FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
SPRING / KEVÄT 2017
EXERCISE 10 / LASKUHARJOITUS 10

1.–2. Tarkastellaan jatkuvien lineaaristen operaattorien $T_n : X \to Y$ muodostamia perheitä, missä $n \in \mathbf{N}$ sekä X ja Y Banach–avaruuksia. Banach–Steinhausin lauseen mukaan joko

1° on olemassa $M \in [0, \infty[$ jolle
$$\|T_n\| \le M$$
kaikilla n, tai

2° voidaan löytää lähtöavaruuden X vektori x, jolle
$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n x\|_Y = \infty.$$
Tutki seuraavissa tapauksissa, kumpi vaihtoehto pätee. Mikäli 2° pätee, etsi lisäksi joku vektori $x \in X$, jolla on väitetty ominaisuus.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$, $T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_k \chi_n(k))_{k=1}^\infty$, missä $\chi_n(k) = 1$, jos $k \le n$ ja $\chi_n(k) = 0$, jos $k > n$.

b) $X = Y = C(0,1)$, ja T_n on kompositio–operaattori $T_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) := t^n$, kun $t \in [0,1]$.

c) $X = Y = L^2(\mathbf{R})$, $T_n f(x) := f(x/n)$ melkein kaikilla x.

d) $X = Y = \ell^2_w$, joka on painotettu ℓ^2–avaruus
$$\ell^2_w := \Big\{ x = (x_k)_{k=1}^\infty \ \Big| \ \|x\|_w := \Big(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 e^k \Big)^{1/2} < \infty \Big\}$$
ja
$$T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_{k-n})_{k=1}^\infty,$$
missä $x_m := 0$, kun $m \le 0$.

3. a) Olkoot X ja Y normiavaruuksia ja $R : X \to Y$ avoin lineaarikuvaus. Osoita, että R on surjektio. b) Olkoon H Hilbert-avaruus ja $S \in \mathcal{L}(H)$ sellainen, että jollekin vakiolle $C > 0$
$$|(Sx|x)| \ge C\|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$
Osoita, että S on bijektio ja $\|S^{-1}\| \le 1/C$.

4. Olkoot E, F ja G Banach–avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_{1,z} : E \to G$, $A_{1,z}(x) := A(x,z)$ sekä $A_{2,w} : F \to G$, $A_{2,w}(y) := A(w,y)$ molemmat ovat lineaarisia, kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$. Osoita Banach–Steinhausin lauseen avulla, että bilineaarikuvaus A on rajoitettu (eli
$$\|A\| := \sup\{\|A(x,y)\|_G \mid \|x\|_E \le 1, \|y\|_F \le 1\} < \infty \quad)$$
jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_{1,z} : E \to G$ ja $A_{2,w} : F \to G$ ovat rajoitettuja kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$.
****

1.–2. Consider families consisting of bounded linear operators $T_n : X \to Y$, where $n \in \mathbf{N}$ and X and Y are Banach spaces. According to the Banach–Steinhausin theorem, either

1° there exists $M \in [0, \infty[$ such that

$$\|T_n\| \leq M$$

for all n, or

2° there exists a vector $x \in X$ such that

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n x\|_Y = \infty.$$

In the following examples, find out which of the alternatives holds true. If it is 2°, then moreover find a vector $x \in X$ with the claimed property.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$, $T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_k \chi_n(k))_{k=1}^\infty$, where $\chi_n(k) = 1$, if $k \leq n$ and $\chi_n(k) = 0$, if $k > n$.

b) $X = Y = C(0,1)$, and T_n is the composition operator $T_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) := t^n$, for $t \in [0,1]$.

c) $X = Y = L^2(\mathbf{R})$, $T_n f(x) := f(x/n)$ for almost all x.

d) $X = Y = \ell^2_w$, the weighted ℓ^2 space

$$\ell^2_w := \Big\{ x = (x_k)_{k=1}^\infty \;\Big|\; \|x\|_w := \Big(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 e^k \Big)^{1/2} < \infty \Big\}$$

and

$$T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_{k-n})_{k=1}^\infty,$$

where $x_m := 0$ for $m \leq 0$.

3. a) Let X and Y be normed spaces and $R : X \to Y$ be an open linear mapping. Prove that R is a surjection. b) Let H be a Hilbert space and $S \in \mathcal{L}(H)$ such that for some constant $C > 0$

$$|(Sx|x)| \geq C\|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Show that S is a bijection and that $\|S^{-1}\| \leq 1/C$.

4. Let E, F and G be Banach spaces. A mapping $A : E \times F \to G$ is *bilinear*, if both maps $A_{1,z} : E \to G$, $A_{1,z}(x) := A(x,z)$ and $A_{2,w} : F \to G$, $A_{2,w}(y) := A(w,y)$ are linear, for all $w \in E$ and $z \in F$. Prove using the Banach–Steinhausin theorem that the bilinear map A is bounded, in other words

$$\|A\| := \sup\{\|A(x,y)\|_G \mid \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1\} < \infty,$$

if and only if the linear maps $A_{1,z} : E \to G$ and $A_{2,w} : F \to G$ are bounded for all $w \in E$ and $z \in F$.