FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
SPRING / KEVÄT 2017
EXERCISE 3 (This time a bit more difficult!) / LASKUHARJOITUS 3

1. Kun a ja b ovat reaalilukuja, joille $a < b$, merkitään tuttuun tapaan

$$C(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ jatkuva} \mid \|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\}.$$

Tarkastellaan kompositio–operaattoreita $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$, missä φ on jokin jatkuva reaaliarvoinen reaalimuuttujan funktio. Kun

$$\varphi(t) := t^2,$$

osoita, että $C_\varphi : C(0,1) \to C(-1,1)$ on hyvin määritelty ja jatkuva operaattori ko. avaruuksien välillä (lineaarisuuden voi olettaa tunnetuksi). Miksi C_φ ei ole surjektio?
Edelleen, olkoon $\psi(t) := \frac{1}{2}t$. Osoita, että $C_\psi : C(0,1) \to C(0,1)$ ei ole injektio. Onko C_φ injektio?

2. Olkoon seuraavassa kerroinkuntana $\mathbb{R}$. Tarkastellaan ("siirto"-)operaattoreita $S : \ell^2 \to \ell^2$ ja $T : \ell^2 \to \ell^2$,

$$S : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad , \qquad T : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (x_{n+1})_{n=1}^\infty.$$

Ne ovat hyvin määriteltyjä jatkuvia lineaarioperaattoreita. Avaruuden ℓ^2 suljettu vektorialiavaruus M on *invariantti* (operaattorille S), jos $S(M) \subset M$ eli jos S kuvaa jokaisen M:n alkion joukkoon M. Vastaavasti tietenkin operaattorille T.
Etsi invariantteja aliavaruuksia, erikseen kummankin operaattorin tapauksessa.
Vektori $x \in \ell^2$, $x \neq \bar{0}$, on operaattorin T *ominaisvektori ominaisarvolla* $\lambda \in \mathbb{R}$, jos

$$Tx = \lambda x.$$

Etsi joitakin ominaisarvoja ja ominaisvektoreita T:lle.
Huomautuksia.
- Ominaisvektori(e)n virittämä aliavaruus on aina invariantti!
- Ei tarvitse esittää todistuksia sille, että joku aliavaruus on suljettu. Perusteltu arvaus riittää. Esimerkiksi jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu.

3. Olkoon $1 \leq p < q \leq \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$. Päättele tästä, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$. (Vihje. Tutki aluksi sellaista jonoa $x \in \ell^p$, jolle $\|x\|_p = 1$.)

4. Olkoon E normiavaruus ja $M \subset E$ sen vektorialiavaruus. (Siis M:n alkioiden lineaarikombinaatio on edelleen M:n alkio.) Oletetaan, että M on aito aliavaruus, eli $M \neq E$. Osoita, että M ei voi olla avoin E:n osajoukko.
Opastus. Tarkastele pistettä $0 \in M$; ota jokin vektori $z \in E \setminus M$. Muokkaa z:sta vektori, joka kuuluu mielivaltaiseen, ennalta annettuun 0:n ympäristöön, mutta ei ole edelleenkään M:n alkio.

****

1. For the real numbers a, b, $a < b$, denote

$$C(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continuous} \mid \|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\}.$$

Consider the composition operator $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$, where φ is a continuous real valued function of a real variable. Let

$$\varphi(t) := t^2,$$

and show that $C_\varphi : C(0,1) \to C(-1,1)$ is well defined and continuous operator in the given spaces (linearity is obvious). Why is C_φ not a surjection?
Let $\psi(t) := \frac{1}{2}t$. Prove that $C_\psi : C(0,1) \to C(0,1)$ is not an injection. Is C_φ an injection?

2. Let $\mathbb{R}$ be the scalar field. Consider the shift and backward shift operators $S : \ell^2 \to \ell^2$ and $T : \ell^2 \to \ell^2$,

$$S : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \quad , \qquad T : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto (x_{n+1})_{n=1}^\infty .$$

They are linear and bounded operators. The closed (linear) subspace M of ℓ^2 is *invariant* (for the operator S), if $S(M) \subset M$, or, S maps any element of M into M. The same for T.
Give examples of some invariant subspaces, separately for both operators.
The vector $x \in \ell^2$, $x \neq \bar{0}$, is an *eigenvector with eigenvalue* $\lambda \in \mathbb{R}$ for the operator T, if

$$Tx = \lambda x.$$

Give examples of some eigenvectors and eigenvalues for T.
Remarks. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- The subspace spanned by eigenvector(s) is always invariant.
- You do not need to worry for closedness-proofs for your subspaces. For example, a finite dimensional subspace is always closed.

3. Let $1 \leq p < q \leq \infty$. Prove first that $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ for $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$, and then deduce from this that $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$. (Instruction. You should first consider a sequence $x \in \ell^p$ such that $\|x\|_p = 1$.)

4. Let E be a normed space $M \subset E$ its linear subspace which is not the whole space. Prove that M cannot be an open subset of E.
Hint. Consider the point $0 \in M$; take a vector $z \in E \setminus M$. Modify this z such that it belongs to a given neighbourhood of 0, but is still not in M.