. Dodekaedri.


Kuv. 200. Ikosaedri.

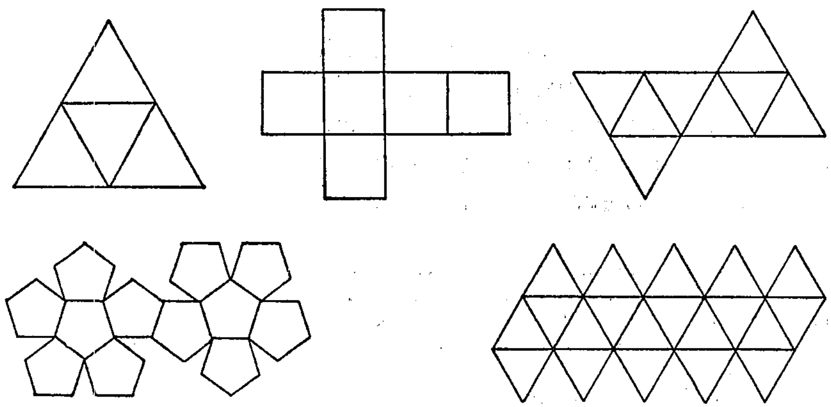
1) *Säännöllinen tetraedri (nelitahokas).* Tahkot ovat tasasivuisia kolmioita (kuv. 196).

2) *Säännöllinen heksaedri (kuusitahokas)* eli *kuutio.* Tahkot ovat neliöitä (kuv. 197).

3) *Säännöllinen oktaedri (kahdeksantahokas).* Tahkot ovat tasasivuisia kolmioita (kuv. 198).

4) *Säännöllinen dodekaedri (kaksitoistatahokas).* Tahkot ovat säännöllisiä viisikulmioita (kuv. 199).

5) *Säännöllinen ikosaedri (kaksikymmentahokas).* Tahkot ovat tasasivuisia kolmioita (kuv. 200).


Kuv. 201.

Säännöllisten monitahokkaiden mallit voidaan valmistaa leikkaamalla pahvista kuviossa 201 esitetyn muotoiset levyt ja taittamalla ne sitten viivoja pitkin sekä liimaamalla sopivasti reunat yhteen esim. paperikaistaleita käyttämällä.

* II. LIERIÖ[1]

137 §. Aikaisemmin olemme tutustuneet lieriötä koskeviin käsitteisiin sekä johtaneet säännön lieriön vaipan ja suorakulmaisen särmiön tilavuuden laskemiseksi (kerrattava §§ 54—56). Todistamme nyt yleisen lieriön tilavuuden laskemista koskevan lauseen, jonka aikaisemmin (56 §) olemme omaksuneet ilman todistusta.[2]

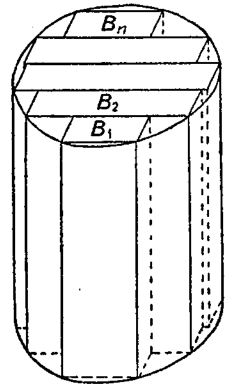
Lause: *Lieriön tilavuus = pohjan alan ja korkeuden tulo:*

$$\mathbf{V = Ah.}$$

Todistuksessa erotetaan seuraavat kolme tapausta:

1) Lieriö on *suorakulmainen särmiö*. Jos pohjan särmät ovat a ja b sekä kolmas särmä c, niin pohjan ala $A = ab$ ja korkeus $h = c$. Koska tämän suorakulmaisen särmiön tilavuus $V = abc$ (56 §, lause 1), niin on siis myös $V = Ah$.

2) Lieriö on mielivaltainen *suora lieriö* (kuv. 202). Leikataan lieriö levyihin sivujanojen suuntaisilla yhdensuuntaisilla tasoilla. Näitä tasoja vastaan kohtisuorilla, sivujanojen kautta asetetuilla tasoilla leikataan sitten kuviossa esitetyllä tavalla kunkin levyn reunat pois, niin että levyistä jää jäljelle suorakulmaiset särmiöt, joiden korkeus = lieriön korkeus h. Olkoot $B_1, B_2 \ldots, B_n$ niiden pohjien alat. Näiden suorakulmaisten särmiöiden yhdessä muodostaman kappaleen K_n tilavuus on silloin ed. kohdan mukaan



Kuv. 202.

$$B_1h + B_2h + \cdots + B_nh$$
$$= (B_1 + B_2 + \cdots + B_n)h.$$

Kun nyt ajatellaan kappale leikatuksi puheena olevalla tavalla yhä ohuempiin ja ohuempiin levyihin, niin kappaleen K_n tilavuus lähenee ko. lieriön K tilavuutta ja yllä olevan yhtälön oikealla puolella sulkeissa oleva summa lähenee lieriön pohjan alaa A:ta. Tästä voidaan päättää, että lieriön tilavuus $= Ah$.

3) Lieriö on mielivaltainen *vino lieriö*. Tässä tapauksessa suoritamme todistuksen seuraavalla havainnollisella tavalla. Asetamme joukon esim. 50 markan rahoja päällekkäin, niin että ne muodostava suoran lieriön.[1] Sitten työnnämme tämän rahakasan vinoon, niin että syntyy »pykälikäs» vino lieriö, jolla on sama pohja ja korkeus kuin alkuperäisellä. Koska molemmat lieriöt koostuvat yhtä monesta rahasta, niin niiden tilavuudet ovat yhtäsuuret. Jos sitten ajattelemme puheena olevat lieriöt muodostetuksi rahojen asemesta yhä ohuemmista ja ohuemmista ympyrälevyistä, joilla on sama halkaisija kuin rahoilla, niin vinon lieriön pykälät pienenevät pienenemistään ja se lähenee tavallista sileätä vinoa lieriötä. Tästä voidaan päättää, että tämänkin vinon lieriön tilavuus = samapohjaisen ja samankorkuisen suoran lieriön tilavuus ja siis edellisen kohdan mukaan = pohjan ja korkeuden tulo. — Samalla tavalla voidaan päättää lause oikeaksi muunkinlaisiin vinoihin lieriöihin nähden.

[1] Lukion matematiikan lyhyemmässä kurssissa voidaan oppikirjan loppuosa tästä lähtien jättää lukematta. Sen sijaan kerrataan tärkeimpiä kappaleita ja niiden tilavuuksia ja pinta-aloja koskevat §§ 54—60 sekä lasketaan sopivia harjoitustehtäviä pois jätetystä oppikirjan loppuosasta ja kertausharjoitustehtäviä 148 §:stä.

[2] S. 177 ovat kaikki kappaleiden tilavuuksia ja pinta-aloja koskevat kaavat koottuina yhteen.

[1] Rahojen asemesta voidaan ottaa vihkokasa tai koota oppilaiden geometrian oppikirjat pinoon. Joka tapauksessa on syytä todellakin suorittaa ko. havainnollinen todistus, eikä vain ajatella se suoritettavaksi.

Seur. 1: *Yhtäsuuripohjaiset, samankorkuiset lieriöt ovat yhtäsuuret.*

Seur. 2: *Jos ympyrälieriön pohjan säde $= r$ ja korkeus $= h$, niin lieriön tilavuus*

$$V = \pi r^2 h$$

Ed. lauseen viimeisen kohdan todistuksessa käytetyn periaatteen avulla voidaan päättää oikeaksi yleinen ns. **Cavalierin lause:** *Kaksi samalla tasolla olevaa yhtä korkeata kappaletta ovat yhtäsuuret, jos jokainen mainitun tason suuntainen taso leikkaa niistä alaltaan yhtäsuuret kuviot* (kuv. 204).

Voidaanhan näet tällöin molemmat kappaleet ajatella koostuvaksi äärettömän ohuista, yhtä paksuista, ko. tason suuntaisista lieriömäisistä levyistä, jolloin seurauslauseen 1 mukaan tasosta yhtä kaukana olevien levyjen tilavuudet ovat aina yhtäsuuret.

Harj.teht.: 478) Suoran särmiön korkeus = 10 cm ja pohjat ovat säännöllisiä kuusikulmioita, joiden sivut = 5 cm. Kuinka suuri on särmiön a) tilavuus, b) vaipan ala, c) koko pinta-ala?

479) Näytettävä, että suoran ympyrälieriön ja sen ympäri piirretyn suorakulmaisen särmiön tilavuuksien suhde = pinta-alojen suhde.

480) 11 m pituinen ratakisko painaa 447 kg. Kuinka suuri on kiskon poikkileikkauksen pinta-ala, jos kiskon tiheys on 7,8 kg/dm³?

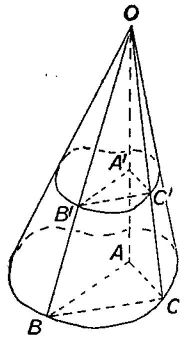
481) Lieriön pohja on puoliympyrä, jonka säde = 0,63 m. Sivujanojen pituus = 1,08 m ja kaltevuuskulma pohjan suhteen = 72,6°. Kuinka suuri on lieriön tilavuus?

* III. KARTIO

138 §. Aikaisemmin olemme tutustuneet kartiota koskeviin käsitteisiin ja johtaneet säännön suoran ympyräkartion vaipan laskemiseksi (kerrattava §§ 57 ja 58). Todistamme nyt kartion tilavuuden laskemista koskevan lauseen, jonka aikaisemmin (59 §) olemme omaksuneet ilman todistusta, sekä erinäisiä muitakin kartiota koskevia lauseita.

139 § Lause 1: *Jos kartio leikataan pohjan suuntaisella tasolla, niin leikkauskuvio ja pohja ovat yhdenmuotoiset ja niiden alojen suhde = pienemmän kartion ja koko kartion korkeuksien suhteen neliö.*

Tod.: Olkoon koko kartion korkeus OA (kuv. 203) ja A' piste, jossa OA kohtaa leikkaavan tason. Silloin OA' on pienemmän kartion korkeus (129 §, lause 3). Olkoot sitten B ja C kaksi mielivaltaista pohjan piirin pistettä ja B' ja C' sivujanoilla OB ja OC olevat leikkauskuvion vastinpisteet. Silloin $B'C' \parallel BC$ (129 §, lause 1). Näin saadaan (kk):



Kuv. 203.

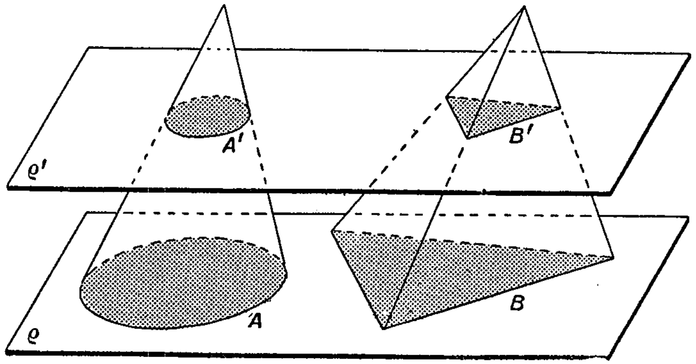
$$\triangle OB'C' \sim \triangle OBC, \text{ joten } B'C' : BC = OB' : OB,$$
$$\triangle OB'A' \sim \triangle OBA, \quad » \quad OB' : OB = OA' : OA.$$

Koska siis aina $B'C' : BC = OA' : OA$, niin yhdenmuotoisuuden määritelmän mukaan (98 §) leikkauskuvio on yhdenmuotoinen pohjan kanssa ja yhdenmuotoisuussuhde = pienemmän kartion ja koko kartion korkeuksien suhde. Tämän neliö on niin ollen 102 §:n lauseen 2 mukaan leikkauskuvion ja pohjan alojen suhde.

Seur.: *Jos ympyräkartio leikataan pohjan suuntaisella tasolla, niin leikkauskuvio on ympyrä.*

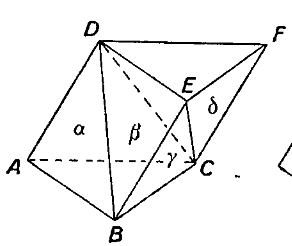
Lause 2: *Yhtäsuuripohjaiset, samankorkuiset kartiot ovat yhtäsuuret.*

Tod.: Asetetaan kartiot samalle tasolle ϱ ja leikataan ne sitten mielivaltaisella tämän suuntaisella tasolla ϱ' (kuv. 204). Tämä taso erottaa silloin kartioista yhtä korkeat pienemmät kartiot. Edellisestä lauseesta seuraa, että leikkauskuvioiden A' ja B' ja vastaavien pohjien A ja B suhteet ovat yhtäsuuret. Koska $A = B$, niin on siis myös $A' = B'$. Cavalierin lauseen (137 §) nojalla voidaan tästä päättää, että kartiot ovat yhtäsuuret.

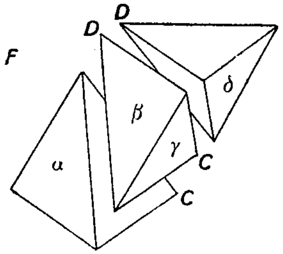


Kuv. 204.

140 §. Lause: *Kartio on kolmannes yhtäsuuripohjaisesta, samankorkuisesta lieriöstä.*



Kuv. 205 a.



Kuv. 205 b.

Tod.: Koska yhtäsuuripohjaiset, samankorkuiset lieriöt keskenään (137 §, seur. 1) ja kartiot keskenään (139 §, lause 2) ovat yhtäsuuria, niin riittää todistaa, että kolmisivuinen pyramidi *ABCD* on kolmannes sen ympäri piirretystä samapohjaisesta ja samankorkuisesta särmiöstä *ABC—DEF* (kuv. 205 a). Todistusta varten leikataan tämä särmiö tasoilla *CDB* ja *CDE* kolmeen kolmisivuiseen pyramidiin, jotka ovat kuviossa 205 b vedetyt hiukan erilleen toisistaan. Kolmisivuisen pyramidin pohjaksi voidaan ajatella mikä sen tahkoista tahansa. Näin havaitaan, että ne pyramidit, joiden pohjina ovat yhtenevät kolmiot α ja β ja yhteisenä kärkenä *C*, ovat yhtäsuuret (139 §, lause 2). Samoin ovat yhtäsuuret ne pyramidit, joiden pohjina ovat yhtenevät kolmiot γ ja δ ja yhteisenä kärkenä *D*. Mutta koska β- ja γ-pohjainen pyramidi on sama, niin kaikki kolme pyramidia ovat yhtäsuuret. Tästä seuraakin väitöksemme.

Seur. 1: *Kartion tilavuus = pohjan ja korkeuden tulon kolmannes:*

$$V = \tfrac{1}{3}\,Ah.$$

Seur. 2: *Jos ympyräkartion pohjan säde = r ja korkeus = h, niin kartion tilavuus*

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Harj.teht.: 482) Säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjan särmä = a ja sivutahkon kaltevuuskulma pohjan suhteen = 60°. Kuinka suuri on pyramidin a) tilavuus, b) vaipan ala, c) koko pinta-ala?

483) Suoran ympyräkartion sivujanan ja pohjan halkaisijan suhde = 3 : 4. Kartion sisään on piirretty säännöllinen kolmisivuinen pyramidi. Kuinka suuri on kartion ja pyramidin a) tilavuuksien, b) vaippojen, c) koko pinta-alojen suhde?

484) Kartion pohjana on ympyrän neljännes, jonka säde = 10 cm. Erään sivujanan pituus = 2 cm ja kaltevuuskulma pohjan suhteen = 48,3°. Kuinka suuri on kartion tilavuus?

* IV. KATKAISTU KARTIO

141 §. Jos kartiosta erotetaan pohjan suuntaisella tasolla huippuosa pois, niin jäljelle jäänyttä osaa sanotaan *katkaistuksi kartioksi.* Sen *pohjat* ovat yhdenmuotoiset (139 §, lause 1). Katkaistun kartion *vaippa, sivujana* ja *korkeus* ovat pohjien väliin jäävät osat vastaavista kartion suureista. Sen mukaan millainen alkuperäinen kartio on, puhutaan *katkaistusta pyramidista* ja *katkaistusta ympyräkartiosta.* Katkaistu suora ympyräkartio on pyöräyskappale, jonka voidaan ajatella syntyvän siten, että puolisuunnikas, jonka toinen erisuuntaisista sivuista on kohtisuorassa yhdensuuntaisia sivuja vastaan, pyörähtää tämän sivun, *akselin*, ympäri. Toinen erisuuntaisista sivuista muodostaa silloin vaipan ja yhdensuuntaiset sivut muodostavat pohjat.

142 §. Olkoot katkaistun suoran ympyräkartion (kuv. 206) pohjien säteet r ja r' ja sivujana s. Laskemme vaipan alan F.

Kun merkitään s':lla alkuperäisestä kartiosta poistetun pienemmän kartion sivujanaa, niin saadaan (58 §, lause)

$$F = \pi r\,(s + s') - \pi r's' = \pi[rs + (r - r')s'].$$

Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan verranto

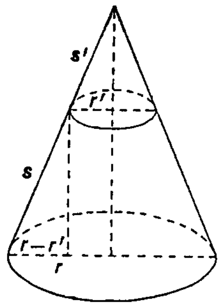
$$\frac{r - r'}{r'} = \frac{s}{s'},$$

joten

$$(r - r')\,s' = r's.$$

Kun tämä sijoitetaan yllä olevaan F:n lausekkeeseen, saadaan

$$F = \pi\,(rs + r's) = 2\pi\frac{r + r'}{2}s,$$



Kuv. 206.

Näin on todistettu

Lause 1: *Katkaistun suoran ympyräkartion vaippa*

$$= 2\pi\varrho s = \pi\,(r + r')s,$$

jossa $s =$ *sivujana,* $\varrho = \dfrac{r + r'}{2} =$ *pohjien säteiden keskiarvo.*

Tästä lauseesta johdetaan helposti

Lause 2: *Katkaistun suoran ympyräkartion vaippa*

$$= 2\pi a h,$$

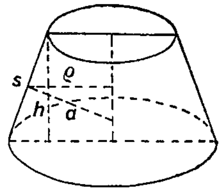
jossa $h =$ *korkeus,* $a =$ *sivujanan keskinormaalista sivujanan ja akselin väliin jäävä osa.*

Suorakulmaisten kolmioiden (kuv. 207) yhdenmuotoisuudesta (kk) seuraa näet verranto

$$\frac{\varrho}{h} = \frac{a}{s},$$

joten

$$\varrho s = ah.$$



Kuv. 207.

Näin saadaankin lauseen 1 kaavasta lauseen 2 kaava.

Kun verrataan edellisten lauseiden kaavoja suoran ympyrälieriön vaipan alan kaavaan (55 §, seur.), havaitaan, että *katkaistun suoran ympyräkartion vaippa = sellaisen suoran ympyrälieriön vaippa, jonka korkeus* $= s$ *ja pohjan säde* $= \varrho$ *tai korkeus* $= h$ *ja pohjan säde* $= a$.

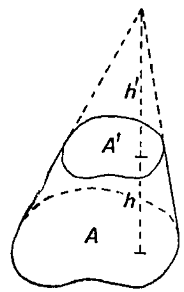
Harj.teht.: 485) Laskettava katkaistun suoran ympyräkartion vaipan ala, kun pohjien säteet ovat 5 ja 2 cm ja a) sivujana 7 cm, b) korkeus 4 cm.

486) Laskettava katkaistun säännöllisen pyramidin koko pinta-ala, kun sen pohjat ovat tasasivuisia kolmioita, joiden särmät ovat 3 ja 5 cm, ja sivutahkoina olevien puolisuunnikkaiden korkeus on 6 cm.

143 §. Olkoot mielivaltaisen katkaistun kartion (kuv. 208) pohjien alat $= A$ ja A' ja korkeus $= h$. Laskemme sen tilavuuden V.

Koska katkaistu kartio on alkuperäisen kartion ja siitä erotetun kartion erotus, niin merkitsemällä jälkimmäisen kartion korkeutta h':lla saadaan (140 §, seur. 1)

$$V = \tfrac{1}{3}A\,(h + h') - \tfrac{1}{3}A'h'$$
$$= \tfrac{1}{3}[Ah + (A - A')h'].$$



Kuv. 208.

139 §:n lauseen 1 mukaan on

$$\frac{A}{A'}=\left(\frac{h+h'}{h'}\right)^2,$$

joten

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}}=\frac{h+h'}{h'}.$$

Tästä verrannosta saadaan »erottamalla» (89 §)

$$\frac{\sqrt{A}-\sqrt{A'}}{\sqrt{A'}}=\frac{h}{h'}$$

ja sitten edelleen

$$(\sqrt{A}-\sqrt{A'})\,h'=\sqrt{A'}h.$$

Kun tämä yhtälö vielä kerrotaan summalla $\sqrt{A}+\sqrt{A'}$ saadaan

$$(A-A')h'=(\sqrt{AA'}+A')h.$$

Sijoittamalla tämä edellä olevaan V:n lausekkeeseen, saadaan

Lause: *Katkaistun kartion tilavuus*

$$\mathbf{V}=\tfrac{1}{3}\mathbf{h}\,(\mathbf{A}+\sqrt{\mathbf{AA'}}+\mathbf{A'}),$$

jossa A ja A' = pohjien alat, h = korkeus.

Seur.: *Katkaistun ympyräkartion tilavuus*

$$\mathbf{V}=\tfrac{1}{3}\pi\mathbf{h}\,(\mathbf{r}^2+\mathbf{rr'}+\mathbf{r'}^2),$$

jossa r ja r' = pohjien säteet, h = korkeus.

Harj.teht.: 487) Laskettava harj.tehtävässä 485 mainittujen katkaistujen ympyräkartioiden tilavuudet.

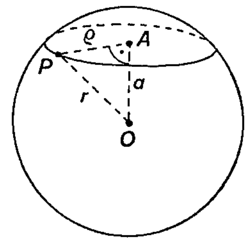
488) Laskettava katkaistun säännöllisen pyramidin tilavuus, kun sen pohjat ovat neliöitä, joiden sivut ovat 3 ja 5 cm, ja a) korkeus 2 cm, b) sivusärmän kaltevuuskulma pohjan suhteen 45°.

* V. PALLO JA SEN OSAT

144 §. Aikaisemmin olemme tutustuneet palloa koskeviin käsitteisiin ja esittäneet ilman todistusta kaavat pallon tilavuuden ja pinta-alan laskemiseksi (kerrattava 60 §). Johdamme nyt nämä kaavat ja todistamme erinäisiä muitakin palloa koskevia lauseita. Aloitamme seuraavalla lauseella, jonka olemme aikaisemmin omaksuneet ilman todistusta.

Lause: *Pallopinnan ja tason leikkausviiva on ympyrä.*

Tod.: Olkoon pallon (kuv. 209) keskipisteen O etäisyys leikkaavasta tasosta $= a = OA$. Kun P on mielivaltainen leikkausviivan piste ja $PA = \varrho$ ja pallon säde $= r$, niin suorakulmaisesta kolmiosta OAP saadaan



Kuv. 209.

$$\varrho=\sqrt{r^2-a^2}.$$

Siis leikkausviiva on ympyrä, jonka keskipiste on A ja säde $=\sqrt{r^2-a^2}$.

Kun $a \to r$, niin leikkausympyrän säde $\to 0$. Kun $a = r$, niin leikkausympyrä on kutistunut pisteeksi. Tällöin sanotaan, että taso *sivuaa* palloa ja on sen *tangenttitaso.* Kun leikkaava taso kulkee pallon keskipisteen kautta, so. $a = 0$, niin leikkausympyrä on *iso ympyrä*, muussa tapauksessa se on *pikku ympyrä.*

Palloa leikkaava taso jakaa pallon kahteen *segmenttiin* ja pallon pinnan kahteen *kalottiin.* Leikkausympyrä on segmenttien *pohja*, ja pohjan keskipisteeseen asetetusta normaalista segmentin sisään jäävä osa on segmentin ja vastaavan kalotin *korkeus.*

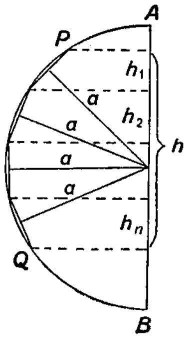
Kahden palloa leikkaavan yhdensuuntaisen tason väliin jäävä osa pallosta on nimeltään *katkaistu segmentti*, jonka *pohjia* ovat vastaavat leikkausympyrät. Tasojen väliin jäävä osa pallon pinnasta on *vyöhyke*. Tasojen välijana on katkaistun segmentin ja vyöhykkeen *korkeus*.

Kartiopinta, jonka kärki on pallon keskipisteessä ja joka leikkaa pallopintaa ympyrää myöten, jakaa pallon kahteen *sektoriin*. Pallon sektorin pinta koostuu siis kalotista ja ympyräkartion vaipasta.

145 §. Lause 1: *Jos pallon säde* $= r$ *ja kalotin (vyöhykkeen) korkeus* $= h$, *niin kalotin (vyöhykkeen) ala*

$$\mathbf{A} = 2\pi \mathbf{r}\mathbf{h}.$$

Tod.: Olkoon kysymyksessä vyöhyke, jonka kaari PQ muodostaa pyörähtäessään halkaisijan AB ympäri (kuv. 210). Piirretään kaaren PQ sisään n-sivuinen murtoviiva (kuviossa $n = 4$), jonka sivut ovat yhtäsuuria. Ympyrän keskipisteestä sivuille piirretyt normaalit (apoteemat) ovat niiden keskinormaaleja ja keskenään yhtäsuuria ($= a$). Sivujen projektiot halkaisijalla AB olkoot $h_1, h_2, \ldots, h_n$.



Kuv. 210.

Murtoviiva PQ pyörähtäessään halkaisijan AB ympäri muodostaa pinnan, joka koostuu n:stä katkaistun suoran ympyräkartion vaipasta. 142§:n lauseen 2 perusteella on tämän pyöräyspinnan ala

$$= 2\pi a h_1 + 2\pi a h_2 + \cdots + 2\pi a h_n$$
$$= 2\pi a(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) = 2\pi a h.$$

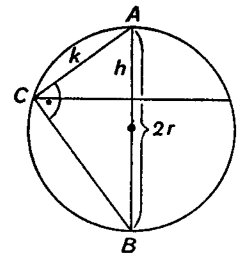
Kun nyt annetaan n:n rajattomasti kasvaa, niin a lähenee r:ää ja murtoviivan muodostama pyöräyspinta lähenee ko. vyöhykettä, mistä voidaan päättää, että vyöhykkeen ala $= 2\pi r h$.

Seur.: *Jos* r = *pallon säde, niin pallon pinta-ala*

$$\mathbf{A} = 4\pi \mathbf{r}^2.$$

Ympyrän kaari pyörähtäessään toisen päätepisteensä kautta kulkevan halkaisijan ympäri muodostaa kalotin. Jos k = pyörähtävän kaaren jänne, niin suorakulmaisesta kolmiosta ABC (kuv. 211) saadaan verranto (107 §, seur. 1):

$$\frac{2r}{k} = \frac{k}{h},$$



Kuv. 211.

joten $2rh = k^2$. Lauseesta 1 saadaan näin

Lause 2: *Jos ympyrän kaari, jonka jänne* $= k$, *pyörähtää päätepisteensä kautta kulkevan halkaisijan ympäri, niin kaaren muodostaman kalotin ala*

$$\mathbf{A} = \pi \mathbf{k}^2.$$

Harj.teht.: 489) Työntökuulan halkaisija = 12,16 cm. Kuinka suuri on sen pinta-ala?

490) Kuinka monta % maapallon pinnasta on päiväntasaajan ja 45° leveyspiirin välillä?

491) Ympyrän kaari, jonka säde on 4 cm, pyörähtää toiseen päätepisteeseen piirretyn säteensä ympäri. Kuinka suuri on sen muodostaman kalotin ala, jos kaari on a) 60°, b) 45°?

146 §. Pallon sektorin voidaan ajatella koostuvan äärettömän pienistä kartioista, joiden pohjat $B_1, B_2, \ldots$ muodostavat yhdessä sektoriin kuuluvan kalotin ja joiden kärjet ovat pallon keskipisteessä ja siis korkeudet = pallon säde r. 140 §:n seur. 1:n perusteella saadaan näin sektorin tilavuudeksi

$$\tfrac{1}{3}B_1 r + \tfrac{1}{3}B_2 r + \cdots = \tfrac{1}{3}(B_1 + B_2 + \cdots)r$$

Koska sulkeissa oleva summa = kalotin ala $= 2\pi r h$, niin saadaan

Lause 1: *Jos pallon säde* $= r$ *ja pallon sektorin kalotin korkeus* $= h$, *niin sektorin tilavuus*

$$\mathbf{V} = \tfrac{2}{3}\pi \mathbf{r}^2\mathbf{h}.$$

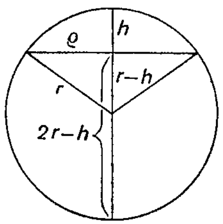
Koska palloa voidaan pitää sektorina, jonka kalotin korkeus $= 2r$, niin saadaan

Seur.: *Jos pallon säde* $= r$, *niin pallon tilavuus*

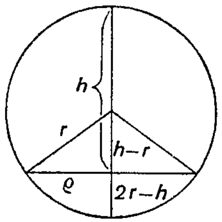
$$\mathbf{V} = \tfrac{4}{3}\pi \mathbf{r}^3.$$

Johdamme lopuksi pallon segmentin tilavuuden V kaavan. Pallon segmentti = vastaavan sektorin ja kartion erotus tai summa sen mukaan, onko segmentti pienempi vai suurempi kuin puolipallo. Kun r = pallon säde, h = segmentin korkeus ja ϱ = segmentin pohjan säde, niin saadaan

ed. tapauksessa (kuv. 212 a): $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi \varrho^2 (r-h)$,
jälk. » (kuv. 212 b): $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi \varrho^2 (h-r)$.



Kuv. 212 a.



Kuv. 212 b.

Havaitaan, että saadut lausekkeet ovat identtiset. Kummassakin tapauksessa on (106 §, lause)

$$\varrho^2 = h(2r-h).$$

Sijoittamalla tämä jompaankumpaan V:n lausekkeeseen, ja suorittamalla siinä tarpeelliset sievennykset saadaan tulokseksi

Lause 2: *Jos pallon säde* $= r$ *ja pallon segmentin korkeus* $= h$, *niin segmentin tilavuus*

$$\mathbf{V} = \pi \mathbf{h}^2 (\mathbf{r} - \tfrac{1}{3}\mathbf{h}).$$

Harj.teht.: 492) Rautainen työntökuula painaa 7,257 kg ja sen halkaisija = 12,16 cm. Mikä on sen raudan tiheys, josta kuula on valmistettu?

493) Ympyrän sektori, jonka keskuskulma on 30° ja säde 10 cm, pyörähtää toisen säteensä ympäri. Laskettava syntyneen pallon sektorin tilavuus ja pinta-ala.

494) Kahden pallon pinnat kulkevat toistensa keskipisteiden kautta. Kuinka suuri on pallojen yhteisen osan tilavuus, jos pallojen säteet = 12 cm?

495) Kuinka suuri on pallon säde, jos sen a) pinta-ala = 1 m², b) tilavuus = 1 m³?

* VI. YHDENMUOTOISUUS AVARUUDESSA

147 §. Kuvioiden yhdenmuotoisuus avaruudessa määritellään aivan samoin kuin tasossa (98 §), siis lyhyesti sanottuna: *kahta kuviota avaruudessa sanotaan yhdenmuotoisiksi, jos niiden vastinjanat ovat verrannolliset.* Tästä seuraa, että yhdenmuotoisissa kuvioissa *vastinkulmat ovat yhtäsuuret* ja edelleen, että niissä *suoria viivoja vastaa suorat viivat ja tasaisia pintoja tasaiset pinnat.* Annetun kuvion kanssa tietyssä *mittakaavassa* yhdenmuotoinen kuvio konstruoidaan, kuten tasossa (99 §). Yhdenmuotoinen kuvio tulee tällöin *homoteettiseksi* alkuperäisen kuvion kanssa.

Esim. Jos kartiota leikataan pohjan suuntaisella tasolla (kuv. 203), niin näin syntyvä pienempi kartio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kanssa ja kartiot ovat homoteettisia yhteisen kärjen suhteen, joka siis on homoteettisuuskeskus. Yhdenmuotoisuussuhde (k) = vastinjanojen suhde ja siis esim. = korkeuksien suhde.

Kaikki pallot ovat yhdenmuotoisia. Jos kaksi palloa asetetaan siten, että niiden keskipisteet yhtyvät, niin pallot ovat homoteettisia yhteisen keskipisteen suhteen.

102 §:n lause 1 on sellaisenaan voimassa avaruudessakin ja todistetaan kuten ennenkin. Lausetta 2 vastaa avaruudessa seuraavat kaksi lausetta.

Lause 1: *Yhdenmuotoisten pintojen alojen suhde = yhdenmuotoisuussuhteen neliö* (k^2).

** *Tod.:* Oletamme ensin, että pinnat ovat *murtopintoja*, toisin sanoen, että ne koostuvat monikulmioista. Koska tällöin vastinmonikulmiot ovat yhdenmuotoisia mittakaavassa k, niin niiden alojen suhde $= k^2$ (102 §, lause 2). Tästä seuraa, että myös monikulmioiden summien eli ko. pintojen alojen suhde $= k^2$ (89 §, lause 3).

Olkoot sitten pinnat mielivaltaisia. Tällöin ajatellaan pintojen »sisään» konstruoiduksi murtopinnat, jotka koostuvat kolmioista, joiden kärjet ovat vastinpisteitä ko. pinnoilla. Juuri todistetun mukaan näiden yhdenmuotoisten murtopintojen alojen suhde $= k^2$. Kun kärkiä otetaan pinnoilla yhä tiheämmässä ja tiheämmässä, niin murtopintojen alat lähenevät alkuperäisten pintojen aloja, mistä voidaan päättää, että niidenkin suhde $= k^2$.

Esim. Pohjan suuntainen taso jakaa kartion korkeuden kahtia. Mihin suhteeseen se jakaa kartion vaipan?

Kartion vaippa A on yhdenmuotoinen tason erottaman pienemmän kartion vaipan B kanssa, ja yhdenmuotoisuussuhde = korkeuksien suhde 2:1. Siis edellisen lauseen mukaan

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1}.$$

Tästä verrannosta saadaan »erottamalla» (89 §).

$$\frac{A-B}{B} = \frac{4-1}{1} = \frac{3}{1}.$$

Koska $A-B$ ja B ovat ne osat, joihin taso jakaa kartion vaipan, niin kysytty suhde on 3:1.

Lause 2: *Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde = yhdenmuotoisuussuhteen kuutio (k^3).*

Tod.: Oletamme ensin, että kappaleet ovat kartioita. Olkoot niiden korkeudet h ja h' ja pohjien alat A ja A'. Koska $h : h' = k$ ja $A : A' = k^2$ (102 §, lause 2), niin kartioiden tilavuuksien suhde

$$\frac{\frac{1}{3}Ah}{\frac{1}{3}A'h'} = \frac{A}{A'} \cdot \frac{h}{h'} = k^2 \cdot k = k^3.$$

Olkoot sitten kappaleet mielivaltaisia. Tällöin ajatellaan kappaleiden sisään konstruoiduksi monitahokkaat, joiden tahkot ovat kolmioita ja kärjet vastinpisteitä kappaleiden pinnoilla. Nämä yhdenmuotoiset monitahokkaat

jaetaan vastaavilla tasoilla kolmisivuisiin pyramideihin, joiden pohjina ovat monitahokkaiden tahkot ja kärkinä monitahokkaiden kärjet. Vastinpyramidit ovat yhdenmuotoisia, joten äsken todistetun mukaan niiden tilavuuksien suhde $= k^3$. Tästä seuraa taas 89 §:n lauseen 3 nojalla, että tämä on myös koko monitahokkaiden tilavuuksien suhde. Tämän jälkeen päätellään kuten edellisen lauseen todistuksen lopussa, että myös alkuperäisten kappaleiden tilavuuksien suhde $= k^3$.

Harj. teht.: 496) Pohjan suuntainen taso jakaa kartion korkeuden kärjestä lukien suhteeseen 3 : 4. Mihin suhteeseen se jakaa kartion a) vaipan, b) tilavuuden?

497) Mihin suhteeseen on pohjan suuntaisen tason jaettava kartion korkeus, jotta kartion a) vaippa, b) tilavuus jakaantuisi kahtia?

VII. KERTAUSHARJOITUSTEHTÄVIÄ

148 §. 498) Kolmisivuisen särmiön pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivu = 2 cm ja sivutahkot ovat neljäkkäitä. Sivusärmän kaltevuuskulma pohjan suhteen on 60°. Kuinka suuri on särmiön tilavuus?

499) Näytettävä, että kun särmä $= s$, niin säännöllisen

a) *oktaedrin tilavuus* $= \dfrac{s^3\sqrt{2}}{3}$,

b) *tetraedrin* » $= \dfrac{s^3\sqrt{2}}{12}$.

500) Jos säännöllisen tetraedrin ja oktaedrin tilavuudet ovat yhtäsuuret, niin kuinka suuri on niiden pinta-alojen suhde? *Vast.:* $\sqrt[3]{2}$.

501) Säännöllisen kolmisivuisen pyramidin pohjan särmä = 6 m ja sivutahkon kaltevuuskulma pohjan suhteen = 60°. Kuinka suuri on pyramidin a) tilavuus, b) pinta-ala? *Vast.:* a) 15,588 m³, b) 46,765 m².

502) Suoran ympyräkartion *akselileikkaus*, so. akselin kautta asetetun tason ja kartion leikkaus, on suorakulmainen kolmio. Kartion vaippa levitetään tasoon. Laskettava minuutin tarkkuudella syntyvän sektorin keskuskulma. *Vast.:* 254° 33′.

503) Ympyrän sektori, jonka keskuskulma = 90° ja säde = 4 cm kierretään ympyräkartion vaipaksi. Kuinka suuri on kartion tilavuus? *Vast.:* 4,056 cm³.

504) Suoran ympyräkartion akselileikkaus on tasasivuinen kolmio, jonka sivu = 2 cm. Kuinka suuri on kartion sisään piirretyn a) kuution särmä, b) sellaisen suoran ympyrälieriön korkeus, jonka akselileikkaus on neliö? *Vast.:* a) 7,8 mm, b) 9,3 mm.

505) Säännöllisen kolmisivuisen pyramidin pohjasärmät $= a$ ja sivusärmät $= b$. Kuinka suuri on pohjasärmän keskipisteen etäisyys vastakkaisen sivusärmän keskipisteestä? *Vast.:* $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. *Ohje:* Vrt. harj.-teht. 368.

* 506) Säännöllinen katkaistu nelisivuinen pyramidi on puolet samapohjaisesta, yhtä korkeasta särmiöstä. Kuinka suuri on katkaistun pyramidin pohjasärmien suhde? *Vast.:* $\sqrt{3} + 1$.

507) Nelisivuisen säännöllisen pyramidin sisään on konstruoitu kuutio siten, että sen neljä kärkeä on pohjalla ja yksi kullakin sivusärmällä. Kuinka suuri on kuution särmä, jos pyramidin pohjasärmä $= 6$ cm ja sivusärmä $= 9$ cm? *Vast.:* 3,42 cm.

508) Näytettävä, että kun säännöllisen tetraedrin särmä on s, niin tetraedrin

a) sisään piirretyn pallon säde $= \dfrac{s\sqrt{6}}{12}$,

b) ympäri piirretyn pallon säde $= \dfrac{s\sqrt{6}}{4}$.

* 509) Katkaistun suoran ympyräkartion muotoisen 2 litran mitan suun halkaisija on $\frac{2}{3}$ pohjan halkaisijasta ja $\frac{4}{5}$ korkeudesta. Kuinka suuret ovat mainitut halkaisijat ja korkeus? *Vast.:* 10,88, 16,32 ja 13,60 cm.

* 510) Kaksi pohjan suuntaista tasoa jakaa kartion korkeuden kolmeen yhtäsuureen osaan. Mihin suhteeseen tasot jakavat kartion a) tilavuuden, b) vaipan? *Vast.:* Kartion kärjestä päin laskien a) $1:7:19$, b) $1:3:5$.

* 511) Kartio jaetaan kahtia pohjan suuntaisella tasolla. Mihin suhteeseen jakaantuu kartion vaippa? *Vast.:* Pohjan puoleisen osan suhde kärjen puoleiseen $= \sqrt[3]{4} - 1$.

512) Kuinka suuri on r-säteisen pallon sisään konstruoidun kuution särmä? *Vast.:* $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$.

513) Kuinka suuri on sellaisen suoran ympyrälieriön pohjan säde ja korkeus, jonka tilavuus ja vaippa ovat yhtäsuuret kuin r-säteisen pallon tilavuus ja pinta-ala? *Vast.:* $\frac{2}{3}r$ ja $3r$.

* 514) Pallon segmentin muotoisen padan sisämitat ovat: korkeus $= 12$ cm ja suun halkaisija $= 20$ cm. Montako litraa pata vetää ja kuinka suuri on sen sisäpinta-ala? *Vast.:* 2,79 l; 7,67 dm^2.

515) Kuparipallo, jonka halkaisija $= 16$ cm, painaa 5 kg. Kuinka suuri on siinä olevan pallon muotoisen ontelon halkaisija, kun kuparin tiheys $= 8{,}8$ kg/dm^3? *Vast.:* 14,4 cm.

* 516) Colorado-valtiota rajoittavat 102° ja 109° pituuspiirit ja 37° ja 41° leveyspiirit. Kuinka suuri on Coloradon pinta-ala, kun maapallon säde $=$ 6370 km? *Vast.:* Noin 270 000 km^2.

* 517) Kuinka kaukana r-säteisen pallon pinnasta on piste, josta näkyy 10 % pallon pinnasta? *Vast.:* $\frac{1}{4}r$.

518) Pallon ympäri on piirretty suora ympyräkartio, jonka korkeus on kaksi kertaa niin suuri kuin pallon halkaisija. Näytettävä, että kartion koko pinta-ala on kaksi kertaa niin suuri kuin pallon pinta.

519) Näytettävä, että jos pallon ympäri piirretään kartio, jonka akselileikkaus on tasasivuinen kolmio, niin sen ja pallon pinta-alojen ja tilavuuksien suhteet ovat yhtäsuuret.

* 520) Kuutiolla ja pallolla on yhteinen keskipiste. Puolet pallon pinnasta on kuution ulkopuolella. Kuinka monta % pallon tilavuudesta on kuution ulkopuolella. *Vast.:* 11,8 %.

* 521) Pallon sisään piirretyn suoran ympyräkartion vaippa jakaa pallon kahteen yhtäsuureen osaan. Laskettava kartion korkeuden ja pohjan säteen suhde. *Vast.:* $\sqrt{\sqrt{2}+1} = ?$

* 522) Kaksi palloa, joiden säteet ovat 10 ja 7,5 cm, rajoittavat linssin, jonka suurin paksuus $= 1$ cm ja jonka toinen pinta on kupera ja toinen kovera. Laskettava linssin tilavuus. *Vast.:* 66,50 cm^3.

* 523) Kaksi yhdensuuntaista tasoa leikkaa pallosta levyn, jonka paksuus on 2 cm ja »pohjien» säteet 6 ja 8 cm. Kuinka suuri on levyn koko pinta-ala? *Vast.:* 439,8 cm^2.

524) r-säteisen pallon sisään on piirretty säännöllinen kolmisivuinen pyramidi, jonka pohjasärmä on puolet sivusärmästä. Kuinka suuri on sivusärmä? *Vast.:* $\frac{1}{3}\sqrt{33}\,r$.

525) Säännöllisen kolmisivuisen pyramidin sisään piirretyn pallon säde on kolmannes pyramidin korkeudesta. Kuinka suuri on pyramidin sivu- ja pohjasärmän suhde? *Vast.:* $\frac{1}{6}\sqrt{21}$.

526) Suoran ympyräkartion vaipan ja pohjan suhde $= 4$. Kuinka suuri on kartion tilavuuden suhde sisään piirretyn pallon tilavuuteen? *Vast.:* $25:12$.

* 527) Puolipallolla ja suoralla ympyräkartiolla on yhteinen pohja. Kolmasosa puolipallon kaarevasta pinnasta jää kartion sisään. Montako % puolipallosta jää kartion sisään? *Vast:* 91,5 %.

* 528) Pallon ympäri on piirretty katkaistu suora ympyräkartio, jonka vaippa on kaksi kertaa niin suuri kuin pallon pinta. Laskettava pallon ja katkaistun kartion tilavuuksien suhde. *Vast.:* $2:7$.

529) Todistettava, että jos kahden kolmisivuisen pyramidin huipuissa olevat sopet ovat yhtenevät, niin pyramidien tilavuuksien suhde $=$ sivusärmien suhteiden tulo, (vrt. 96 §, lause).

* 530) Katkaistun kartion pohjien alat ovat A ja B. Se leikataan pohjien suuntaisella tasolla kahteen osaan, joiden a) vaippojen, b) tilavuuksien suhde $= m{:}n$. Kuinka suuri on leikkauskuvion ala?

Vast.: a) $\dfrac{nA + mB}{m+n}$, b) $\left(\dfrac{nA\sqrt{A} + mB\sqrt{B}}{m+n}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Ohje: Täydennetään katkaistu kartio kartioksi ja käytetään hyväksi 147 §:n lauseita ja verrannon muunnoksia.

531) Säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjasärmät $= 24$ cm ja sivusärmät $= 30$ cm. Kuinka suuri on a) sivusärmän, b) sivutahkon kaltevuuskulma pohjan suhteen? *Vast.:* a) 36,9°, b) 40,9°.

532) Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmät $= 10$ cm ja sivusärmät $= 13$ cm. Laskettava a) sivutahkon kaltevuuskulma pohjan suhteen, b) kahden vierekkäisen sivutahkon muodostaman diedrin suuruus. *Vast.:* a) 65,4°, b) 100,0°.

533) Suoran ympyräkartion *akselikulma*, so. akselin ja sivujanan välinen kulma $= \alpha$. Kun kartion vaippa levitetään tasolle, niin kuinka suuri on syntyneen sektorin keskuskulma? *Vast.:* $\sin\alpha \cdot 360°$. Kuinka suuri on α, jos levitetty vaippa on puoliympyrä?

* 534) Todistettava, että pallon ympäri piirretyn katkaistun suoran ympyräkartion tilavuuden ja kokonaispinta-alan suhteet vastaavasti pallon tilavuuteen ja pinta-alaan ovat yhtäsuuret, ja lausuttava nämä suhteet katkaistun kartion pohjien säteiden funktiona. Näytettävä, että tuloksesta seuraa rajatapauksena Arkhimedeen lause (ks. harj.teht. 332).

VIII. KAPPALEIDEN TILAVUUKSIEN JA PINTA-ALOJEN KAAVOJA

A = pohjan ala
p = pohjan piiri
r = pohjan tai pallon säde
h = korkeus
s = sivujana

Lieriön tilavuus $= \mathbf{Ah}$
Suoran lieriön vaippa $= \mathbf{ph}$
Ympyrälieriön tilavuus $= \pi \mathbf{r}^2\mathbf{h}$
Suoran ympyrälieriön vaippa $= 2\pi\mathbf{rh}$

Kartion tilavuus $= \frac{1}{3}\mathbf{Ah}$
Ympyräkartion tilavuus $= \frac{1}{3}\pi\mathbf{r}^2\mathbf{h}$
Suoran ympyräkartion vaippa $= \pi\mathbf{rs}$

*Katkaistun kartion tilavuus $= \frac{1}{3}\mathbf{h}(\mathbf{A}+\sqrt{\mathbf{AA}'}+\mathbf{A}')$
*Katk. ympyräkartion tilavuus $= \frac{1}{3}\pi\mathbf{h}(\mathbf{r}^2+\mathbf{rr}'+\mathbf{r}'^2)$
*Katk. suoran ympyräkartion vaippa $= \pi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\mathbf{s}$

Pallon tilavuus $= \frac{4}{3}\pi\mathbf{r}^3$
Pallon pinta-ala $= 4\pi\mathbf{r}^2$
*Pallon vyöhykkeen ala $= 2\pi\mathbf{rh}$
*Pallon kalotin ala $= 2\pi\mathbf{rh} = \pi\mathbf{k}^2$
*Pallon sektorin tilavuus $= \frac{2}{3}\pi\mathbf{r}^2\mathbf{h}$
*Pallon segmentin tilavuus $= \pi\mathbf{h}^2(\mathbf{r}-\frac{1}{3}\mathbf{h})$