FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
SPRING / KEVÄT 2017
EXERCISE 6 / LASKUHARJOITUS 6

1. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Osoita, että funktiot $\sin(2\pi nx)$, $n \in \mathbb{N}$, ovat keskenään ortogonaaliset avaruudessa $L^2(0,1)$, sisätulona

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \ , \quad f, g \in L^2(0,1).$$

Samoin funktioille $\cos(2\pi nx)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, ja tutki vielä lopuksi sisätuloja $\big(\sin(2\pi nx) | \cos(2\pi mx)\big)$. Laske normitusvakiot, eli positiiviset luvut, joilla kertominen tekee yllä mainittujen funktioiden normeista ykkösen.

2. Tarkastellaan Hilbert–avaruutta $L^2(0,2)$. Olkoon M sen 3-ulotteinen aliavaruus, jonka virittävät polynomit 1, t ja t^2. Etsi aliavaruuden M jokin ortonormaali kanta.

3. Olkoot E ja F Banach-avaruuksia. Tiedetään, että kaikkien lineaarikuvausten $S : E \to F$ joukko $L(E,F)$ on vektoriavaruus. Muistutetaan mieleen, että lineaarinen $T : E \to F$ on jatkuva, jos on olemassa vakio $C > 0$, jolle $\|Tx\|_F \le C\|x\|_E$ kaikilla $x \in E$. Jatkuvalle T lauseke

$$\sup_{\|x\|_E \le 1} \|Tx\|_F =: \|T\| \tag{0.1}$$

on hyvin määritelty (äärellinen).
a) Osoita, että myös jatkuvat lineaarikuvaukset $T : E \to F$ muodostavat vektoriavaruuden (jota merkitään esim. $\mathcal{L}(E,F)$).
b) Osoita, että $\|T\|$ on normi avaruudessa $\mathcal{L}(E,F)$; sitä kutsutaan operaattorinormiksi.

4. Jos Tehtävän 3 tilanteessa $F = \mathbb{K}$, avaruutta $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ sanotaan E:n duaaliavaruudeksi ja merkitään $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$. Operaattorinormia (0.1) sanotaan duaalinormiksi, merk. $\|y\|_{E^*}$, kun $y \in E^*$.
Kun $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$, osoita, että jokainen avaruuden ℓ^q alkio $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ määrää avaruuden $(\ell^p)^*$ alkion kaavalla

$$y : x \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n y_n, \tag{0.2}$$

missä $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$. Osoita, että $\|y\|_{(\ell^p)^*} \le \|y\|_q$. Kun $y = (1, -1, 0, 0, 0, 0 \ldots)$, osoita myös $\|y\|_{(\ell^p)^*} \ge \|y\|_q$. Taikasana: Hölder.

****

1. Let $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Show that the functions $\sin(2\pi nx)$, $n \in \mathbb{N}$, are mutually orthogonal in the space $L^2(0,1)$ with inner product

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \ , \quad f, g \in L^2(0,1).$$

Do the same for the functions $\cos(2\pi nx)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ and then also investigate the inner products $\big(\sin(2\pi nx)|\cos(2\pi mx)\big)$. Find the normalisation constants, i.e. positive real numbers, multiplying by which makes the norms of the above mentioned functions equal to 1.

2. In the Hilbert space $L^2(0,2)$ let M be the 3-dimensional subspace spanned by the polynomials 1, t and t^2. Find an orthonormal basis for M.

3. Let E and F be Banach spaces. It is known that the set $L(E,F)$ of all linear mappings $S : E \to F$ is a vector space. We also recall that a linear $T : E \to F$ is continuous, if there exists a constant $C > 0$ such that $\|Tx\|_F \le C\|x\|_E$ for all $x \in E$. The expression

$$\sup_{\|x\|_E \le 1} \|Tx\|_F =: \|T\| \tag{0.3}$$

is well defined (finite) for a continuous T.
a) Show that the set $\mathcal{L}(E,F)$ of all continuous linear mappings $S : E \to F$ is a also vector space.
b) Prove that the expression $\|T\|$ is a norm in $\mathcal{L}(E,F)$; it is called the operator norm.

4. If $F = \mathbb{K}$ in the situation of Problem 3, the space $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ is called the dual space of E and it is denoted by $\mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$. The operator norm (0.3) is called the dual norm, with notation $\|y\|_{E^*}$ for $y \in E^*$.
When $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$, show that every element $y = (y_n)_{n=1}^\infty$ of ℓ^q defines an element of the space $(\ell^p)^*$ by the formula

$$y : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \tag{0.4}$$

where $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$. Prove that $\|y\|_{(\ell^p)^*} \le \|y\|_q$. When $y = (1,-1,0,0,0,0\ldots)$, prove also that $\|y\|_{(\ell^p)^*} \ge \|y\|_q$. Magic word: Hölder.