FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
SPRING / KEVÄT 2017
EXERCISE 4 / LASKUHARJOITUS 4

1. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\text{a)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+|t-s|^2} f(s)ds + t + f(t) = 0, \quad t \in [-1,1],$$

$$\text{b)}\quad \int_{-1}^{t} \frac{1}{4+|t-s|} f(s)^2 ds = e^{-t^2} + 2e^{t+2} f(t), \quad t \in [-1,1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-1,1)$. Voitko sanoa jotain ratkaisun yksikäsitteisyydestä? Voit pitää tunnettuna, että yhtälöissä esiintyvät integraalilausekkeet ovat jatkuvia t:n funkioita. (Kiintopistelause. Kohdassa b), valitse joukoksi $D \subset C(-1,1)$ pallo $\bar{B}(\bar{0}, R)$ sopivalla $R > 0$.)

2. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) = e^{-t^2} + \int_{-5}^{5} e^{-100|t|-100|s|} f(s)^2 ds \tag{0.1}$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-5,5)$. Opastus. Muuttujanvaihto integraalissa tuo lisää pienuutta.

3. Banachin kiintopistelauseesta on olemassa monia johdannaisia. Todista: Olkoon D Banach–avaruuden suljettu osajoukko ja $F : D \to D$. Oletetaan, että F^n (n:s iteraatti) on aito kontraktio jollakin $n \in \mathbf{N}$. Silloin F:llä on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa D.

4. Olkoot $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja olkoon $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tarkastellaan operaattoria

$$Ff(t) := \int_{a}^{t} K(t,s) f(s) ds$$

missä $f \in C(a,b)$ ja $t \in [a,b]$. Osoita, että F^n on aito kontraktio $C(a,b)$:ssä jollekin n (vaikka $|K(t,s)|$ ei olisikaan pieni! Mieti, mitä tapahtuu, kun lasket n kertaa peräkkäin integraalin $\int_0^t$ esim. vakiofunktiosta.)
Tarkastele tämän valossa Volterran integaaliyhtälön

$$f(t) = \int_{0}^{t} e^{t^2+s^2} f(s) ds + 100e^t$$

ratkaisemista, kun f on määritelty välillä $[0,100] \subset \mathbb{R}$.

****

1. Prove that the integral equation

$$\text{a)} \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+|t-s|^2} f(s)ds + t + f(t) = 0, \quad t \in [-1,1],$$

$$\text{b)} \quad \int_{-1}^{t} \frac{1}{4+|t-s|} f(s)^2 ds = e^{-t^2} + 2e^{t+2} f(t), \quad t \in [-1,1],$$

has a solution in the space $C(-1,1)$. What about the uniqueness of the solution? You may assume that the integral expressions here are continuous functions of t. (Fixed point theorem. In the item b) choose for $D \subset C(-1,1)$ a ball $\bar{B}(\bar{0}, R)$ with a suitable $R > 0$.)

2. Prove that the integral equation

$$f(t) = e^{-t^2} + \int_{-5}^{5} e^{-100|t|-100|s|} f(s)^2 ds \tag{0.2}$$

has a solution in the space $C(-5,5)$. Instruction. Change of integration variable gives some additional smallness.

3. The Banach fixed point theorem can be modified. Prove: Let D be a closed subset of a Banach space and $F : D \to D$. Assume that the nth iterate F^n is a strict contraction for some $n \in \mathbf{N}$. Then, F has a unique fixed point in the set D.

4. Let $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ and let $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ be continuous. Consider the mapping

$$Ff(t) := \int_{a}^{t} K(t,s) f(s) ds$$

where $f \in C(a,b)$ and $t \in [a,b]$. Show that F^n is a strict contraction in $C(a,b)$ for some n (although $|K(t,s)|$ need not be small! Think about what happens, when you for example calculate n subsequent integrations $\int_0^t$ of a constant function.) Then, consider the solving of the Volterra integral equation

$$f(t) = \int_{0}^{t} e^{t^2+s^2} f(s) ds + 100e^t$$

when f is defined on the interval $[0,100] \subset \mathbb{R}$.