FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
SPRING / KEVÄT 2017
EXERCISE 5 / LASKUHARJOITUS 5

1. a) Olkoot A ja B normiavaruuden E konvekseja osajoukkoja. Osoita, että myös joukko $A+B := \{x+y \mid x \in A\ , y \in B\}$ on konveksi. Onko joukko $A-B := \{x-y \mid x \in A\ , y \in B\}$ konveksi? b) Todista suunnikasyhtälön avulla, että avaruudet ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, eivät ole Hilbert–avaruuksia.

2. Jos A on normiavaruuden E osajoukko, sanomme, että $x \in A$ on *normin minimoiva alkio*, mikäli

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

a) Osoita, että $A := \{f \in C(0,1) \mid f(t) = 1 \text{ kun } 0 \leq t \leq 1/2\}$ on avaruuden $C(0,1)$ suljettu ja konveksi osajoukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkioita.
b) Tiedetään, että

$$B := \left\{ f \in C(0,1) \mid f(0) = 0\,,\ f(t) \geq 0 \text{ kaikilla } t\,, \text{ja } \int\limits_0^1 f(t)dt = 1 \right\}$$

on avaruuden $C(0,1)$ suljettu ja konveksi osajoukko. Osoita, että B:ssä ei ole lainkaan normin minimoivaa alkiota. Ohje. B:n alkoiden normien infimum on 1.

3. Olkoon $(x_n)_{n=1}^\infty$ Hilbert–avaruuden H jono. Sanomme, että (x_n) suppenee avaruudessa H *heikosti* vektoriin $x \in H$, jos kaikilla $y \in H$ pätee

$$(x_n|y) \to (x|y)\ , \text{ kun } n \to \infty.$$

Tässä siis suppeneminen tapahtuu kerroinkunnassa $\mathbb{K}$.
(i) Jos jono suppenee tavanomaisessa mielessä, osoita, että se suppenee myös heikosti.
(ii) Oletetaan, että $(x_n)_{n=1}^\infty$ on jono, joka suppenee vektoriin $x \in H$ heikosti, ja lisäksi pätee $\|x_n\| \to \|x\|$, kun $n \to \infty$. Osoita, että tällöin $\|x_n - x\| \to 0$, eli jono suppenee x:ään tavanomaisessa mielessä. Ohje. Tarkastele lauseketta $\|x_n - x\|^2$ ja käytä sisätuloa.
(iii) Olkoon $H := \ell^2$ sekä $e_n \in \ell^2$ tavanomainen n:s kanoninen kantavektori. Osoita, että jono $(e_n)_{n=1}^\infty$ suppenee vektoriin $0 \in \ell^2$ heikosti.

4. Tarkastellaan Hilbert-avaruutta $E := L^2(]-1,1[)$. Mikä on aliavaruuden $G := \{f \in E\ :\ f(t) = -f(-t) \text{ melkein kaikilla } t \in [0,1[\}$ ortogonaalinen komplementti $G^\perp$?

****

1. a) Let A and B be convex subsets of the normed space E. Prove that $A+B := \{x+y \mid x \in A\ , y \in B\}$ is convex, too. Is the set $A-B := \{x-y \mid x \in A\ , y \in B\}$ convex? b) By using the parallelogram identity prove that the spaces ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, are not Hilbert spaces.

2. If A is a subset of a normed space E, we say that the element $x \in A$ is a *norm minimising element*, if

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

a) Prove that $A := \{f \in C(0,1) \mid f(t) = 1 \text{ kun } 0 \leq t \leq 1/2\}$ is a closed and convex subset of $C(0,1)$ which has infinitely many norm minimising elements.
b) It is known that

$$B := \Big\{ f \in C(0,1) \mid f(0) = 0\,,\ f(t) \geq 0 \text{ for all } t\,, \text{and } \int_0^1 f(t)dt = 1 \Big\}$$

is a closed and convex subset of $C(0,1)$. Show that B does not have any norm minimizing elements. Hint: the infimum of the norms of the elements of B is 1.

3. Let $(x_n)_{n=1}^\infty$ be a sequence in the Hilbert–space H. We say that it converges *weakly* in H to the vector $x \in H$, if for all $y \in H$ we have

$$(x_n|y) \to (x|y) \ , \text{ as } n \to \infty.$$

(convergence in $\mathbb{K}$).

(i) Show that convergence in the conventional sense implies weak convergence.

(ii) Assumet that $(x_n)_{n=1}^\infty$ is a sequence, which converges weakly to $x \in H$ and that, moreover, $\|x_n\| \to \|x\|$, as $n \to \infty$. O Show that then $\|x_n - x\| \to 0$. Hint. Consider the expression $\|x_n - x\|^2$ and use the inner product

(iii) Let $H := \ell^2$ and $e_n \in \ell^2$ the usual nth basis vector. Show that $(e_n)_{n=1}^\infty$ converges to $0 \in \ell^2$ weakly.

4. Consider the Hilbert space $E := L^2(]-1,1[)$. What is the orthogonal complement $G^\perp$ of the subspace $G := \{f \in E \ : \ f(t) = -f(-t) \text{ for almost every } \ t \in [0,1[\}$?