

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017
Harjoitus ?

Koealue on luentomonisteen luvut 4, 5 ja 6 sekä osio 2.3.1 (ei sivuja 92–94).

Teoriapuolella käsitelimme olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseita (esimerkiksi 1. kertaluvun yhtälöille lause 4.4 ja lemmat 4.2, 4.3; korkeamman kertaluvun yhtälöille lause 5.4; systeemeille lause 5.3) sekä yleisesti systeemien teoriaa (esimerkiksi perusjärjestelmä). Myös lauseiden todistuksien ideat on hyvä palauttaa mieliin (esimerkiksi vaiheet 1–5 lauseen 4.4 todistuksessa).

Luonnollisesti laskuharjoitukset kuuluvat koealueeseen. Niissä on myös täydennetty differentiaaliyhtälöiden teoriaa (esimerkiksi H2/5, H3/5&6, H6/1).

Seuraavassa laskennallisia tehtäviä kertaamisen tueksi. Kokeessa on myös todistustehtävä.

Seuraavissa tehtävissä 1.–3. tutkitaan systeemiä

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$$

eri matriiseille A .

a) Etsi perusjärjestelmä.

b) Mikä on alkuarvotekävän ratkaisu, kun $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$?

c) Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

1.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 2 & -13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -17 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Seuraavissa tehtävissä 4. ja 5. tutkitaan systeemiä

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$$

eri matriiseille A .

a) Etsi perusjärjestelmä.

b) Mikä on alkuarvotekävän ratkaisu, kun $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$?

c) Mikä on kriittisen pisteen laatu?

4.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -17 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

6. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja radat sekä luonnostelee systeemin aikakehitys/virtauskuviot:

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t) + 3)(y(t) - 7) \\ y'(t) = (x(t) + 3)(x(t) - 5) \end{cases}$$

7. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja radat sekä luonnostelee systeemin aikakehitys/virtauskuviot:

$$\begin{cases} x'(t) = (y(t) + 1)(y(t) - 7) \\ y'(t) = (y(t) - 7)(1 - x(t)) \end{cases}$$