FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
SPRING / KEVÄT 2017
EXERCISE 7 / LASKUHARJOITUS 7

1. a) Olkoon $g(x) = x(2\pi - x) \in L^2(0, 2\pi)$ sekä $f \in L^2(0, 2\pi)$ funktio

$$f(x) = \chi_{[0,\pi]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{kun } x \in]\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Laske funktioiden f ja g Fourier–kertoimet. Mitä voit havaita kertoimien suppenemisnopeudesta?
b) Olkoon $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $Q(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrinen polynomi, missä $a_k \in \mathbb{C}$ vakioita. Laske (konvoluutio)funktion

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x - t) f(t) dt$$

Fourier–kertoimet $\hat{g}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, lukujen a_k ja f:n Fourier-kertoimien avulla.

2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π–periodinen funktio, eli $f(x) = f(2\pi + x)$ kaikilla x. Osoita:

(i) Jos f on k kertaa jatkuvasti derivoituva, niin $|\hat{f}(n)| \leq C(1+|n|)^{-k}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$ ja $|\hat{f}(n)| \leq C(1 + |n|)^{-k-2}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin f on k kertaa jatkuvasti derivoituva (ekvivalenssiluokka L^2:ssa sisältää tällaisen edustajan).

Tässä $k \in \mathbb{N}$ ja $C > 0$ on vakio. Vihje. Osittaisintegrointi Fourier-kertoimien kaavassa.

3. Olkoon $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ silottajafunktio

$$J(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{kun } |x| < 1 \\ 0, & \text{kun } |x| \geq 1, \end{cases}$$

missä $C > 0$ on valittu niin, että $\int_{\mathbb{R}} J(x)dx = 1$. Osoita, että J on C^∞-funktio (mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva).
Olkoon $\epsilon > 0$ ja $J_\epsilon(x) := \epsilon^{-1} J(x/\epsilon)$. Osoita, että $\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x)dx = 1$ kaikilla ϵ ja että $\mathrm{supp}(J_\epsilon) = [-\epsilon, \epsilon]$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ välin $[2, 4]$ karakteristinen funktio,

$$f(x) = \chi_{[2,4]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [2, 4] \\ 0, & \text{kun } x \notin [2, 4]. \end{cases}$$

Osoita, että $J_\epsilon * f(x) := \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x - y)f(y)dy$ on C^2-funktio kaikilla ϵ (itse asiassa se on C^∞) ja että

$$J_\epsilon * f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [2 + \epsilon, 4 - \epsilon] \\ 0, & \text{kun } x \notin [2 - \epsilon, 4 + \epsilon]. \end{cases}$$

Piirrä funktion $J_\epsilon * f(x)$ kuvaaja. Osoita vielä, että $\|J_\epsilon * f - f\|_p \to 0$, kun $\epsilon \to 0$, kaikilla $1 < p < \infty$.

****

1. a) Let $g(x) = x(2\pi - x) \in L^2(0, 2\pi)$ and $f \in L^2(0, 2\pi)$,

$$f(x) = \chi_{[0,\pi]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{for } x \in]\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Calculate the Fourier coefficients for f and g. What about their rate of convergence to 0?

b) Let $f \in L^2(0, 2\pi)$ and $Q(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$, where $a_k \in \mathbb{C}$ are constants. Compute the Fourier coefficients $\hat{g}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, of the (convolution) function

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x - t) f(t) dt$$

with the help of the Fourier coefficients of f and of the numbers a_k.

2. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a 2π–periodic function so that $f(x) = f(2\pi + x)$ for all x. Show:

(i) If f is k times continuously differentiable, then $|\hat{f}(n)| \le C(1 + |n|)^{-k}$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) If $f \in L^2(0, 2\pi)$ and $|\hat{f}(n)| \le C(1 + |n|)^{-k-2}$ for all $n \in \mathbb{Z}$, then f is k times continuously differentiable (its equivalence class in L^2 has such a representative).

Here $k \in \mathbb{N}$ and $C > 0$ is constant. Hint. Integration by parts in the definition of the Fourier coefficients.

3. Let $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the mollifier

$$J(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{for } |x| < 1 \\ 0, & \text{for } |x| \ge 1, \end{cases}$$

where $C > 0$ is chosen such that $\int_{\mathbb{R}} J(x) dx = 1$. Prove that J is a C^∞-function (arbitrarily many times cont. differentiable).

Let $\epsilon > 0$ and $J_\epsilon(x) := \epsilon^{-1} J(x/\epsilon)$. Show that $\int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x) dx = 1$ for all ϵ and that $\text{supp}(J_\epsilon) = [-\epsilon, \epsilon]$.

4. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be

$$f(x) = \chi_{[2,4]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in [2, 4] \\ 0, & \text{for } x \notin [2, 4]. \end{cases}$$

Show that $J_\epsilon * f(x) := \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(x - y) f(y) dy$ is a C^2-function for all ϵ (in fact it is C^∞) and that

$$J_\epsilon * f(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in [2 + \epsilon, 4 - \epsilon] \\ 0, & \text{for } \ x \notin [2 - \epsilon, 4 + \epsilon]. \end{cases}$$

Draw the graph of $J_\epsilon * f(x)$. Finally prove that $\|J_\epsilon * f - f\|_p \to 0$ as $\epsilon \to 0$, for all $1 < p < \infty$.