

FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI  
 SPRING / KEVÄT 2017  
 EXERCISE 8 / LASKUHARJOITUS 8

1. Olkoon  $\Omega = ] - 10, 10[$ . Osoita, että Sobolev-avaruudessa  $H^1(\Omega)$  normit

$$\|f\|_A := \left( \int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_B := \max \left\{ \left( \int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \left( \int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right\}$$

ovat ekvivalentteja tavanomaisen normin  $\left( \int_{-10}^{10} |f|^2 + \int_{-10}^{10} |f'|^2 \right)^{1/2}$  kanssa. Osoita, että funktio  $f(x) = 5|x| - x^2$  kuuluu avaruuteen  $H^1(\Omega)$  tutkimalla sen heikkoa derivaattaa.

2. Sobolev-avaruudet  $W^{1,p}(\Omega)$  voidaan määritellä kuten avaruus  $H^1(\Omega)$ , kun  $\Omega = ]a, b[$  ja  $1 \leq p < \infty$ : määritelmässä vain korvataan  $L^2$ -tyyppiset normit vastaavilla  $L^p$ -normeilla. Esitä määritelmän yksityiskohdat. (Huom.  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ .)

3. Osoita, että tehtävän 2 Sobolev-avaruudet ovat täydellisiä. Voit pitää tunnettuna, että  $L^p(\Omega)$  on täydellinen.

4. Osoita, että vakiofunktioa 1 ei voida approksimoida mielivaltaisen hyvin (kompaktitukaisella  $C^\infty$ -) testifunktiolla  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  avaruudessa  $H^1(\Omega)$ ,  $\Omega = ]0, 1[$ : on olemassa vakio  $\delta > 0$ , jolle

$$\|1 - \varphi\|_{H^1} \geq \delta \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Vihje. Saattaa olla helpompaa osoittaa asia ensin avaruudessa  $W^{1,1}(\Omega)$ .

\*\*\*\*\*

1. Let  $\Omega = ] - 10, 10[$ . Show that in the space  $H^1(\Omega)$ , the following norms

$$\|f\|_A := \left( \int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_B := \max \left\{ \left( \int_{-10}^{10} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \left( \int_{-10}^{10} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right\}$$

are equivalent with the usual norm  $\left( \int_{-10}^{10} |f|^2 + \int_{-10}^{10} |f'|^2 \right)^{1/2}$ . Show that the function  $f(x) = 5|x| - x^2$  belongs to  $H^1(\Omega)$  by studying the weak derivative of  $f$ .

2. The Sobolev spaces  $W^{1,p}(\Omega)$  can be defined in the same way as  $H^1(\Omega)$ , for  $\Omega = ]a, b[$  and  $1 \leq p < \infty$ : the  $L^2$ -type norms must be replaced by the corresponding  $L^p$ -norms. Present the details of the definition. (Remark.  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ .)

3. Prove that the Sobolev-spaces of Problem 2 are complete. You may assume to be known that  $L^p(\Omega)$  is complete.

4. Show that the constant function 1 cannot be approximated arbitrarily well by (compact support  $C^\infty$ -) test functions  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  in the space  $H^1(\Omega)$ ,  $\Omega = ]0, 1[$ : there exists a constant  $\delta > 0$  such that

$$\|1 - \varphi\|_{H^1} \geq \delta \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Instruction. It may be easier to prove this first in the space  $W^{1,1}(\Omega)$ .