FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
SPRING / KEVÄT 2017
EXERCISE 9 / LASKUHARJOITUS 9

1. Suppeneeko operaattorijono $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $T_n : L^1(-1,1) \to L^1(-1,1)$, pisteittäin tai normin mielessä, kun $n \to \infty$ ja

$$(T_n f)(x) := \chi_n(x) f(x) \text{ melkein kaikilla } x \in [-1,1]$$

ja χ_n on välin $[-1+1/n, 1-1/n]$ karakteristinen funktio. Samoin, kun

$$(T_n f)(x) := e^{-x^2/n} f(x) \text{ melkein kaikilla } x \in [-1,1].$$

2. a) Olkoot E ja F Banach–avaruuksia ja $T : E \to F$ rajoitettu lineaarikuvaus, sekä $C > 0$. Oletetaan, että $\|Tx\| \geq C\|x\|$ kaikilla $x \in E$. Näytä, että kuva–avaruus $\mathrm{Im}(T) := \{Tx \mid x \in E\}$ on F:n suljettu vektorialiavaruus.

b) Etsi sellainen jatkuva lineaarinen injektio $S : \ell^p \to \ell^p$, että $\mathrm{Im}(S) \subset \ell^p$ ei ole suljettu. Vihje. Multiplikaattori $(x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, missä (a_k) on sopiva kiinteä rajoitettu skalaarijono.

3. Osoita, että Banach–avaruus $C^1(-1,1)$, joka koostuu välin $[-1,1]$ kerran jatkuvasti derivoituvista funktioista, on Banach–algebra pisteittäisen kertolaskun suhteen, kun se varustetaan normilla

$$\|f\| := \sup_{x\in[-1,1]} \{|f(x)|\} + \sup_{x\in[-1,1]} \{|f'(x)|\}.$$

4. Onko Sobolev-avaruus $H^1(0,1)$ Banach-algebra pisteittäisen kertolaskun suhteen? (Mieti funktioita x^{α}, $0 < \alpha < 1$.)
****

1. Does the operator sequence $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, $T_n : L^1(-1,1) \to L^1(-1,1)$ converge pointwise or with respect to the operator norm as $n \to \infty$? Here,

$$(T_n f)(x) := \chi_n(x) f(x) \text{ for almost all } x \in [-1,1]$$

and χ_n is the characteristic function of the interval $[-1+1/n, 1-1/n]$. The same for

$$(T_n f)(x) := e^{-x^2/n} f(x) \text{ for almost all } x \in [-1,1].$$

2. a) Let E and F be Banach spaces and let $T : E \to F$ be a bounded linear map, and $C > 0$. Assume that $\|Tx\| \geq C\|x\|$ for all $x \in E$. Prove that the range $\mathrm{Im}(T) := \{Tx \mid x \in E\}$ is a closed subspace of F.

b) Find a continuous linear injection $S : \ell^p \to \ell^p$ such that $\mathrm{Im}(S) \subset \ell^p$ is not closed. Hint. A multiplier $(x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, where (a_k) is a suitable fixed bounded sequence of numbers.

3. Show that the Banach space $C^1(-1,1)$ of continuously differentiable functions on $[-1,1]$ is a Banach algebra with respect to the pointwise multiplication, when endowed with the norm

$$\|f\| := \sup_{x\in[-1,1]} \{|f(x)|\} + \sup_{x\in[-1,1]} \{|f'(x)|\}.$$

4. Is the Sobolev space $H^1(0,1)$ a Banach algebra with respect to the pointwise multiplication? (Think about functions x^{α}, $0 < \alpha < 1$.)